18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

KÖN. PR. REGIERUNG ZU POTSDAM

Acht und vierzigster Band.

In vier Heften.

Mit zwei Figurentafeln.

Berlin, 1854.

Bei Georg Reimer.

BIBLIOTECA CENTRALE

Inhaltsverzeichnifs
des acht und vierzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
2.	Application des transcendantes abéliennes à la théorie des fractions continues. Par Mr. *C. W. Borchardt* de Berlin.	I.	69
4.	Werthung der Factorielle $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots k}$, beim unendlichen Zunehmen der reellen, ganzen und positiven Zahl k, wenn m irgend eine reelle oder imaginäre Zahl ist. Von dem Herrn Dr. *Raabe,* Professor der Math. an der Universität zu Zürich.	II.	130
5.	Über Producte und Potenzen bestimmter einfacher Integral-Ausdrücke, durch mehrfache dargestellt. Von Demselben. (Aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich.)	II.	137
6.	Über die Darstellung einer Function zweier Variabeln z, z' nach aufsteigenden Potenzen zwei anderer Variabeln y, y', deren gegenseitige Abhängigkeit die Gleichungen $z = x + yf(z), \quad z' = x' + y'f(z')$ ausdrücken, wo $f(z)$ dieselbe Function von z ist, wie $f(z')$ von z'. Von Demselben. (Aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich.)	II.	143
7.	Über die singulären Integral-Auflösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Variabeln. Von Demselben. (Aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich.)	II.	151
8.	Über einen Hülfssatz zur Ausmittelung der Werthe bestimmter Integrale. Von Demselben. (Aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich.)	II.	160
9.	Zurückführung der Wurzelform einer algebraischen Gleichung auf die Integration linearer partieller, oder auch eines Systems simultaner gemeiner Differentialgleichungen erster Ordnung. Von Demselben. (Aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich.)	II.	167
10.	Über den gegenseitigen Zusammenhang einiger Functionen. Von Demselben. (Aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich.) . .	II.	178
11.	Independente Berechnung der *Sturm*schen Reste. Von Herrn Dr. phil. *Heilermann* zu Trier.	II.	190
12.	Die einfachsten periodischen Functionen. Von dem Herrn Professor Dr. *Schellbach* zu Berlin.	III.	207
13.	Untersuchungen über ganze Functionen. Von Herrn Prof. Dr. *Heine* zu Bonn.	III.	237
14.	Fernere Untersuchungen über ganze Functionen. Von Demselben. . . .	III.	243

Nr. der Abhandlung.		Heft. Seite.
15.	Über die Entwickelung von Wurzeln algebraischer Gleichungen in Potenzreihen. Von Herrn Prof. Dr. *Heine* zu Bonn.	III. 267
17.	Über eine Function von drei Winkeln, deren erste Abgeleiteten ebenfalls als Winkel anzusehen und durch algebraische Relationen ihrer Cosinus zu denen der Unabhängigen bestimmt sind. Von Herrn Dr. *Schläffli,* Docenten an der Universität zu Bern.	III. 292
18.	Observationes quaedam in theoria numerorum. Auct. Dr. *E. Meifsel,* Berol.	IV. 301
20.	Beitrag zur Theorie der $n$fach unendlichen Θ Reihen. Von Demselben. .	IV. 324
21.	Multiplications-Formeln für die elliptischen Functionen mit complexen Vielfachen des Arguments und dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Von Herrn Dr. *H. Hoffmann* in Danzig.	IV. 332
24.	Bemerkung zur Theorie des Gröfsten und Kleinsten. Von Herrn *Simon Spitzer,* Assistent und Privatdocent der Mathematik am K. K. polytechnischen Institute zu Wien.	IV. 381
25.	Bemerkungen über den *Sturm*schen Satz. Von Herrn Prof. *F. Joachimsthal* zu Halle a. d. S.	IV. 386

2. Geometrie.

3.	Über die gegenseitigen Beziehungen zwischen irgend einer ebenen Curve und den ihr zugehörigen, einem gemeinschaftlichen Pole entsprechenden Directrix- und Fufspunctenlinien. Von dem Herrn Dr. *Raabe,* Professor der Math. an der Universität zu Zürich.	II. 105
17.	Über eine Function von drei Winkeln, deren erste Abgeleiteten ebenfalls als Winkel anzusehen und durch algebraische Relationen ihrer Cosinus zu denen der Unabhängigen bestimmt sind. Von Herrn Dr. *Schläffli,* Docenten an der Universität zu Bern.	III. 292
23.	Sur la construction des normales qu'on peut abaisser d'un point donné sur une section conique complètement décrite. Par M. *F. Joachimsthal,* prof. de math. à l'Université de Halle.	IV. 377

3. Mechanik.

1.	Mémoire sur la question réciproque du centre de percussion. Par M. *Steichen,* professeur à l'école militaire de Bruxelles.	I. 1
19.	Zur Theorie der Tautochronen. Von Herrn Dr. phil. *Meifsel* zu Berlin.	IV. 317

II. Angewandte Mathematik.

1.	Mémoire sur la question réciproque du centre de percussion. Par M. *Steichen,* professeur à l'école militaire de Bruxelles.	I. 1
16.	Über die Zapfenreibung bei stehenden Wellen. Von Herrn Dr. *Druckenmüller,* Director des Königl. Gewerbe-Instituts zu Berlin.	III. 276
22.	Über den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen. Von Herrn *G. Kirchhoff,* Professor an der Universität zu Breslau.	IV. 348

1.

Mémoire sur la question réciproque du centre de percussion.

(Par M. *Steichen*, professeur à l'école militaire de Bruxelles.)

Pour établir la solution de la question que nous avons en vûe, sur un fondement solide, nous nous voyons obligé de reproduire d'abord un passage de notre mémoire sur les axes permanents de rotation, inséré dans l'Archive mathématique de Mr. *A. Grunert* de (1844—1846).

1.

Un corps solide est invariablement lié à un point fixe (O), *intérieur ou extérieur, et l'on demande autour de quel axe* OK *en ce point, il faut le faire tourner pour que les forces centrifuges qui naissent de cette rotation se fassent équilibre par le moyen du seul point fixe?*

Solution. La condition d'équilibre est évidemment remplie, si l'on exprime par le calcul que la somme algébrique des énergies des *forces centrifuges* ou des *réactions d'inertie normales* à tourner l'axe de rotation OK autour d'une droite quelconque en (O), située dans le plan perpendiculaire à sa direction, est nulle. 'A cet effet considérons la rotation du solide autour de OK à un instant quelconque, OK étant d'abord censé fixe, et concevons par le point donné trois axes rectangulaires OX, OY, OZ dont le premier coïncide avec la droite OK, inconnue de direction, tandis que les deux autres se trouvent dans un plan en (O) normal à OK; à ce même instant le centre d'inertie I du solide occupera dans l'espace une certaine position. Concevons par ce centre I trois autres axes rectangles Ix, Iy, Iz, respectivement parallèles aux premièrs axes; enfin imaginons au même point I les trois axes d'inertie Ix', Iy', Iz' lesquels seront en général dirigés autrement que ceux du second système, sans cesser d'être rectangulaires entr'eux.

Soient (X, Y, Z) (x, y, z) (x', y', z') les coordonnées d'un point matériel m quelconque du solide, rapporté tour-à-tour aux troix systèmes d'axes coordonnés $(OX,.)$ $(Ix,..)$ $(Ix'..)$, pour l'instant dont il s'agit; et nommons $x, y, z,$ les coordonnées au même instant du centre I, rapporté au premier système d'axes, tandis que S, T, U dénoteront les coordonnées du point fixe (O) par rapport aux axes d'inertie Ix', Iy', Iz', lesquels sont mobiles avec le corps.

Si pour abréger et soulager en même temps la mémoire, on dresse le tableau de notation:

$$\left.\begin{aligned} \cos(X,x') = \cos(x,x') &= \alpha, \\ \cos(X,y') = \cos(x,y') &= \alpha', \\ \cos(X,z') = \cos(x,z') &= \alpha'', \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \cos(Y,x') = \cos(y,x') &= \beta, \\ \cos(Y,y') = \cos(y,y') &= \beta', \\ \cos(Y,z') = \cos(y,z') &= \beta'', \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(Z,x') = \cos(z,x') &= \gamma \\ \cos(Z,y') = \cos(z,y') &= \gamma' \\ \cos(Z,z') = \cos(z,z') &= \gamma'' \end{aligned}\right\}$$

on obtient par la transformation bien connue des coordonnées:

$$\begin{aligned} x &= \alpha.x' + \alpha'.y' + \alpha''.z', \\ y &= \beta.x' + \beta'.y' + \beta''.z', \\ z &= \gamma.x' + \gamma'.y' + \gamma''.z'; \end{aligned}$$

et les équations de condition entre les coëfficients de direction $\alpha..\gamma''$:

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2 = 1 \ , \quad \beta^2+\beta'^2+\beta''^2 = 1 \ , \quad \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2 = 1,$$
$$\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'' = 0 \ , \quad \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma'' = 0 \ , \quad \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha'' = 0.$$

Pour fixer les idées, supposons que le centre d'inertie I se trouve dans le tri-rectangle des X, Y, Z positifs, et comptons les $x, y, z,$ dans le même sens que les $X,Y,Z.$ Le point fixe (O) se trouvera donc ainsi dans le tri-rectangle des x,y,z négatifs, et les quantités $-x,, -y,, -z,$ exprimeront parconséquent les coordonnées de (O), rapporté aux axes Ix, Iy, Iz. Mais déja S, T, U expriment les coordonnées de (O), rapporté aux axes Ix', Iy', Iz': on aura donc $x,y,z,$ par les formules:

$$\begin{aligned} -x, &= \alpha.S + \alpha'.T + \alpha''.U, \\ -y, &= \beta.S + \beta'.T + \beta''.U, \\ -z, &= \gamma.S + \gamma'.T + \gamma''.U. \end{aligned}$$

Pour passer ensuite des coordonnées (X, Y, Z) à celles (x, y, z), on a:

$$X = x + x, \quad , \quad Y = y + y, \quad , \quad Z = z + z, \quad \text{partant:}$$

$$X.Y = x.y + x,.y + x.y, + x,y, \; ; \; X.Z = x.z + x,.z + x.z, + x,.z,.$$

$$Y.Z = y.z + y,.z + y.z, + y,.z,,$$

et comme par hypothèse les plans coordonnées xiy, xiz, yiz, passent par le centre d'inertie du solide, on obtient:

$$\Sigma.m.x = 0 \quad , \quad \Sigma.m.y = 0 \quad , \quad \Sigma.m.z = 0;$$

ainsi, M désignant la masse entière du solide, on conclut de là:

$$\Sigma.m.X.Y = M.x,y, + \Sigma.m.xy \quad , \quad \Sigma.m.Y.Z = M.y,z, + \Sigma.m.yz,$$

$$\Sigma.m.X.Z = M.x,z, + \Sigma.m.xz.$$

Mais la ligne OK ou OX devant être l'axe d'équilibration des forces centrifuges, il faut que la somme de leurs moments à tourner OX autour d'un autre axe quelconque tel que OY ou OZ, soit nulle; c'est ce qu'on exprimera, en posant à la fois:

$$\Sigma.m.XY = 0 \quad , \quad \Sigma.m.XZ = 0$$

ou, en faisant uniquement: $\Sigma.m.XY = 0$;

l'axe OY étant considéré dans ce dernièr cas comme une droite arbitraire, située dans le plan normal en (O) à l'axe OX. Ainsi, en se donnant cette latitude, on doit se borner à faire par suite de la dernière égalité:

$$M.x,y, + \Sigma.m.xy = 0.$$

Si l'on substitue dans celle-ci les valeurs de x, y et de $x, y,$ en fonction de $x'y'z', \alpha\beta, \gamma..\gamma'', S, T, U,$ on obtiendra l'équation de condition générale qui suit:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\beta(M.S^2 + \Sigma.mx'^2) + \alpha'\beta'(M.T + \Sigma.my'^2) + \alpha''\beta''(M.U^2 + \Sigma.mz'^2) \\ + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)M.S.T + (\alpha\beta'' + \alpha''\beta)M.S.U + (\alpha'\beta'' + \alpha''\beta')M.T.U \end{array}\right\} = 0.$$

Celle-ci, devant subsister d'ailleurs quelles que soient les valeurs de β, β', β'', aura encore lieu quand on fera tour-à-tour chacune de ces quantités égale à zéro; ce qui revient à diriger l'axe Iy dans le plan fixe yIz, suivant une normale à

$$Ix' \text{ pour } \beta = 0 \quad , \quad \text{à } Iy' \text{ pour } \beta' = 0 \quad , \quad Iz' \text{ pour } \beta'' = 0.$$

Si donc on pose pour abréger:

$$M.S.T = f \quad , \quad M.S.U = g \quad , \quad M.T.U = h,$$

$$\Sigma.my'^2 - \Sigma.mz'^2 + M.T^2 - M.U^2 = B',$$
$$\Sigma.mx'^2 - \Sigma.mz'^2 + M.S^2 - M.U^2 = A',$$

on obtient les équations suivantes, toutes issûes de la condition générale:

$$\left.\begin{aligned} \alpha'\alpha''.B' + \alpha\alpha''.f - \alpha\alpha'.g + (\alpha''^2 - \alpha'^2).h &= 0 \;\ldots\ldots\; \text{I}' \\ \alpha\alpha''.A' + \alpha'\alpha''.f + (\alpha''^2 - \alpha^2)g - \alpha\alpha'.h &= 0 \;\ldots\ldots\; \text{II}' \\ \alpha\alpha'.(A' - B') + (\alpha'^2 - \alpha^2)f + \alpha'\alpha''.g - \alpha\alpha''.h &= 0 \;\ldots\ldots\; \text{III}' \end{aligned}\right\},$$

et dont la dernière n'est généralement qu'une conséquence identique des deux premières. Multipliant en effet la première par α, la deuxième par α', et retranchant membre-à-membre, on obtient, après avoir supprimé le facteur α'', commun aux termes restants, la troisième équation.

En faisant dans ces mêmes équations (I′, II″, III′):

$$\alpha = \cos\vartheta.\cos\eta \quad , \quad \alpha' = \cos\vartheta.\sin\eta \quad , \quad \alpha'' = \sin\vartheta,$$

$\operatorname{tang}\vartheta = z$, $\operatorname{tang}\eta = \zeta$, on trouve l'équation

$$A_{,}.\zeta^3 + B_{,}.\zeta^2 + C_{,}.\zeta + D_{,} = 0,$$

dans laquelle les coëfficients $A_{,}, B_{,}, C_{,}, D_{,}$ ont les valeurs suivantes:

$$A_{,} = M^2.(B - C).S^2.T.U,$$

$$B_{,} = M^2(C - A).S.T^2.U + M^2(B - A).S.U^3 + M^2(C - B)S^2(T^2 - S^2).S.U + M(B - C)(B - A)S.U,$$

$$C_{,} = M^2(C - B).S^2.T.U + M^2(A - B).T.U^3 + M^2(C - A)(S^2 - T^2).T.U + M(B - A)(C - A).T.U,$$

$$D_{,} = M^2(A - C).S.T^2.U.$$

A, B, C denotent les trois moments d'inertie principaux du centre.

En désignant maintenant par $\left(\frac{A_{,}}{U}\right), \left(\frac{B_{,}}{U}\right), \left(\frac{C_{,}}{U}\right), \left(\frac{D_{,}}{U}\right)$ ce que deviennent les rapports $A_{,} : U$, $B_{,} : U$, etc. etc. pour $U = 0$, on en déduit cette autre équation du troisième degré:

$$\left(\frac{A_{,}}{U}\right).\zeta^3 + \left(\frac{B_{,}}{U}\right).\zeta^2 + \left(\frac{C_{,}}{U}\right).\zeta + \left(\frac{D_{,}}{U}\right) = 0,$$

qui pourra servir à déterminer les trois axes permanents du solide relatifs à un point pris dans le plan d'inertie central $x'Iy'$.

Mais cette manière de procéder ne serait guères propre à assigner la po-

sition mutuelle de ces lignes, ni à faire ressortir les propriétés générales et précises auxquelles il importe de s'attacher avant tout, et que l'on peut déduire immédiatement des équations (I', II', III'). En faisant rémarquer en effet que pour $U = 0$, on a aussi $g = 0$, $h = 0$, on obtient les conditions simplifiées:

(1.) $\alpha'\alpha''.B' + \alpha\alpha''.f = 0$, $A' = M.S^2 + C - A$

(2.) $\alpha\alpha''.B' + \alpha'\alpha''.f = 0$, $B' = M.T^2 + C - B$

(3.) $\alpha\alpha'.(A' - B') + (\alpha'^2 - \alpha^2)f = 0$, $A' - B' = M(S^2 - T^2) + B - A.$

Si l'on supprime d'abord le facteur α'' dans chaque membre des deux premières, on obtient:

$$\alpha'.B' + \alpha.f = 0 \quad , \quad \alpha.A' + \alpha' f = 0;$$

tirant de là les valeurs de α', et les égalant entr'elles, on a:

$$(f^2 - A'.B')\alpha = 0,$$

et comme on ne saurait avoir généralement le premier facteur nul, on doit faire $\alpha = 0$, ce qui donne parconséquent $\alpha' = 0$, partant $\alpha'' = \pm 1$; ainsi dans ce cas l'un des trois axes permanents est perpendiculaire au plan principal du centre sur lequel se trouve placé le point fixe (O).

Quant aux deux autres axes permanents en ce même point, ils occupent une position qu'on peut encore déduire de l'analyse précédente. En effet, les équations (1, 2) doivent être satisfaites aussi par l'hypothèse de $\alpha'' = 0$, ce qui laisse α, α' encore inconnus; mais comme on a outre l'équation (3), celle-ci:

$$\alpha^2 + \alpha'^2 = 1,$$

il s'ensuit qu'on a deux relations pour déterminer deux inconnues. En prenant $\alpha = \cos\varphi'$, $\cos\varphi''$, on obtient par l'élimination:

$$\cos^2\varphi' = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{A' - B'}{\sqrt{[(A' - B)^2 + 4f^2]}},$$

$$\cos^2\varphi'' = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{A' - B'}{\sqrt{[(A' - B')^2 + 4f^2]}}.$$

Les formules (I', II', III') et les résultat relatif à l'un des axes permanents d'un point (O) pris sur un plan d'inertie central, nous seront surtout utiles dans la question importante et difficile que nous voulons traiter. En outre nous aurons besoin de présupposer quelques fois tacitement la connaissance de certaines autres propriétés des axes permanents, encore peu repandues et donc plusieurs sont

mêmes nouvelles; il nous parait donc à la fois opportun et nécessaire d'en donner ici l'énoncé en langage ordinaire, dégagé de tout embarras de transformations analytiques. Le lecteur exercé pourra vérifier tous ces énoncés par le moyen de l'analyse générale que l'on vient d'exposer; et s'il tient à y parvenir par une voie plus naturelle, il pourra consulter notre mémoire, cité plus haut, qui renferme à cet égard tous les développements desirables.

I. Quand un corps solide est pourvu d'un point fixe, situé dans l'un des plans d'inertie principaux du centre, l'un des trois axes permanents de rotation en ce point est toujours perpendiculaire au plan dont il s'agit; les deux autres occupent dans ce plan une position qu'on peut toujours calculer.

II. Quand le point fixe est situé sur l'un des trois axes d'inertie du centre, l'un des trois axes permanents en ce point coïncide avec cet axe d'inertie central même; et les deux autres sont (contrairement à une assertion de *Poisson*) parallèles aux deux lignes principales restantes du centre.

III. Dans un solide de révolution l'un des trois axes permanents relatifs à un point fixe quelconque, est toujours perpendiculaire au plan déterminé par le point fixe et par l'axe de figure du solide. De plus, les deux autres axes occupent dans ce plan une position que le calcul fournit assez aisément. La même propriété subsiste pour le cas un peu moins particulier d'un solide ayant deux moments d'inertie principaux du centre égaux entr'eux; et alors l'axe du moment inégal remplace l'axe de figure dans l'énoncé précédent.

IV. Dans tout système de points matériels disposés dans un même plan, l'un des trois axes permanents est, comme on le savait d'ailleurs, normal au plan pour tout point fixe du système; mais sur l'axe principal du moment d'inertie maximum du plan, il existe toujours deux *centres des rayonnement* d'axes permanents dans le plan: on peut les nommer les *foyers mécaniques* du système; on en trouve la distance au centre d'inertie, en divisant la différence des deux moments d'inertie principaux par la masse du système, et extrayant la racine quarrée du résultat. Exemple: les foyers mécaniques de la surface elliptique homogène se trouvent placés sur le petit axe de la courbe-limite, de la manière même dont les foyers optiques ou géométriques sont distribués sur le grand-axe.

V. Pour les solides homogènes de première classe ($A = B = C$) un point fixe quelconque, intérieur ou extérieur, est un *centre de rayonnement plan-normal* d'axes permanents; c'est-à-dire que tous les axes en ce point, situés dans un plan normal à la droite tirée de ce point au centre, sont des axes permanents de rotation du solide, et correspondent tous à des moments d'inertie égaux du solide.

VI. Pour les solides de révolution, un point quelconque pris sur l'axe de figure peut et doit toujours être considéré comme un *centre de rayonnement plan-normal* d'axes permanents.

VII. Si au sommet de l'ellipse de rayonnement, découverte par Mr. *Binet*, on construit une surface conique vulgaire dont l'axe coïncide avec la tangente à la courbe en ce point, les moments d'inertie du solide relatifs aux génératrices du cône, sont égaux entr'eux; et cependant ces génératrices ne sont point des axes permanents de rotation en ce point. Une propriété analogue subsiste pour les sommets du petit axe de la courbe, et pour les sommets réels de l'hyperbole de rayonnement. (Voir notre mémoire cité plus haut et les (§. **13** et **14**) de celui-ci pour quelques applications utiles.)

2.

Examen d'un cas particulier de la question réciproque.

Nous ne sachions pas que le question du centre spontané et de l'axe spontané de rotation soit resolue pour tous les cas en général; et jusqu'à ce jour on connaît à peine la signification et la position de ce point et de cet axe pour le cas où un corps solide serait ébranlé par une force de percussion dirigée dans l'un des trois plans principaux du centre d'inertie. Or sans avoir besoin de reprendre les choses de bien loin, on peut d'abord resoudre ce cas particulier de la manière suivante:

Soit (I) le centre d'inertie du solide, et nommons, comme plus haut, Ix', Iy', Iz' ses trois axes d'inertie en ce point; on peut admettre qu'une force idéale de percussion F agisse instantanément dans le plan $x'Iy'$ sur le solide, pour lui communiquer un effet dynamique fini, plus ou moins considérable. D'aprés la théorie des axes permanents (§. **1**) et la question directe de la percussion, il doit donc exister pour le solide un axe permanent OX normal au plan $x'y'$ qu'il rencontre quelque part en un point (O) tel que le point de rencontre de la ligne d'action de la force F avec le plan tiré par I normalement à F, en soit le centre de percussion; et ce point de rencontre Π s'obtient, si l'on abaisse dans $x'.y'$ de I sur F une perpendiculaire $I\Pi$. Mais en désignant par C le moment d'inertie du solide, relatif à l'axe Iz', et par P le plan mené suivant $I\Pi$ normalement à F, on voit que ce plan devra renfermer l'axe Iz' et l'axe OX auquel correspond le point Π comme centre de percussion. Ainsi le point (O) sera sur la ligne ΠI prolongée, et M exprimant la masse du corps, nous aurons par la théorie directe:

$$O\Pi = OI + C:M.OI$$

et comme on a aussi $O\Pi = OI + I\Pi$ par l'identité géométrique, on en conclut immédiatement:

$$OI = C:M.I\Pi.$$

Puisque donc $C, M, I\Pi$, sont présentement les données directes de la question, il s'ensuit que l'on connait la distance IO dont il faut prolonger la droite $I\Pi$ pour avoir le point (O) et partant l'axe OX qui est d'ailleurs normal au plan principal $x'Iy'$, et forme un axe permanent de rotation relatif au point (O). Le point (O) et l'axe OX ainsi déterminés, sont ce que l'on doit nommer le *centre spontané* et *l'axe spontané* de rotation, correspondant au mode actuel d'application de la force F. Ainsi, quand cette force percute le solide, pourvu du point fixe (O), celui-ci et l'axe OX n'en éprouveront aucune secousse, aucun choc; néanmoins il faut qu' après l'acte de la percussion, le point (O) continue à rester fixe et à être retenu n'importe par quel obstacle mécanique; car s'il devenait libre de se mouvoir, il serait emporté avec l'axe OX dans l'espace sous l'action incessante et continue des forces centrifuges ou réactions d'inertie normales qui naissent de la rotation du solide ébranlé autour de l'axe OX: ces forces se font en effet l'équilibre de rotation sur cet axe, puisqu'il est permanent; mais elles ont une résultante unique et effective, passant par le point fixe (O) et que celui-ci doit détruire constamment.

Supposons que l'on fasse mouvoir la ligne d'action de F tangentiellement à une circonférence de cercle tracée dans le plan d'inertie $x'Iy'$ et concentrique au point (I); le point (O) décrira sur ce plan une autre circonférence d'un rayon $C:M.I\Pi$, et l'axe OX décrira une surface cylindrique d'un rayon égal, et concentrique à l'axe Iz'. Cette propriété de réciprocité entre le centre de percussion et le centre spontané de rotation est donc parfaitement analogue à celle de *Huygens*, relative aux centres d'oscillation et de suspension dans un corps pesant, oscillant autour d'un axe horizontal-permanent de suspension.

Si la force de percussion était dirigée dans le plan d'inertie $y'Iz'$, le centre spontané correspondant $(O_,)$ se trouverait dans ce plan sur le prolongement contraire de la perpendiculaire $I\Pi$, abaissée de I sur la ligne d'action F, et à une distance $IO_,$ donnée par l'égalité

$$IO_, = A:M.I\Pi,$$

A marquant le moment d'inertie relatif a l'axe Ix'. De même dans le plan d'inertie $z'Ix'$ on aurait:

$$IO_2 = B : M . III_2 .$$

On voit donc qu'il y a trois centres spontanés principaux, correspondants à trois lignes d'action principales de la percussion, de même qu'il y a trois centres de percussion principaux.

Cette simplicité de notions et cette facilité de construction qu'on vient d'établir, ne se maintiennent plus pour le cas plus général de la question réciproque des centres de percussion; voici d'abord l'énoncé d'après lequel elle nous paraît devoir être conçue:

3.

La ligne d'action suivant laquelle une force de percussion doit ébranler un solide, est donnée de direction et de position; on demande quel point (O) *du solide il faut rendre fixe, pour que la secousse éprouvée par le point à l'instant du choc soit nulle, et que le mouvement de rotation ait lieu autour d'un axe permanent du même point.*

Solution. Nommons OX l'axe d'ébranlement lequel doit être un des axes permanents du point inconnu (O), situé généralement en dehors de chaque plan d'inertie central; et concevous le plan indéfini P, déterminé par la ligne OX et le centre d'inertie I; il devra être perpendiculaire à la ligne d'action de la force percutante F. Concevons en outre suivant cette ligne de F un plan P', normal à la ligne inconnue OX qu'il coupera au point (O) même. En effet les conditions de la question sont évidemment satisfaites, si le plan P' mené suivant F, est un plan permanent pour le point (O) du solide, et si en outre la distance entre (O) et F dans P' est convenable. La question est donc ramenée aux termes suivants:

Par le centre d'inertie I *d'un solide on mène un plan* P *normal à une droite donnée* F, *et suivant cette droite on conduit un plan* P', *d'abord arbitraire pour le reste: on demande quelle position il faut donner à ce plan* P' *autour de* F' *pour qu'il soit possible de trouver sur la droite d'intersection* (P, P') *des deux plans* P, P', *l'un fixe, l'autre susceptible de tourner sur* F, *un point* (O) *du solide, pour lequel le plan* P' *soit un plan permanent et pour lequel un axe* OX *normal en* (O) *au plan* P' *soit l'axe spontané de rotation.*

La question ramenée ainsi se conçoit mieux et se prêtera plus facilement aux calculs analytiques, propres à en exprimer les diverses conditions. Mais dans la vûe d'être mieux compris, il nous faut encore rappeler le point fondamental de la théorie directe. On sait par cette théorie (voir p. ex. notre mémoire du tome. 43 de ce Journal §. 1) que l'on peut toujours ébranler un solide autour

d'un axe permanent ($\omega\xi$) relatif à un point fixe douné (ω), sans que ce point ni l'axe éprouvent de choc, si la force de percussion agit sur le solide dans un plan permanent en (ω), normal à l'axe ($\omega\xi$), suivant une direction perpendiculaire au plan (I, $\omega\xi$) et à une distance de (ω) dans ce plan permanent, marquée par $\nu, + Mk^2 : M.\nu,$; $\nu,$ désigne la distance du centre I à l'axe ($\omega\xi$), Mk^2 le moment d'inertie du solide par rapport à un axe en I parallèle à l'axe donné. Il semble donc, à n'envisager les choses que du seul point de vûe des idées mécaniques, que la question présente soit également possible dans tous les cas, sauf celui où la force F serait appliquée au centre d'inertie même du solide.

4.

Suite. Soient λ, μ, η les cosinus des angles de la ligne d'action de F, avec les trois axes d'inertie rectangulaires Ix', Iy', Iz'; et S, T, U les coordonnées courantes d'un point quelconque de cette ligne; celle-ci aura donc pour équations:

$$\left.\begin{aligned} U.\lambda - S.\eta &= b \ldots\ldots \\ T.\lambda - S.\mu &= a \ldots\ldots \\ \mu.U - \eta.T &= \frac{b.\mu - a.\eta}{\lambda} \end{aligned}\right\} \ldots (\mathrm{F}) \ldots (\lambda, \mu, \eta).$$

Le plan P passant par l'origine I, et normal à F, sera représenté par l'équation

$$\lambda.S + \mu.T + \eta.U = 0 \ldots\ldots (\mathrm{P});$$

S, T, U étant également les coordonnées courantes d'un point quelconque de ce plan. Nommons α, α', α'' les cosinus des angles inconnus de l'axe permanent OX, qui passe par le point $(O) = (S, T, U)$ et qui doit par conséquent être normal au plan P', avec les trois axes coordonnées du centre I; l'équation de P' sera donc:

$$\alpha.S + \alpha'.T + \alpha''.U + D = 0 \ldots (\mathrm{P}'),$$

et de plus on aura les relations perpétuelles:

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1 \quad , \quad \lambda^2 + \mu^2 + \eta^2 = 1 \ldots (\mathrm{Q})$$

Comme d'un autre côté le plan (P') doit renfermer la ligne connue de F, on obtient les conditions

$$\left.\begin{aligned} \alpha.\lambda + \alpha'.\mu + \alpha''.\eta &= 0 \\ a.\alpha + b.\alpha'' + D.\lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (\mathrm{A}.)$$

lesquelles suffisent, en combinaison avec la première équation (Q), pour trouver α, α', α'' en fonction des données immédiates λ, μ, η, a, b, et de l'indeterminée D relative au plan P'; et au besoin il est permis de considérer ces inconnues comme des fonctions connues de $(a, b, D, \lambda, \mu, \eta)$.

Les équations de la droite d'intersection (P, P') des deux plans P, P, seront d'après les notations précédentes:

$$(\alpha.\eta - \alpha''\lambda)S + (\alpha'.\eta - \alpha''.\mu)T + D.\eta = 0,$$
$$(\alpha.\mu - \alpha'\lambda)S + (\alpha''.\mu - \alpha'.\eta)U + D.\mu = 0,$$
$$(\alpha'.\lambda - \alpha.\mu)T + (\alpha''.\lambda - \alpha''.\eta)U + D.\lambda = 0.$$

En désignant par β, β', β'' les coëfficients de direction, c'est-à-dire les cosinus des angles de (P, P') avec les axes coordonnées, on conclut de là, ce que l'on sait d'ailleurs par d'autres transformations:

$$\beta = \alpha'\eta - \alpha''.\mu,$$
$$\beta' = \alpha''\lambda - \alpha.\eta,$$
$$\beta'' = \alpha\mu - \alpha'.\lambda,$$

et l'on a en outre:

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0,$$
$$\beta\lambda + \beta'\mu + \beta''\eta = 0;$$

de sorte que les équations de la droite (P, P') peuvent se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} T.\beta - S.\beta' + D.\eta &= 0 \\ U.\beta - S.\beta'' + D.\mu &= 0 \\ U.\beta' - T.\beta'' + D.\lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (P, P') \ldots (\beta, \beta', \beta'');$$

et des valeurs de β, β', β'' on déduit encore aisément:

$$\alpha\beta'' - \alpha''\beta = \mu \quad , \quad \alpha'\beta - \alpha\beta' = \eta \quad , \quad \alpha''\beta' - \alpha'\beta'' = \lambda \ldots \text{(a)}.$$

En outre on peut faire rémarquer que les trois droites F, P, P', OX, formant trois directions rectangulaires $(\lambda, \mu, \eta)(\beta, \beta', \beta'')(\alpha, \alpha', \alpha'')$, on peut dire que l'axe Ix' forme avec ces directions des angles de cosinus (λ, β, α), et poser en conséquence:

$$\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 1 \ldots\ldots \text{(b)}.$$

Mais cela étant posé, il s'agit de tenir compte des conditions mécaniques de la question. Or l'axe OX doit être pour le point inconnu (O), $= S, T, U$, un

axe permanent du solide; on aura donc en vertu des équations (I', II', §. I) les conditions générales suivantes:

$$\text{(I.)} \quad \alpha'.\alpha''.B' + \alpha\alpha''f - \alpha\alpha'.g + (\alpha''^2 + \alpha'^2)h = 0,$$

$$\text{(II.)} \quad \alpha''.\alpha.A' + \alpha'\alpha''f + (\alpha''^2 - \alpha^2)g - \alpha\alpha'h = 0;$$

dans lesquelles les quantités f, g, h ont toujours pour valeurs:

$$f = M.S.T \quad , \quad g = M.S.U \quad , \quad h = M.T.U$$

tandis que l'on a pour A', B':

$$A' = C - A + M.(S^2 - U^2) \quad , \quad B' = C - B + M.(T^2 - U^2).$$

Sans nous arrêter à voir dans les équations (I, II) des surfaces du second ordre à paramètre variable ou indéterminé, substituons d'abord les valeurs de T, U en fonction de S, données par les égalités (P, P'), et il vient:

$$A' = C - A + M.S^2 - M(\beta''.S + \mu.D)^2 : \beta^2,$$

$$B' = C - B + M.\frac{(\beta'.S - \eta.D)^2 - (\beta''.S + \mu.D)^2}{\beta},$$

$$f = M.(\beta'.S^2 - \eta.D.S) : \beta,$$

$$g = M.(\beta''.S^2 - \mu.D.S) : \beta,$$

$$h = M.(\beta'.S - \eta.D)(\beta''.S + \mu.D) : \beta^2.$$

Si dans la vûe d'abréger encore l'écriture des formules, on pose:

$$(C - A) : M = E \quad , \quad (C - B) : M = H$$

dans les valeurs de A', B', et qu'on substitue les quantités ainsi calculées en S, de même que celles de f, g, h dans les formules (I, II), on obtiendra à leur place ces deux autres égalités:

$$\left.\begin{array}{r}\beta^2.\alpha.\alpha''.E + \alpha\alpha''[\beta^2 S^2 - (\beta''S + \mu D)^2] + \alpha'\alpha''.\beta(\beta'.S^2 - \eta.D.S) \\ - \alpha\alpha'(\beta'.S - \eta.D)(\beta''S + \mu D) + \beta.(\alpha''^2 - \alpha^2)(\beta''S^2 + \mu.D.S)\end{array}\right\} = 0 \ldots$$

$$\left.\begin{array}{r}\beta^2.\alpha'.\alpha''.H + \alpha'.\alpha''[(\beta'.S - \eta.D)^2 - (\beta''.S + \mu.D)^2] + \alpha\alpha''\beta(\beta'S^2 - \eta.D.S) \\ - \alpha.\alpha'.\beta(\beta''S^2 + \mu.D.S) + (\alpha''^2 - \alpha'^2)(\beta'S - \eta.D)(\beta''.S + \mu D) \ldots\ldots\end{array}\right\} = 0.$$

Voilà donc deux équations du second degré en S qui par l'élimination de cette inconnue devront fournir une au moins et deux équations de condition au plus entre les inconnues α, α', α'', D. Mais la condition d'une percussion nulle sur l'axe et sur le point fixe que l'on cherche, devra produire aussi une équation

de condition; ce qui donnera cinq équations au moins pour déterminer quatre inconnues seulement. Le problème envisagé du simple point de vûe analytique paraît donc impossible en général. Néanmoins en revenant à l'idée de la propriété réciproque du centre de percussion, nous sommes naturellement porté à admettre une solution possible, au moins pour de certains cas particuliers.

5.

Suite. Il est donc bien important d'examiner avant tout la nature des deux équations en S qu'on vient d'établir, et de tenter une élimination qui au premier abord paraît inextricable. Or eu égard aux conditions (a), on peut mettre la première de ces équations sous la forme suivante:

$$E.\alpha\alpha''\beta^2 + \alpha\alpha'\mu.\eta.D^2 - \alpha\alpha''\mu^2.D^2$$
$$+ [\beta(\alpha''^2 - \alpha^2)\mu.D + \alpha\alpha'\beta''.\eta.D - \alpha\alpha'\beta'\mu.D - \alpha'\alpha''\beta.\eta.D - 2\alpha\alpha''\beta''\mu.D].S$$
$$+ [\alpha\alpha''.\beta^2 - \alpha\alpha''\beta''^2 + \alpha'\alpha''\beta\beta' - \alpha\alpha'\beta'\beta'' + \beta\beta''(\alpha''^2 - \alpha^2)].S^2 = 0.$$

En nommant t'', t', t les coëfficients respectifs des termes en S^2, S^1, S^0 dans cette équation, ou trouvera aisément:

$$t'' = \alpha\alpha''\beta^2 - \alpha\alpha''\beta''^2 + \alpha''^2\beta\beta'' - \alpha^2\beta\beta'' + \alpha'\beta'(\alpha''\beta - \alpha\beta'')$$
$$= \alpha\beta(\alpha''\beta - \alpha\beta'') + \alpha'\beta'(\alpha''\beta - \alpha\beta'') + \alpha''\beta''(\alpha''\beta - \alpha\beta'')$$
$$= -(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'')\mu = 0$$

$$t' : D = \beta(\alpha''^2 - \alpha^2)\mu + \alpha\beta''(\alpha'\eta - \alpha''\mu) - \alpha\alpha'\beta'\mu - \alpha'\alpha''\beta\eta - \alpha\alpha''\beta''\mu$$
$$= \beta\mu(\alpha''^2 - \alpha^2) + \alpha\beta''\beta - \alpha'\alpha''\beta\eta - \alpha\mu(\alpha'\beta' + \alpha''\beta'')$$
$$= \alpha''^2\beta\mu + \alpha\beta\beta'' - \alpha'\alpha''\beta\eta - \alpha\mu(\alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \alpha\beta)$$
$$= \alpha.\beta.\beta'' + \alpha''\beta(\alpha''\mu - \alpha'\eta) = \alpha\beta'\beta'' - \alpha''\beta^2.$$

Ainsi la valeur de $t' : D$ se réduit finalement à la forme:

$$t' : D = \beta(\alpha\beta'' - \alpha''\beta) = \mu.\beta \quad , \quad \text{et} \quad t' = \mu.\beta.D.$$

Soient de même t_2, t_1, t_0 les coëfficients respectifs des termes en S^2, S^1, S^0 de la seconde équation en S; on trouve par une marche toute semblable à la précédente:

$$t_2 = 0 \quad , \quad t_1 = -\lambda.\beta.D \quad , \quad t_0 = \beta(\alpha'\alpha''.\beta.H - \alpha.\lambda.D^2)$$

tandis que pour la première on a obtenu:

$$t'' = 0 \quad , \quad t' = +\mu.\beta.D \quad , \quad t = \alpha.\beta(\alpha''\beta.E + \mu.D^2).$$

Ainsi donc les deux équations en S s'abaissent d'elles-mêmes au premier degré et revêtent la forme fort simple:

$$\left.\begin{aligned} \mu\beta.D.S + \alpha\beta(\alpha''\beta.E + \mu.D^2) &= 0 \\ -\lambda.\beta.D.S + \beta(\alpha'\alpha''.\beta.H - \alpha.\lambda.D^2) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (S)$$

et pourvu qu'on ait l'équation de condition suivante:

$$(\mu\alpha', H + \alpha.\lambda.E)\alpha.\beta = 0 \ldots\ldots (B),$$

elles donneront pour S la valeur commune:

$$(IV.) \qquad S = -\alpha.D - \frac{\alpha\alpha''.\beta.E}{\mu.D}$$

On peut faire rémarquer que l'équation de condition (B) est satisfaite par l'égalité à zéro de l'un quelconque des trois facteurs $\mu\alpha'.H + \alpha\lambda.E$, α'' et β. D'un autre côté le facteur $\beta = 0$ jouit de la propriété de rendre à la fois identiques les deux équations (B), en laissant indéterminées la quantité S et partant celles T, U; de sorte qu'au premier abord même il paraît le mieux approprié à la recherche qu'on se propose; mais comme il ne faut rien laisser au hasard d'un choix, même plus ou moins heureux, il convient de pénétrer franchement dans toutes les difficultés du sujet, et de discuter successivement l'hypothèse de l'égalité à zéro de chacun de ces trois facteurs. Toutefois achevons d'abord la partie géométrique de la solution de la question.

6.

Suite. Les véritables inconnues du problème sont α, α', α'', D et les coordonnées S, T, U du point inconnu (O). Or une condition essentielle de la question a été omise jusqu'i ci; c'est celle qui exige que le point (O) et la ligne d'action de F se trouvent dans une situation et à une distance mutuelle, telle que la percussion sur le point (O) soit nulle. Du centre d'inertie I du solide abaissons une perpendiculaire IQ sur le plan permanent P' de (O); elle sera une parallèle à l'axe OX, et aura pour équations:

$$U.\alpha - S.\alpha'' = 0 \quad , \quad T.\alpha - S.\alpha' = 0 \ldots (IQ.)$$

En combinant celles-ci avec l'équation du plan P', et dénotant par

S_1, T_1, U_1 les coordonnées du point de rencontre Q de cette normale avec le plan P', on obtient:

$$S_1 = -\alpha.D \quad , \quad T_1 = -\alpha'.D \quad , \quad U_1 = -\alpha''.D.$$

De plus la droite QII abaissée dans P' sur la droite F doit coïncider avec la droite (P, P'), puisque les plans P, P' sont rectangulaires, et que la ligne IQ n'est autre chose que la perpendiculaire menée de I dans le plan P sur sa droite d'intersection avec P'. Pour avoir l'expression de la distance QII, il faut donc encore chercher les coordonnées $S_2T_2U_2$ du point de rencontre II du plan P avec la ligne F; on trouve:

$$S_2 = -(a\mu + b\eta) \quad , \quad T_2 = \frac{a}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda}(a\mu + b\eta) \quad , \quad U_2 = \frac{b}{\lambda} - \frac{\eta}{\lambda}(a\mu + b\eta),$$

d'où:

$$QII^2 = (\alpha D - a\mu - b\eta)^2 + \left(\alpha' D + \frac{a - a\mu^2 - b\mu\eta}{\lambda}\right)^2 + \left(\alpha'' D + \frac{b - b\eta^2 - a\mu\eta}{\lambda}\right)^2,$$

ou:

$$QII^2 = (\alpha D + S_2)^2 + \left(\alpha' D + \frac{a + \mu S_2}{\lambda}\right)^2 + \left(\alpha'' D + \frac{b + \eta . S_2}{\lambda}\right)^2$$

et de là résulte:

$$QII^2.\lambda^2 = a^2 + b^2 - D^2\lambda^2 - (a\mu + b\eta)^2 \ldots .$$

De même la distance de (O) à Q qui doit se mesurer sur le prolongement de la droite IIQ, de la gauche vers la droite, à partir du point Q, si la distance QII se mesure de droite à gauche à partir du même pied Q, est donnée par la formule

$$QO^2 = (S - S_1)^2 + (T - T_1)^2 + (U - U_1)^2 = (S + \alpha D)^2 + (T + \alpha' D)^2 + (U + \alpha'' D)^2$$
$$= S^2 + T^2 + U^2 + 2D(\alpha S + \alpha' T + \alpha'' U) + D^2,$$

laquelle devient en vertu de l'équation de P':

$$QO^2 = S^2 + T^2 + U^2 - D^2 \ldots . \text{(D)}$$

et ce résultat est aussi évident par la voie géométrique, puisque D, QO sont les côtés d'un triangle rectangle dont la distance $IO = \sqrt{(S^2 + T^2 + U^2)}$ est l'hypothénuse.

Mais pour que le point (O) n'éprouve aucune secousse lors du choc, le point donné II doit être le centre de percussion correspondant, et il faut par conséquent que la distance QO puisse se calculer par la formule

$$QO = M.k^2 : M.QII$$

dans laquelle Mk^2 désigne le moment d'inertie du solide par rapport à la ligne

centrale IQ, parallèle à l'axe OX; ce qui donne par la théorie connue des moments d'inertié:

$$M.k^2 = A.\alpha^2 + B\alpha'^2 + C.\alpha''^2,$$

$$\text{partant:} \quad M^2.QO^2.QII^2 = (A\alpha^2 + B\alpha'^2 + C\alpha''^2)^2 \ldots (E).$$

On voit donc par là que la quantité QO doit être calculée de deux manières différentes: l'une fois par la condition (D), et l'autre fois par l'égalité (E) qui exprime une des conditions fondamentales de la question. Donc toutes les fois que l'abscisse S et partant les coordonnées T, U de (O) reçoivent des valeurs déterminées en vertu des équations (S) et de celles (P, P'), les équations (D, E) donneront lieu à une équation de condition qui résulte de l'élimination de QO d'entr'elles, et qui aura la forme:

$$M^2(S^2+T^2+U^2-D^2)\left[(\alpha D+S_2)^2+\left(\alpha' D+\frac{a+\mu S_2}{\lambda}\right)^2+\left(\alpha'' D+\frac{b+\eta S_2}{\lambda}\right)^2\right]$$
$$= (A\alpha^2 + B\alpha'^2 + C''\alpha^2)^2 \ldots . \quad (V.)$$

S_2 y représente pour abréger sa valeur $-(a\mu+b\eta)$ donnée plus haut. Mais dans tous les cas où les équations (S), au lieu de donner pour S une valeur seulement commune, laissent cette quantité indéterminée, et qu'il en est par conséquent de même des quantités T, U qu'on ne peut déduire de (P, P') en fonction de S que dans l'hypothèse de S déjà connu, la formule (D) laissera QO également indéterminé, et cette distance QO pourra par conséquent être calculée par l'équation (E), indépendamment de toute équation de condition telle que (V) et de ses analogues. Or il est manifeste que le premier cas *peut arriver généralement* pour une valeur *commune* et *déterminée* fournie par les égalités (S), et ayant la forme de l'équation (IV); et que le second cas *doit se présenter* pour l'hypothèse de $\beta = 0$, puisque celle-ci rend les équations (S) identiques, et que par là les coordonnées S, T, U restent inconnues. Avant que de nous livrer à l'examen des diverses circonstances et de phases multiples de la question, il importe de présenter encore quelques rémarques géométriques.

Comme les coordonnées du point d'intersection II du plan P avec la ligne de F ont les valeurs

$$S_2 = -(a\mu + b\eta) \quad , \quad T_2 = \ldots . \quad , \quad U_2 = \ldots . . . .$$

et que la droite (P, P') doit passer par ce point (S_2, T_2, U_2), on doit avoir également:

$$T_2 = \frac{\beta'}{\beta}\cdot S_2 - \frac{\eta}{\beta} D \quad , \quad U_2 = \frac{\beta''}{\beta}\cdot S_2 + \frac{\mu}{\beta}\cdot D.$$

Or en subsistituant dans celles-ci les valeurs de S_2, T_2, U_2 données ci-dessus, on ne saurait obtenir de nouvelles équations de condition entre les constantes et les inconnues de la question; c'est ce que l'on peut vérifier ainsi. Cette substitution donnera:

$$a(1-\mu^2)\beta - b\mu\eta\beta + D\lambda\eta + \beta'\lambda(a\mu + b\eta) = 0\,,$$
$$b(1-\eta^2)\beta - a\mu\eta\beta - D\mu\lambda + \beta''\lambda(a\mu + b\eta = 0\,:$$

équations qui peuvent être présentées sous cette autre forme:

$$a\beta + (a\mu + b\eta)(\lambda\beta' - \mu\beta) + D.\lambda.\eta \;= 0\,,$$
$$b\beta + (a\mu + b\eta)(\lambda\beta'' - \beta.\eta) - D.\lambda.\mu = 0\,.$$

Mais eu égard aux équations de condition déjà établies antérieurement, on trouve aisément:

$$\alpha = \mu\beta'' - \eta\beta', \quad \alpha' = \eta\beta - \lambda\beta'', \quad \alpha'' = \lambda\beta' - \mu\beta\,,$$

et les relations précédentes deviennent par là:

$$\left.\begin{aligned} a\beta + (a\mu + b\eta)\alpha'' + D.\lambda.\eta = 0 \\ b\beta - (a\mu + b\eta)\alpha' - D.\lambda.\mu = 0, \end{aligned}\right\}$$

d'où résulte:

$$(a\alpha' + b\alpha'')\beta + D.\lambda(\alpha'\eta - \alpha''\mu) = 0,$$

et en vertu de la valeur de β:

$$(\varepsilon.) \qquad a\alpha' + b\alpha'' + D\lambda = 0\,.$$

On en déduit encore:

$$(a\mu + b\eta)\beta + (a\mu + b\eta)(\alpha''\mu - \alpha'\eta) = 0$$

et comme on n'a pas généralement $a\mu + b\eta = 0$, il restera:

$$\beta + \alpha''\mu - \alpha'\eta = 0\,;$$

ce qui donne pour β la valeur même, déjà obtenue par une autre voie. De plus, comme l'équation (ε) est identique à la deuxième équation (A), il s'ensuit que les résultats précédents ne renferment rien qui ne soit déjà compris dans les formules établies d'abord.

7.

Essayons d'abord de raisonner dans l'hypothèse que la condition (B) subsiste, et de l'égalité à zéro du facteur $\mu\alpha' H + \alpha\lambda E$; on fera en conséquence:

$$\mu\alpha' H + \alpha\lambda E = 0 \ldots \text{(C)}.$$

Dans ce cas l'abscisse s aura une valeur généralement déterminée, fournie par l'égalité (IV), et la distance QO peut par conséquent être calculée de deux manières, savoir par la formule (D), et par celle (E). Voyons ce qui résulte de là. En faisant encore pour abréger:

$$\frac{E}{H} \quad \text{ou} \quad \frac{C-A}{C-B} = \varepsilon, \qquad \varepsilon(a\eta - b\mu) + b\mu = k,$$

$$\mu^2\eta^2 + \lambda^2\eta^2\varepsilon^2 + \lambda^2\mu^2(1-\varepsilon)^2 = \varepsilon'^2,$$

et combinant ensuite l'équation (C) avec la première (A) et avec celle $\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2 = 1$, on obtient:

$$\alpha = \mu\eta : \varepsilon'; \qquad \alpha' = -\lambda\eta\varepsilon : \varepsilon'; \qquad \alpha'' = \lambda\mu(\varepsilon - 1) : \varepsilon';$$

la seconde équation (A) donne ensuite:

$$D = k : \varepsilon'$$

et les valeurs de β, β', β'' en (α, α', α'', λ, μ, η, §. **4**) deviennent:

$$\beta = \frac{\lambda}{\varepsilon'}(\mu^2 - \varepsilon\mu^2 - \varepsilon\eta^2), \quad \beta' = \frac{\mu}{\varepsilon'}(\varepsilon\lambda^2 - \lambda^2 - \eta^2), \quad \beta'' = \frac{\eta}{\varepsilon'}(\mu^2 + \varepsilon\lambda^2).$$

Les valeurs de S, T, U pourraient être calculées à l'aide de l'équation (IV) et de celles de la droite (P, P'); mais il suffit d'obtenir $S^2 + T^2 + U^3 - D^2$; on déduira de (P, P'):

$$(T^2 + U^2)\beta^2 = (\beta'^2 + \beta''^2)S^2 - 2D.S(\beta'\eta - \beta''\mu) + D^2(\eta^2 + \mu^2),$$

d'où: $(S^2 + T^2 + U^2)\beta^2 = S^2 + (\eta^2 + \mu^2)D^2 - 2(\beta'\eta - \beta''\mu).D.S$,

ainsi, comme $\beta'\eta - \beta''\mu = -\alpha$, on en conclut:

$$(S^2 + T^2 + U^2 - D^2)\mu^2\beta^2D^2$$
$$= \alpha^2(\alpha''\beta E + \mu D^2)(\alpha''\beta E - \mu D) + (\eta^2 + \mu^2 - \beta^2)\mu . D^4$$
$$= \alpha^2\alpha'^2\beta^2E^2 - \alpha^2\mu^2D^4 + (\eta^2 + \mu^2 - \beta^2)\mu^2D^4.$$

D'ailleurs en vertu de l'égalité (6, §. 4) on a évidemment;

$$-\alpha^2\mu^2D^4+(\eta^2+\mu^2-\beta^2\mu^2D^4=(\eta^2+\mu^2-\beta^2-\alpha^2)\mu^2D^4$$

$$=(1-\lambda^2-\beta^2-\alpha^2)\mu^2D^4=0\,,$$

partant:

$$QO^2=S^2+T^2+U^2-D^2=\frac{\alpha^2\alpha''^2\beta^2E^2}{\mu^2\beta^2D^2}=\frac{\alpha^2\alpha''^2E^2}{\mu^2D^2}\;;$$

et par la comparaison de cette valeur de QO^2 avec celle de l'équation (E §. 6) on obtient, eu égard à la valeur de $Q\Pi^2$, l'équation de condition suivante:

(V.) $$M^2\alpha^2\alpha''^2E^2.[a^2+b^2-\lambda^2D^2-(a\mu+b\eta)^2]=\lambda^2\mu^2D^2(A\alpha^2+B\alpha'^2+C\alpha''^2)^2$$

laquelle peut-être considérée comme subsistant entre les données immédiates λ, μ, η, a, b, A, B, C, M de la question; car la substitution des quantités $\alpha, \alpha', \alpha''$, D en fonction de ces données est manifeste; mais elle est en même temps superflue; puisque la condition (5), sous la forme précédente, montre par elle-même dans quels cas particuliers elle devient identique seulement. Nous voyons par exemple que cela arrive premièrement pour $\lambda=0$, ce qui donne aussi $\alpha''=0$; deuxiémement pour $\mu=0$, ce qui donne aussi $\alpha=0$; troisièmement pour $\eta=0$, $b=0$ à la fois, ce qui donne aussi $\alpha=0$, $\alpha'=0$, $k=\varepsilon\eta a=0$, ou $D=0$; de sorte que par là les deux membres de (V) deviennent nuls à la fois.

Tout ce qui ressort clairement de là, c'est que l'égalité à zéro du premier facteur de l'équation (B) peut en effet donner une solution de la question pour les cas spéciaux où la force de percussion agit sur le solide suivant une droite dont la condition satisferait à l'une des conditions *un, deux,* qu'on vient d'indiquer, ou dont la direction et la position rempliraient les conditions $\eta=0$, $b=0$; En général, on voit que ce même facteur de (B) peut du moins fournir une solution de la question, toutes les fois que la force de percussion agira sur le solide suivant une droite dont la direction et la position satisferaient par les quantités (λ, μ, η, a, b) à la condition (V), de sorte que ces quantités ne seraient plus des données arbitraires. La seule conclusion exacte que l'on peut tirer de là, avant que d'avoir éprouvé à l'avance l'égalité à zéro des autres facteurs du premier membre de (B), consistera selon nous, à admettre que, s'il existe une solution de la question pour le cas général où la ligne d'action de la force F ne satisfait pas à la condition (V), cette solution ne saurait être fournie par la supposition

$\mu\alpha' H + a\lambda E = 0$, partant que cette égalité à zéro du premier facteur de (B) doit être rejetée comme un moyen d'investigation de la solution la plus générale de la question, si toutefois cette solution est possible; et néanmoins cette hypothèse ne devra pas être rejetée d'une manière absolue. Pour justifier et éclairir cette manière de voir aux yeux du lecteur, expliquons nous par quelques exemples.

Exemple I. Considérons le cas particulier où la force de percussion agit dans le plan d'inertie central $y'Ix'$; ce qui suppose à la fois $b = 0$, $\eta = 0$, et donne $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 1$, $D = 0$, $S_2 = -a\mu$, $T_2 = \frac{a}{\lambda} + \frac{a\mu^2}{\lambda}$, $U_2 = 0$, $S_1 = 0$, $T_1 = 0$, $U_1 = -D = 0$, $\beta = -\mu$, $\beta' = \lambda$, $\beta'' = 0$. La condition (V) sera remplie identiquement, et il en est de même des équations (S); la valeur commune de S reste donc indéterminée, comme cela doit être; ce qui prouve aussi l'équation (IV) qui donne: $S = 0 - \frac{0}{\bar{0}} = \frac{0}{\bar{0}}$, $T = \frac{0}{\bar{0}}$, $U = -\frac{D\mu}{\beta} = 0$; ainsi le point ($O$) doit se trouver dans le plan d'inertie central $y'x'$ où il occupe une position qui est seulement indéterminée pour autant que l'axe normal OX qui y repond est permanent; mais comme ce point (O) censé fixe dans le solide, doit éprouver une percussion nulle, lors du choc, on devra calculer sa position par la formule $QO = \frac{C\alpha''^2}{M.Q\Pi}$; or ici l'on a $Q\Pi = a$, d'où $QO = C:Ma$, et nous retrouvons ainsi précisement la solution particulière qui était évidente à l'avance d'aprés les considérations du (§. 2.)

Exemple II. Supposons en second lieu que la force de percussion agisse suivant une direction seulement parallèle au plan d'inertie central $y'Ix'$, ce qui est exprimé par la condition unique $\eta = 0$. De là résulte:

$\alpha = 0$, $\alpha' = 0$, $\alpha'' = -1$, $\beta = \mu$, $\beta' = -\lambda$, $\beta'' = 0$:

$k = \mu(1-\varepsilon)b$, $D = \frac{b}{\lambda}$, $S_1 = 0$, $T_1 = 0$, $U_1 = \frac{b}{\lambda}$:

$S_2 = -a\mu$, $T_2 = a\lambda$, $U_2 = \frac{b}{\lambda}$, $S = 0$, $T = 0$, $U = \frac{b}{\lambda}$, $Q\Pi = a$:

$QO^2 = S^2 + T^2 + U^2 - D^2 = \frac{b^2}{\lambda^2} - \frac{b^2}{\lambda^2} = 0$, d'où $QO = 0$;

et comme on doit avoir aussi $QO = C:M.Q\Pi = C:M.a$, il s'ensuit que les deux valeurs de QO ainsi calculées, sont incompatibles, tant que la distance $Q\Pi = a$ aura une valeur finie. Ainsi dans le cas actuel la question parait im-

possible. Mais comme il sera démontré plus bas que pour le cas de $\eta = 0$ il existe néanmoins une solution fort simple de la question, il devient évident que l'égalité à zéro du facteur $\mu\alpha' H + \alpha\lambda E$ est en général inadmissible; en outre elle donne lieu dans le cas particulier actuel même, à une contradiction patente qui porte à la rejeter indépendamment de ce qui doit se produire plus loin. En effet, supposons que la percussion agisse parallèlement au plan d'inertie central $z'Ix'$, ce qui donne $\mu = 0$; et la condition (V) se trouve satisfaite. Pour le cas analogue de $\lambda = 0$, on y satisferait encore. Nous serions ainsi conduit à conclure que quand la force de percussion agit parallèlement à l'un des deux plans d'inertie $z'x'$, $z'y'$, il y ait une solution, tandis qu'il n'y en aurait point quand une fois elle agirait parallèlement au plan $y'x'$: or un tel résultat est contradictoire et absurde en tout point, puisque l'axe Ix' est dans nos notations l'un quelconque des trois axes d'inertie, de sorte que pour chaque plan d'inertie la question deviendrait tour-à-tour possible et impossible par suite d'un simple changement de notations. Notre manière d'envisager l'égalité à zéro du premièr facteur de l'équation (B) se trouvant ainsi justifiée suffisamment par quelques exemples, il s'agit d'examiner les hypothèses $\alpha'' = 0$, $\beta = 0$, successivement.

8.

Examen de l'hypothèse $\alpha'' = 0$.

Je dis que cette hypothèse doit être absolument exclûe de la discussion. Il est bien vrai que quand elle subsiste, les deux équations (S) s'accordent à donner pour l'abscisse S une même valeur $S = -\alpha D$; mais alors aussi l'équation (III', §. I.) n'est plus une conséquence identique des deux autres (I', II'), et elle devient de son côté:

$$\frac{B-A}{M}\alpha\alpha' + (S^2 - T^2)\alpha\alpha' + S.T(\alpha'^2 - \alpha^2) = 0 ,$$

et par la substitution de la valeur de T en fonction de S:

$$\frac{B-A}{M}\alpha\alpha'\beta^2 + \alpha\alpha'\beta^2.S^2 - \alpha\alpha'(\beta' S - \eta.D)^2 + (\alpha'^2 - \alpha^2)\beta\beta'.S^2 - (\alpha'^2 - \alpha^2)\eta\beta.D.S = 0 .$$

Avec un peu d'attention on reconnaîtra aisément que dans celle-ci le terme en S^2 est encore nul et qu'elle se réduit à la forme

$$\frac{B-A}{M}\alpha\alpha'\beta^2 - \alpha\alpha'\eta^2.D^2 + \alpha.\eta.D(\alpha'\beta' + \alpha\beta).S + \eta.\alpha'.D(\alpha\beta' - \alpha'\beta).S = 0,$$

ou bien, à cause de $\alpha\beta + \alpha'\beta' = 0$ (puisque $\alpha'' = 0$ par hypothèse) et de $\alpha\beta' - \alpha'\beta = -\eta$, à cette forme plus simple encore:

$$\left[\left(\frac{B-A}{M}\cdot\beta^2 - \eta^2.D^2\right)\alpha - \eta^2.D.S\right].\alpha' = 0\,,$$

et comme on ne saurait prendre $\alpha' = 0$, puisqu'en vertu de $\alpha'' = 0$ ce serait détruire toute la généralité de la question, il faut que l'on fasse

$$-\eta^2.D.S - \alpha\eta^2.D^2 + \frac{B-A}{M}\beta^2.\alpha = 0 \ldots . (S'),$$

partant $$S = -\alpha.D + \frac{B-A}{M}\cdot\frac{\alpha.\beta^2}{\eta^2.D},$$

et pour que cette nouvelle valeur de S s'accorde au moins avec celle des deux équations (S), ce qui ne donnerait pas encore pour cela une solution, il faut que l'on ait:

$$(B-A).\alpha.\beta^2 = 0.$$

De plus, le cas de $\beta = 0$ devant être reservé pour la discussion ultérieure, il faut l'exclure pour le moment, et poser simplement:

$$(B-A).\alpha = 0 \ldots (S''):$$

équation de condition généralement impossible; car pour les solides mêmes de seconde espèce on peut faire tomber l'axe du moment inégal suivant la ligne Ix', ce qui donne $B = C$, et $A >$ ou $< B$. D'ailleurs on ne saurait faire non plus $\alpha = 0$, puisque ce serait encore une fois détruire la généralité de la question, et la faire rentrer dans un cas tout particulier. Toutefois celui-ci ne doit pas être négligé, s'il admet une solution. Soit donc à la fois $\alpha'' = 0$, $\alpha = 0$, partant $\alpha' = 1$, $\mu = 0$, $\beta = \eta$, $\beta' = -\lambda$, $D = -\frac{a}{\lambda}$, $S = 0$, $T = \frac{a}{\lambda}$, $U = 0$, $S_1 = 0$, $T_1 = \frac{a}{\lambda}$, $U_1 = 0$, $QII^2 = \frac{b^2 - b^2.\eta^2}{\lambda^2} = b^2$, et $QII = \pm b$.

Mais on aurait d'un autre côté $QO^2 = \frac{a^2}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2} = 0$, et $QO = 0$, partant $QII = \infty$; ce qui est incompatible. D'ailleurs, en supposant même $b = \infty$, pour reproduire l'accord entre ces deux valeurs de QII, on retombe toujours sur une impossibilité mécanique de la question, puisqu'on ne saurait faire agir une force sur un solide à une distance infinie.

La supposition de $\alpha' = 0$, jointe à celle $\alpha'' = 0$, conduirait à un résultat analogue, de sorte qu'il est superflu de s'y arrêter, d'autant plus qu'elle n'est au fond que la combinaison d'hypothèses $\alpha = 0$, $\alpha'' = 0$.

Comme les équations (S) deviennent identiques pour $\alpha'' = 0$, et dans la supposition de $D = 0$, on pourrait croire peut-être qu'il y ait une solution dans ce cas. Mais $D = 0$ reduit l'équation (S') toujours à la condition inadmissible (S''); Gardons-nous néanmoins de conclure de là qu'il n'y ait absolument pas de solution pour de tels cas particuliers. Il s'ensuit seulement de ce qui précède, que s'il y en a une, soit dans le cas général, soit pour le cas de $\alpha'' = 0$, $\alpha = 0$, elle ne saurait être fournie par l'hypothèse $\alpha'' = 0$, prise comme point de départ, et que celle-ci doit être rejetée comme moyen de recherche dans la question proposée.

9.

Examen de l'hypothèse de $\beta = 0$.

Dans ce cas on trouve, eu égard aux valeurs de

$$\beta = \alpha'\eta - \alpha''\mu \quad , \quad \beta' = \alpha''\lambda - \alpha\eta \quad , \quad \beta'' = \alpha\mu - \alpha'\lambda,$$

les résultats suivants: $\alpha'' = \alpha'\eta : \mu$, et par la première équation (A):

$\alpha' = -\alpha.\lambda.\mu : (\eta^2 + \mu^2)$, $\alpha'' = -\alpha.\lambda.\eta : (\eta^2 + \mu^2)$. Or $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$,

d'où:

$$\alpha = V(\eta^2 + \mu^2) \quad , \quad \alpha' = -\lambda\mu : V(\eta^2 + \mu^2) \quad , \quad \alpha'' = -\lambda.\eta : V(\eta^2 + \mu^2) \ldots (\alpha)$$

La deuxième équation (A) donne ensuite par ces valeurs:

$$D = (a\mu + b\eta) : V(\eta^2 + \mu^2) \quad , \quad \text{et } \alpha D = a\mu + b\eta.$$

La valeur de $QII^2.\lambda^2$ (§. 6) devient par là $a^2 + b^2 - \lambda^2 D^2 - \alpha^2 D^2$ ou $a^2 + b^2 - D^2$, car $\lambda^2 + \alpha^2 = 1$ pour $\beta = 0$ (voir. éq. 6. §. 4). De là résulte, en vertu de la valeur de D:

$$QII = \frac{a\eta - b\mu}{\lambda . V(\eta^2 + \mu^2)} \ldots (\beta.)$$

Donc, puisque l'hypothèse $\beta = 0$ rend les équations (S) identiques, et laisse par conséquent S, T, U indéterminées, il s'ensuit que la distance QO n'est point déterminée par la formule géométrique, et qu'il est par conséquent permis de la définir par la condition mécanique:

$$QO = \frac{A\alpha^2 + B\alpha'^2 + C\alpha''^2}{M.Q\Pi} ,$$

indépendamment de toute équation de condition entre les données fondamentales de la question. En γ portant les valeurs de α, α', α'', $Q\Pi$ données ci-dessus, on obtient pour la distance QO:

$$QO = \frac{A(\eta^2+\mu^2)^2 + \lambda^2(B\mu^2 + C\eta^2)}{M(a\eta - b\mu).V(\eta^2+\mu^2)} .\lambda \ldots (\gamma) ,$$

et pour les coëfficients de direction β, β', β'' relatifs à la droite (P, P') ou ΠQO, les valeurs:

$$\beta = 0, \quad \beta' = -\eta : V(\eta^2+\mu^2), \quad \beta'' = +\mu : V(\eta^2+\mu^2) \ldots (\delta)$$

Le pied $Q = (S_1 T_1 U_1)$ de la perpendiculaire IQ sera déterminé par:

$$S_1 = -\alpha D = -(a\mu + b\eta), \quad T_1 = \frac{\lambda\mu(a\mu+b\eta)}{\eta^2+\mu^2}, \quad U_1 = \frac{\lambda\eta(a\mu+b\eta)}{\eta^2+\mu^2} .$$

On connaît d'ailleurs la position du point $\Pi = (S_2 T_2 U_2)$, soit comme donnée immédiatement, soit par le calcul de ses coordonnées $S_2 = -(a\mu+b\eta)$, $T_2 = \ldots$, $U_2 = \ldots$. (§. 6); on a donc ainsi la droite ΠQ en position et en direction; et cette droite étant connûe, on n'a plus qu'à prendre sur son prolongement, à partir d'un point connu Q, une distance QO, donnée par la formule géometrico-mécanique . . . (γ), pour obtenir le point cherché (O), et à élever en ce point un axe OX normal au plan P' ou $(F, \Pi Q)$, maintenant connu de position autour de F. Mais en nous reportant à notre point de départ, nous parviendrons aisément à réaliser la solution précédente tout-entière par une construction géométrique dans les trois dimensions, et qu'il est utile de faire connaître, parcequ'elle résume l'analyse de la question.

Par le centre d'inertie I du solide conduisons un plan P perpendiculaire à la ligne d'action de la force F; par le point de rencontre Π du plan P avec cette ligne, menons un plan auxiliaire P_1, normal à l'axe d'inertie Ix'; le plan P_1 coupera le plan P suivant une droite indéfinie $\Pi\delta$ qui parsuite de cette construction est à la fois normale à la ligne de F et à l'axe Ix': mais la ligne d'intersection (β, β', β'') de P' avec P doit être aussi à la fois normale à F et à l'axe Ix', en vertu de $\beta = 0$; donc les deux droites $\Pi\delta$ et (P, P') ou ΠQ, ayant d'ailleurs un point de départ commun Π, doivent coïncider ensemble; et le plan en Π, formé par les deux droites F et $\Pi\delta$, est précisement le plan P' qui se trouve ainsi construit.

Si l'on abaisse ensuite du centre I sur le plan P' une perpendiculaire ou, ce qui revient au même, puisque les deux plans (P, P') sont rectangulaires, si du centre I et dans le plan P on abaisse sur $\Pi\delta$ une perpendiculaire IQ, on aura construit par là sur $\Pi\delta$ le point Q et la distance ΠQ dont la valeur analytique est donnée par la formule (β). La connaissance des trois moments d'inertie principaux A, B, C du solide permettra enfin de mesurer sur ΠQ, à partir du pied Q et en sens contraire de $Q\Pi$, une distance QO fournie par la formule (γ); ce qui donne finalement le point (O); et la ligne OX normale en ce point au plan $(F\Pi\delta)$, ou parallèle à la droite IQ, sera à la fois pour le point (O) du solide *un axe permanent*, et pour la force de percussion F *un axe spontané de rotation.* À l'instant du choc le point (O), étant rendu fixe, n'éprouvera aucune secousse, aucune trépidation, pendant que la force ébranlera le solide autour de l'axe OX à la fois permanent et spontané de rotation; car la résultante effective de l'action et des réactions d'inertie tangentielles, transmise en ce point, aura une valeur absolument nulle. Néanmoins il est nécessaire que le point (O) conserve sa fixité mécanique après le choc, afin de pouvoir détruire la résultante effective des réactions d'inertie normales qui naissent du mouvement de rotation produit, et qui se font seulement l'équilibre de rotation sur l'axe OX, puisque celui-ci est *permanent.* Il est tout aussi nécessaire que le point (O), déterminé par les recherches précédentes, soit censé fixe pendant l'instant dt ou $\Delta.t$ du choc même, quoiqu'il n'éprouve aucun choc; la supposition contraire rendrait le corps solide parfaitement libre et nous ferait rentrer dans la question générale traitée au (§. 9) de notre mémoire de 1848. (Voir. le tome 43 de ce journal.)

Rémarque I. Le point (O) étant obtenu de la manière indiquée plus haut, il est évidemment superflu d'en calculer les coordonnées S, T, U; néanmoins comme ce calcul pourra nous servir plus tard, il doit être indiqué dès-à-présent. Or les deux premières équations (P, P') nous donnent chacune par $\beta = 0$:

$$S = -D.\sqrt{(\eta^2+\mu^2)};$$

la troisième fait connaître U en T, savoir $U = \frac{D\lambda\sqrt{(\eta^2+\mu^2)} - T.\mu}{\eta}$. En substituant ces valeurs de S et de U dans la formule $S^2 + T^2 + U^2 = D^2 + QO^2$, et resolvant par rapport a T, on obtient:

$$T = \frac{D\lambda\mu \pm QO.\eta}{\sqrt{(\eta^2+\mu^2)}} \quad , \quad U = \frac{D\lambda\eta \mp QO.\mu}{\sqrt{(\eta^2+\mu^2)}}$$

et en substituant ici pour D et $\pm QO$ leurs valeurs exposées ci-dessus, on obtient d'abord pour S, $S = S_1 = S_2 = -(a\mu + b\eta)$; comme cela doit être, et il vient pour les deux autres coordonnées T, U:

$$T = \frac{\lambda}{\eta^2+\mu^2}\left[\mu(a\mu+b\eta) + \eta\cdot\frac{A(\eta^2+\mu^2)^2+\lambda^2(B\mu^2+C.\eta^2)}{M(a\eta-b\mu)}\right]$$

$$U = \frac{\lambda}{\eta^2+\mu^2}\left[\eta(a\mu+b\eta) - \mu\cdot\frac{A(\eta^2+\mu^2)^2+\lambda^2(B\mu^2+C.\eta^2)}{M(a\eta-b\mu)}\right].$$

Rémarque II. On peut faire aussi rémarquer que de toutes les quantités obtenues par la construction faite plus haut, la seule distance QO change de valeur, sans se déplacer autour du point II, quand on passe d'un solide à un autre de même centre, ayant ses axes d'inertie dirigés suivant ceux du premier.

Rémarquer III. Le facteur $\mu\alpha'.H + \alpha\lambda.E$ de l'équation (B) devient par l'effet de la substitution des valeurs de α, α' fournies par la solution actuelle:

$$\frac{\lambda}{V(\eta^2+\mu^2)}\cdot\left(\frac{C-A}{M}\cdot\eta^2+\frac{B-A}{M}\cdot\mu^2\right),$$

et l'on voit qu'il a une valeur finie qui ne saurait être nulle en général; de sorte que par son égalité à zéro il ne saurait non plus donner la solution qui résulte de $\beta = 0$; c'est ce qu'on peut en effet vérifier par la comparaison des valeurs des inconnues que fournissent les égalités (α, β, γ) avec les valeurs des mêmes inconnues qui ont été trouvées au (§. 7), et par la supposition de $\mu\alpha'.H + \alpha\lambda.E = 0$. Or la solution déduite de $\beta=0$, doit subsister pour tous les cas, et avoir par conséquent encore lieu, quand les données $(\lambda, \mu, \eta, a, b, A)$ satisfont à l'équation de condition (V). Mais l'hypothèse du (§. 7) fournit une solution différente de celle-là; il paraît donc résulter de là qu'il puisse y avoir deux ou plusieurs solutions à la fois pour le cas particulier où le mode de percussion satisfait à la condition (V) du (§. 7); mais pour le moment il nous faut laisser la question indécise.

Rémarque IV. Comme la droite $II\delta$ est définie par la condition d'être à la fois dans les plan P normal à F, et dans un plan mené par II, perpendiculaire à l'axe Ix', il sensuit qu'elle est orthogonale à F et à Ix' en même temps, et qu'on peut la construire aussi idéalement, en menant par le point II une droite IIx'' parallèle à Ix', ce qui détermine un plan (F, IIx'') auquel il suffisa d'elever en II une perpendiculaire $II\delta$ pour avoir la droite demandée.

10.

Examen de divers cas particuliers et des difficultés qu'ils offrent.

Dès qu'on veut appliquer l'analyse précédente à de certains cas particuliers, on tombe sur des difficultés imprevûes qu'il importe de mettre en évidence et de lever graduellement.

I. La force de percussion agit sur le solide suivant une droite centrale; c'est ce qui donne:

$$a = 0 \quad , \quad b = 0 \quad , \quad QП = 0 \quad , \quad QO = \infty .$$

Ainsi l'axe spontané et permanent passe à l'infini; ce qui était évident à l'avance, puisqu'alors il n'y a qu'un mouvement de transport rectiligne imprimé au solide. Mais cela revient toujours à dire que dans ce cas la question est impossible, puisqu'on ne saurait trouver aucun point à l'infini, à rendre fixe dans le solide.

II. La force de percussion agit dans un plan d'inertie central; dans le plan $x'Iy'$ par exemple, ce qui est exprimé par les conditions

$$\eta = 0 \quad , \quad b = 0, \text{ (voir les équat. F. §. 4.).}$$

Dans ce cas l'analyse du (§.9) paraît annoncer une impossibilité; car elle donne: $\alpha'' = 0$, $QII = 0$, $QO = \infty$; et cependant par la question directe il est clair qu'il doit y avoir une solution évidente à l'avance.

Pour échapper à cette contradiction apparente, il suffira de saisir la signification véritable de l'égalité $\beta = 0$. Elle énonce évidemment que pour toute solution possible la droite (P, P') doit croiser à angle droit l'un ou l'autre des trois axes d'inertie. Puisque donc il y a présentement incompatibilité à admettre que ce soit l'axe Ix', et même Iy' (car $\beta' = 0$ rendrait aussi la détermination de α'' en α illusoire, à moins que de prendre encore $\alpha'' = 0$), il faut adopter le cas de $\beta'' = 0$, ce qui donne $\alpha' = \alpha\frac{\mu}{\lambda}$, et par la première (A), $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$; la deuxième (A) donne par là $D = 0$; la valeur générale de QII devient ainsi $QII = a$, $S, = 0$, $T, = 0$, $U, = 0$; donc le point Q coïncide ici avec le centre, et $III = a$; les quantités S, T, U restent indéterminées. Donc on peut et l'on doit calculer QO par la formule:

$$QO = \frac{A\alpha^2 + B\alpha'^2 + CA''^2}{M.QII} = \frac{C}{M.III} = \frac{C}{M.a};$$

ce qui reproduit bien textuellement la solution connue pour un cas particulier de la théorie directe.

La même difficulté se présente dans l'hypothèse de $a = 0$, $\mu = 0$, et se leverait de la même manière.

Quant à l'hypothèse de $a\eta - b\mu = 0$, et $\lambda = 0$, on l'examinera plus bas.

III. La force de percussion, dirigée d'ailleurs d'une façon quelconque, coupe par sa ligne d'action l'un des trois axes d'inertie du corps.

Supposons d'abord qu'elle coupe l'axe Iy', ce qui donne $b = 0$ (voir. F) et $QII = \frac{a.\eta}{\lambda.\sqrt{(\eta^2+\mu^2)}}$, $QO =$ etc. (voir α, β, γ... §. 9.)

Pour exprimer qu'elle coupe l'axe Iz', on ferait $a = 0$, b conservant une valeur finie, et la solution en quantités finies déduite des formules (α, γ, δ) se maintient dans chacun de ces cas, sans donner lieu à aucune difficulté. Mais on voit en même temps par là que quand la force de percussion coupe par sa ligne d'action l'un des axes d'inertie, la droite (P, P') ne saurait croiser à angles droits que l'un des deux axes restants; et que jamais elle ne saurait être orthogonale avec l'axe d'inertie même que rencontre la ligne d'action de la force; c'est pour cette raison que l'on trouve par le (§. 9), en admettant que F coupe l'axe Ix' même, ce qui donne $a\eta - b\mu = 0$, les valeurs $QII = 0$, et $QO = \infty$; qui loin d'annoncer une impossibilité absolue, expriment l'incompatibilité des conditions ou hypothèses combinées: $\beta = 0$, $a\eta - b\mu = 0$.

Pour mieux éprouver la validité de nos raisonnements, et de notre explication de cette *difficulté considérable* qui nous a si longtemps arrêté, mettons formellement les conditions que la ligne de F coupe l'axe Ix', et que la droite (P, P') croise l'axe Iy' à angles droits. Il faut donc en vertu de ces raisonnements qu'il y ait alors une solution. Or les conditions prescrites étant exprimées par les équations

$$a\eta - b\mu = 0 \quad , \quad \beta' = 0 \quad , \quad \text{ou } b = \frac{a.\eta}{\mu}\ \beta' = 0,$$

on obtient d'abord par la substitution de ces valeurs dans les formules (A):

$$\alpha = \lambda\mu : \sqrt{(\eta^2+\lambda^2)} \quad , \quad \alpha' = -\sqrt{(\eta^2+\lambda^2)} \quad , \quad \alpha'' = \mu.\eta : \sqrt{(\eta^2+\lambda^2)},$$

$$D = a(\lambda^2+2\eta^2) : \sqrt{(\eta^2+\lambda^2)} ;$$

et de là on conclut pour QII, et partant pour QO, des valeurs finies, et pour β, β'' on aura

$$\beta = -\frac{\eta}{\sqrt{(\lambda^2+\eta^2)}} \quad , \quad \beta'' = +\frac{\lambda}{\sqrt{(\lambda^2+\eta^2)}}.$$

Une solution différente existe de même pour $b = a.\frac{\eta}{\mu}$, $\beta'' = 0$, et n'exige pour être déduite, qu'un changement de notations. Ainsi pour exprimer les idées précédentes sous une autre forme, nous dirons, que quand la force de percussion coupe l'un quelconque des trois axes d'inertie, la ligne (P, P') ne saurait plus croiser à angle droit cet axe même; mais qu'elle est orthogonale avec l'un des deux axes restants; et comme l'analyse n'annonce aucune préférence de l'un sur l'autre, il faudra bien admettre encore une double solution, savoir celle où la droite (P, P') croise à angle droit le deuxième axe d'inertie restant ($\beta' = 0$), et celle où elle a cette disposition par rapport au troisième axe d'inertie restant ($\beta'' = 0$); et dès lors la troisième solution (ici $\beta = 0$) qui subsiste dans le cas général aussi bien que les deux premières, devient impossible dans le cas particulier actuel, et par rapport à l'axe d'inertie rencontré par la force de percussion.

Mais s'il en est ainsi, la solution générale obtenue au (§. 9) doit être elle même triple, quoique les valeurs des inconnues soient uniques, quant à la forme analytique; l'hypothèse $\beta = 0$ qui l'a fournie, exprime en effet que la droite (P, P') doit croiser à angle droit l'un quelconque des trois axes d'inertie du centre; car l'axe Ix' peut être dirigé successivement suivant chacun d'eux, sans que l'on cesse de reconnaître à chaque fois qu'il faut avoir $\beta = 0$; donc la construction géométrique du (§. 9), exécutée pour l'axe Ix', doit être repetée pour le second axe d'inertie Iy', et pour le troisième Iz':

Ainsi par le point Π on conduira un plan P_2 normal à l'axe Iy'; il coupera le plan P suivant une droite $\Pi\delta'$ qui marquera la seconde position de (P, P'); du centre I et dans P on abaisse une perpendiculaire IQ' sur $\Pi\delta'$, ce qui construit la distance $\Pi Q'$, et à partir de Q' on portera une longueur $Q'O'$ calculée par la formule analogue à celle (γ, §. 9); ce qui donne un second point (O') dans P, et un second axe OX'. Par le point Π on conduira un troisième plan P_3 normal à Iz'; il coupera P suivant une droite $\Pi\delta''$, ce qui donne la troisième position $\Pi\delta''$ de (P, P'), un troisième pied Q'' et un troisième point (O'') dans le plan P, et un troisième axe $O''X''$; le plan P' sera donc aussi l'un quelconque des trois plans $(F, \Pi\delta).(F, \Pi\delta').(F, \Pi\delta'')$. Ces résultats signifient mécaniquement que si l'on fixe l'un quelconque des points (O, O', O'') du solide, pour l'ébranler ensuite par la force F, le point fixe n'éprouve aucune secousse à l'instant du choc: que le corps sera ébranlé autour de l'axe correspondant (OX, $O'X'$, $O''X''$): que la résultante effective des forces centrifuges sera desormais détruite par ce point fixe. Cette dernière propriété subsiste, parceque pour un

axe permanent les forces centrifuges ont une résultante passant par le point fixe pour lequel l'axe est permanent; l'ébranlement se fera autour de l'axe en question, parceque la force F agit dans un plan P' permanent du point fixe; la percussion d'action et de réaction sur ce point est nulle, parceque la force F agit normalement au plan, passant suivant l'axe et le centre d'inertie, et qu'elle est appliquée à une distance convenable ΠQ, $\Pi Q'$, $\Pi Q''$ liée à la distance QO, $Q'O'$, $Q''O''$ d'après la condition connue.

11.

Suite du §. 10.

Ces trois solutions que l'on peut n'admettre d'abord que difficilement, sont néanmoins comprises, quant à la forme même, dans l'analyse générale qui a conduit d'abord à $\beta = 0$. Pour obtenir en effet les équations (S du §. 5), et parsuite $\beta = 0$, on a substitué dans les valeurs de $f = M.S.T$, $g = M.S.U$, $h = M.T.U$ des égalités (I, II. §. 4) les quantités $T.U$ exprimées en fonction de S à l'aide de (P, P$_1$). Mais on peut tout aussi bien exprimer f, g, h en fonction de T; à cet effet on déduit des deux premières èquations (P, P') cette autre:

$$(U.\beta' - T.\beta'').\beta - D(\mu\beta' + \eta\beta'') = 0\,,$$

$$\text{ou } (U.\beta' - T.\beta'' + D.\lambda).\beta = 0\,.$$

Ainsi en admettant que le facteur β ne soit pas nul, on tire de celle-ci et de la première (P, P') les valeurs

$$U = (T.\beta'' - D.\lambda) : \beta' \quad ; \quad S = (T.\beta + D.\eta) : \beta'\,.$$

En effectuant maintenant les substitutions dans f, g, h, en valeur de T, on trouvera que l'équation (II, §. 4) se ramène à la forme suivante:

$$\vartheta''.T^2 + \vartheta'.D.T + \vartheta.D^2 + \alpha\alpha''.\beta'^2.E = 0,$$

dans laquelle on reconnaîtra d'abord que $\vartheta'' = 0$, tandis que pour ϑ', ϑ, on trouvera les valeurs:

$$\vartheta' = 2\alpha\alpha''(\beta\eta + \beta''\lambda) + \alpha'\alpha''\beta'\eta + (\alpha''^2 - \alpha^2).(\beta''\eta - \beta\lambda) + \alpha\alpha'\beta'.\lambda$$

$$= \alpha''\eta(\alpha''\beta'' + \alpha\beta) + \alpha\alpha''\beta\eta - \alpha^2\beta''\eta + \lambda\alpha(\alpha\beta + \alpha''\beta'') + \alpha\alpha''\beta''\lambda - \alpha''^2\beta\lambda$$

$$+ \alpha'\beta'(\alpha''\eta + \alpha\lambda) = (\alpha''\eta + \lambda\alpha).(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'') + \alpha''\beta(\alpha\eta - \alpha''\lambda)$$

$$+ \alpha\beta''(\alpha''\lambda - \alpha\eta) = (\alpha''\lambda - \alpha\eta).(\alpha\beta'' - \alpha''\beta) = \beta'\mu\,.$$

$$\vartheta = (\eta^2 - \lambda^2)\,\alpha\alpha'' - \lambda\eta(\alpha''^2 - \alpha^2) = \alpha''\eta(\alpha\eta - \alpha''\lambda) - \alpha\lambda(\alpha''\lambda - \alpha\eta)$$
$$= (\alpha''\eta + \alpha\lambda).(\alpha\eta - \alpha''\lambda = -\mu\alpha' \times (-\beta') = +\mu\alpha'\beta',$$

et la première équation (*S*) se trouve remplacée par celle-ci:

$$(\mathbf{T.}) \qquad (\mu.D.T + \alpha\alpha''\beta'.E + \mu\alpha'.D^2)\,\beta' = 0\,.$$

Comme la deuxième (*S*) serait remplacée par un résultat analogue, ayant dans tous ses termes le facteur commun β', il s'ensuit que les coordonnées *S, T, U* restent indéterminées, aussi bien par l'effet de l'hypothèse $\beta' = 0$, β étant plus grand ou moindre que zéro, que par celle $\beta = 0$, β' restant un rapport fini. De même, si l'on exprimait *S, T, U* en fonction de *U*, les équations qui remplaceraient celles (*S*), deviendraient identiques par l'ypothèse $\beta'' = 0$; et comme ces trois modes de substitution sont également admissibles, et ne doivent recevoir aucune préférence l'un sur l'autre, il s'ensuit que l'hypothèse de l'égalité à zéro de chacun des facteurs β, β', β'', faite successivement, doit fournir une solution de la question. Seulement on voit, et un des cas examinés au (§. 10) le prouve, que l'une ou l'autre de ces trois solutions peut devenir impossible, tandis que les deux autres subsistent, ou que deux d'entr'elles deviennent impossibles, tandis qu'une seule se maintient (2° §. 10). Pour mieux compléter ces considérations, reprenons les équations de la droite (*P, P'*):

$$\left.\begin{aligned} T.\beta - S.\beta' + D.\eta = 0 \\ U.\beta' - T.\beta'' + D.\lambda = 0 \\ S.\beta'' - U.\beta + D.\mu = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (P, P')$$

Pour $\beta = 0$, elles donnent pour *S* que les équations (*S*) laissent alors indéterminé, la valeur $S = D\eta : \beta'$, et $S = -D\mu : \beta''$. D'abord ces deux valeurs de *S* se réduisent à une seule en vertu de la condition générale $\eta\beta'' + \mu\beta' + \lambda\beta = 0$ qui devient ici $\eta\beta'' + \mu\beta' = 0$. En outre, quoique l'abscisse *S* prenne ainsi une valeur déterminée de forme, les équations (*P, P'*) ne peuvent pas faire connaître *T, U*, précisement parceque $\beta = 0$ fait évanouir le terme en *T* dans la première, et celui en *U* dans la troisième. On conclut de là que pour $\beta = 0$ le point (*O*) est situé dans un plan normal à l'axe *Ix'*, et mené à une distance $D.\eta : \beta'$; et qu'il y occupe une position indéterminée; qu'il est par conséquent permis de calculer par la condition mécanique connue. Ce-ci est donc conforme à la construction géométrique du (§. 9). De plus, dans le cas de $\beta' = 0$, ou de $\beta'' = 0$, un raisonnement semblable a lieu.

La diversité des solutions de la question se trouvant ainsi mise en évidence, et établie sur un fondement solide, il reste à faire voir, comment elles se déduisent toutes du résultat de la substitution des quantités S, T, U en fonction de S, ou de T, ou de U. Or la première qui exprime T, U en fonction de S, et qui donne ensuite $\beta = 0$, est déjà trouvée au (§. 9). Quant à la seconde qui repond à $\beta' = 0$, et pour laquelle il faut faire subsister, non plus les équations (S), mais leurs analogues en T et en β' dont la première a été établie ci-dessus et se trouve marquée (T), il faut considérer que ces deux équations (T) deviennent identiques par l'hypothèse $\beta' = 0$. De plus on conclut de là pour les diverses inconnues: $\alpha'' = \alpha\eta : \lambda$, $\alpha' = \alpha(\lambda^2+\mu^2) : \lambda\mu$, d'où:

$$\alpha = \lambda.\mu : \sqrt{(\lambda^2+\eta^2)} \quad , \quad \alpha' = -\sqrt{(\lambda^2+\eta^2)} \quad , \quad \alpha'' = \mu.\eta : \sqrt{(\lambda^2+\mu^2)} \ldots (\alpha')$$

$$D\lambda = -[b\mu.\eta - a(\lambda^2+\eta^2)] : \sqrt{(\lambda^2+\eta^2)},$$

$$Q'\Pi^2.\lambda^2 = a^2 + b^2 - (a\mu + b\eta)^2 - \frac{[b\mu\eta - a(\lambda^2+\eta^2)]^2}{\lambda^2+\eta^2} \; ; \ldots (\beta').$$

$$Q'O' = \frac{A\alpha^2 + B\alpha'^2 + C\alpha''^2}{M.Q'\Pi} = \frac{A\lambda^2\mu^2 + B(\lambda^2+\eta^2)^2 + C.\mu^2.\eta^2}{M.Q'\Pi.(\lambda^2+\eta^2)} \ldots (\gamma').$$

$$\beta' = 0 \quad , \quad \beta = -\eta : \sqrt{(\lambda^2+\eta^2)} \quad , \quad \beta'' = +\lambda : \sqrt{(\lambda^2+\eta^2)} \ldots (\delta').$$

Enfin la substitution de S, T, U en fonction de U donnerait deux équations (U) faciles à établir, et devenant identiques par l'hypothèse $\beta'' = 0$, et les équations (S) ni (T) ne doivent plus subsister dans ce cas. De là on conclut, eu égard aux formules fondamentales:

$$(\alpha'') \qquad \beta'' = 0 : \alpha = \lambda.\eta : \sqrt{(\lambda^2+\mu^2)} \; , \; \alpha' = \mu.\eta : \sqrt{(\lambda^2+\mu^2)} \; , \; \alpha'' = -\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)},$$

$$D.\lambda = \frac{b(\lambda^2+\mu^2) - a.\mu.\eta}{\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)}},$$

$$(\beta'')\; Q''\Pi^2\lambda^2 = a^2 + b^2 - (a\mu + b\eta)^2 - \frac{[a\mu\eta - b(\lambda^2+\mu^2)]^2}{\lambda^2+\mu^2},$$

$$(\gamma'')\; Q''O'' = \frac{A\lambda^2\eta^2 + B\mu^2\eta^2 + C.(\lambda^2+\mu^2)^2}{M.Q'\Pi},$$

$$(\delta'') \qquad \beta = \mu : \sqrt{(\lambda^2+\mu^2)} \quad , \quad \beta' = -\lambda : \sqrt{(\lambda^2+\mu^2)}.$$

Mais ces résultats du calcul doivent servir principalement à montrer le moyen d'obtenir les distances QO, $Q'O'$, $Q''O''$, et par suite les trois points

(O, O', O'') sur les trois droites déjà connues par construction $\Pi\delta$, $\Pi\delta'$, $\Pi\delta''$; d'où résultent aussi les axes OX, $O'X'$, $O''X''$. On peut faire rémarquer finalement que ces droites et ces axes sont situés dans le même plan P' mené par le centre I normalement à la ligne d'action de la percussion. De plus, pour avoir une idée plus sensible de la position des droites $\Pi\delta$ dans ce plan P, concevons dans P et au point Π une droite d'abord arbitraire (d) que l'on peut faire tourner autour de Π jusqu'à ce qu'elle soit tour-à-tour à angle droit avec chacun des trois axes d'inertie Ix', Iy', Iz'; ces trois positions de (d) marqueront les lignes $\Pi\delta$, $\Pi\delta'$, $\Pi\delta''$ sur lesquelles il faut chercher les points correspondants (O, O', O'').

12.

Suite de l'examen des cas particuliers.

Le caractère multiple de la solution générale étant reconnu, nous pouvons maintenant reprendre l'examen de certains cas particuliers plus ou moins rémarquables et difficiles à la fois.

IV. La force de percussion agit normalement à l'un des trois plans d'inertie du centre, ou parallèlement à l'un des trois axes d'inertie, à l'axe Ix' par exemple.

Cette hypothèse donne $\mu = 0$, $\eta = 0$, et par les formules (A) et celles du (§. 9) on obtient: $\alpha = 0$, $\alpha' = \frac{0}{0}$, $\alpha'' = \frac{0}{0}$, $\beta = 0$, $\beta' = \frac{0}{0}$, $\beta'' = \frac{0}{0}$.

Ces résultats d'indétermination se conçoivent immediatement, si l'on considère que l'équation $\beta = \alpha'\eta - \alpha''.\mu = 0$ qui a conduit aux résultats $(\alpha, \beta, \gamma,$ §. 9) par la valeur $\alpha'' = \alpha'.\eta : \mu$, devient illusoire pour le but de l'élimination, puisque $\eta = 0$, $\mu = 0$ la rendent identique et que dès lors elle ne saurait plus servir à exprimer α'' en α'. Il faut donc rénoncer aux résultats généraux d'élimination, et revenir aux équations fondamentales. La première (A) donne maintenant $\alpha\lambda = 0$, partant $\alpha = 0$, car $\lambda = 1$; les quantités $\beta'\beta''$ deviennent:

$$\beta' = \alpha''\lambda = \alpha'' \quad , \quad \beta'' = -\alpha',$$

et comme la condition $\alpha'\eta - \alpha''.\mu = 0$ disparait comme moyen d'élimination, la seconde équation (A), en combinaison de $\alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$, ne saurait suffire pour déterminer les inconnues D, α', α''; il s'ensuit que l'on peut seulement déterminer α', α'' en fonction des données a, b et de la quantité D qui restera, du moins en deça d'une certaine limite, une donnée arbitraire dans le cas actuel. En effet, quel que soit ici le plan P', mené suivant F, la distance $-D$ de l'origine à ce

plan a évidemment pour maximum la diagonale II du rectangle construit sur les côtés a, b, pris à partir de I sur les axes Iy', Iz'. On trouve pour α', α'' les valeurs

$$\alpha' = \frac{\pm b.\sqrt{(a^2+b^2-D^2)} - a.D}{a^2+b^2} \quad , \quad \alpha'' = \frac{\mp a.\sqrt{(a^2+b^2-D^2)} - b.D}{a^2+b^2} ,$$

qui prouvent aussi qu'on peut faire varier D entre les limites 0 et $\sqrt{(a^2+b^2)} = II$; ce-ci caractérise néanmoins tous plans possibles menés suivant F. La valeur de QII devient:

$$QII^2 = a^2 + b^2 - D^2$$

et $QO = (B\alpha'^2 + C.\alpha''^2) : M.\sqrt{(a^2+b^2-D^2)}$: formule où il faut concevoir α', α'' remplacés par leurs valeurs. La solution est par conséquent possible pour tout plan P' mené suivant F à une distance de l'origine moindre que III; c'est-à-dire pour tout plan suivant F dont la trace sur $y'z'$ avec lequel coïncide ici le plan P, diffère de la perpendiculaire en II à la droite III. En tirant de I sur cette trace d'ailleurs arbitraire, une perpendiculaire IQ, et prenant, à partir de son pied Q, en sens contraire de QII, la distance QO, calculée par la dernière formule, on obtient un point (O) et un axe OX situé dans $y'z'$; et comme la direction de la trace de P' en II sur $y'z'$ est arbitraire, sauf le cas-limite, il s'ensuit que la question comporte présentement une infinité de solutions différentes. On peut faire rémarquer du reste que la solution que donnerait $\beta' = 0$, est comprise comme cas spécial dans ces résultats. En effet, en prenant $D = -a$, on obtient $\alpha' = \frac{b^2+a^2}{a^2+b^2} = 1$, et $\alpha'' = 0$; partant $\beta' = 0$, et $\beta'' = -1$. Il en est de même de celle de $\beta'' = 0$, qui repond à $D = -b$. Car en prenant les signes inférieurs, on obtient dès lors:

$$\alpha' = \frac{-ab+ab}{a^2+b^2} = 0 \quad , \quad \alpha''^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1 .$$

Ainsi toutes les fois qu'une force de percussion doit ébranler un solide suivant une direction normale à l'un des trois plans d'inertie, on peut trouver d'une infinité de manières différentes dans ce plan un centre fixe (O) et un axe spontané et permanent de rotation en ce point.

On n'aura qu'à tirer par le point II dans ce plan, des droites arbitraires et indéfinies, et repéter sur chacune la construction indiquée ci dessus; ce qui à chaque fois donne un point (O). En exprimant analytiquement cette suite de

constructions, on parvient à reconnaître que le lieu géométrique des points (O) est une *courbe du troisième degré.*

Il importe aussi de rémarquer que pour chaque point (O) ainsi obtenu, la droite $O\Pi$ est elle-même au point (O) un axe permanent du solide; car cette droite est perpendiculaire au plan formé par OX et par une parallèle en (O) à F; donc, puisque cette parallèle est normale à $y'z'$, et partant un axe permanent en (O), et que OX en est un autre, il faut que $O\Pi$ soit le troisième axe de ce genre. Ainsi le cas particulier traité ci-dessus, permet aussi de trouver de diverses manières dans un plan d'inertie central un point (O) pour lequel les trois axes permanents ont des directions déterminées et dont l'un $O\Pi$ passe invariablement par un même centre Π. Mais le lieu de ces points (O) jouit en outre de la propriété particuliére de donner en chaque point (O) qu'il comprend, un axe à la fois spontané et permanent OX, correspondant à la force qui en Π percuterait le solide suivant une direction perpendiculaire au plan d'inertie qui renferme tous ces points.

Il est évident que pour retrouver la propriété énoncée ci-dessus, en faisant agir la force parallèlement à l'axe Iy', par exemple, il ne faudra pas, en faisant $\eta = 0$, $\lambda = 0$, recourir aux formules du (§. 9) qui ne sauraient reproduire qu'une solution d'une espèce, mais qu'il faut employer celles qui sont établies pour l'hypothèse $\beta' = 0$. Toutefois on ne reproduirait ainsi que sous une forme analytique différente ce qui est suffisement connu par la propriété énoncée. La même rémarque est applicable au cas de $\lambda = 0$, $\mu = 0$, où la force agirait parallément à l'axe Iz'.

V. La force de percussion agit parallélement à l'un des trois plans d'inertie, à (x', z') ou à (x', y') par exemple.

Soit donc d'abord $\eta = 0$, ce qui la suppose parallèle à (x', y'). On déduit de là:

$$\alpha'' = 0 \quad , \quad \beta' = \alpha''\lambda - \alpha.\eta = 0 \quad , \quad \beta'' = 1 \quad ,$$
$$\alpha = \mu \quad , \quad \alpha' = -\lambda \quad , \quad D = a.$$

La première équation (A) devient identique et l'autre donne D. La seconde fournit:

$$S = -D = -a\,;$$

les quantités T, U restent indéterminées;

$$S_1 = -\mu a \quad , \quad T_1 = \lambda.a \quad , \quad U_1 = 0$$
$$S_2 = -a\mu \quad , \quad T_2 = \lambda a \quad , \quad U_2 = \frac{b}{\lambda} \quad , \quad O\Pi = \frac{b}{\lambda}.$$

Ainsi le point Q se trouve dans le plan $x'y'$ où il exprime la projection orthogonale de Π qui s'en trouve à une hauteur $\frac{b}{\lambda}$; on obtient donc le point Q en abaissant de I une perpendiculaire IQ sur la projection de F dans le plan $x'y'$, ou en abaissant de Π une perpendiculaire ΠQ sur ce plan. Si l'on prend ensuite sur ΠQ prolongée, une distance $QO = \frac{A\mu^2 + B\lambda^2}{M.b} \cdot \lambda$, on obtient le point (O); et l'axe OX, parallèle en (O) à IQ et situé dans le plan P ou ΠQI, sera l'axe demandé. On voit que dans le cas actuel le plan P' est le plan projetant F sur $x'y'$, et que la ligne (PP') croise à la fois à angles droits les deux axes Ix', Iy'. Une solution analogue subsiste quand la force de percussion agit parallèlement au plan $x'z'$. Mais dans le cas de $\eta = 0$ qu'on vient d'examiner, les deux solutions qui répondent l'une à $\beta = 0$, et l'autre à $\beta' = 0$, sont identiques entr'elles, et les deux points (O, O') ainsi que les axes $OX, O'X'$, coïncident ensemble, tandis que la solution fournie par $\beta'' = 0$ donne:

$$\beta = \mu \quad , \quad \beta' = -\lambda \quad , \quad S_{,} = 0 \quad , \quad T_{,} = 0 \quad ,$$
$$U_{,} = \frac{b}{\lambda} \quad ; \quad \alpha' = 0 \quad , \quad \alpha'' = -1 \quad , \quad \alpha = 0.$$

Le point Q'' est donc placé sur l'axe Iz' à la distance $IQ'' = \frac{b}{\lambda}$, $\Pi Q'' = QI = a$. Sur $\Pi Q'' = a$ il faudra porter une longueur $Q''O'' = C{:}M.a$, pour avoir le point (O''). En menant ensuite par (O'') une droite parallèle à l'axe Iz', on obtient l'axe $O''X''$ relatif au point fixe (O'') et à ce mode particulier de la percussion.

Si au lieu de supposer $\eta = 0$, ou $\mu = 0$, on admet que la force agisse parallèlement au plan $y'z'$, ce qui s'exprime par $\lambda = 0$, on tombe sur une difficulté de forme analytique qui n'a point lieu pour le cas $\eta = 0$ quon vient d'examiner, ni pour son analogue $\mu = 0$; néanmoins la supposition nouvelle $\lambda = 0$ rentre absolument dans le cas cinq. En effet, la droite F se projetant dès lors sur les plans $x'y'$, $x'z'$ parallèlement au plan $y'z'$, on obtient pour ces projections:

$$S = -\frac{b}{\eta} = -\frac{a}{\mu}, \text{ d'où } a\eta - b\mu = 0 \text{ et } \lambda = 0 \text{ à la fois.}$$

On conclut de là $Q\Pi = \frac{0}{0}$; et les quantités $Q\Pi, QO$ paraissent par conséquent indéterminées; ce qui serait en contradiction avec la solution de l'hypothèse $\eta = 0$; car, encore une fois: quand une propriété subsiste pour l'un des plans d'inertie, tel que $x'y'$, ou $x'z'$, il faut qu'elle ait lieu pour l'autre, puisqu'au

fond chacun de ces trois plans peut servir de plan $x'y'$. Donc l'indétermination sur laquelle on vient de tomber, ne saurait être qu'apparente, et tient à la nature et à la forme seulement de nos notations; c'est ce qui reste à vérifier.

Les équations de F donnent pour la projection de cette droite sur le plan $y'z'$:

$$\mu.U - \eta.T = \frac{b.\mu - a.\eta}{\lambda} = \frac{0}{0}.$$

Mais évidemment cette projection de direction connue (μ, η), doit se trouver en outre à une distance connue D' de lorigine I; donc $\left(\frac{b.\mu - a.\eta}{\lambda}\right)$, qui exprime cette distance en général, doit l'exprimer encore dans le cas actuel; la prétendue indéterminée $\frac{0}{0}$ a donc la valeur D', et il vient:

$$\mu.U - \eta.T = D'.$$

Les formules générales et celles du (§. 9) donneront:

$$\alpha' = 0 \ , \ \alpha'' = 0 \ , \ \alpha = 1 \ , \ \beta' = -\eta \ , \ \beta'' = +\mu .$$

Le plan P' exprimé par $S + D = 0$ est normal à l'axe Ix'; le plan P exprimé par $\mu.T + \eta.U = 0$ passe suivant l'axe Ix', de sorte que le point de rencontre de P' avec cet axe est le point Q. On trouve en effet:

$$S_{,} = -D \ , \ T_{,} = 0 \ , \ U_{,} = 0 \ ,$$

et ensuite: $S_2 = -\frac{a}{\mu}$, $T_2 = \frac{a - a\mu^2 - b\mu\eta}{\lambda} = a\lambda = 0$, $U_2 = \frac{b\lambda^2}{\lambda} = 0$,

et l'on en conclut: $D = \frac{a}{\mu} = \frac{b}{\eta}$. De plus, les deux droites F, (P, P'), étant rectangulaires et se trouvant dans un plan parallèle à celui $y'z'$, leurs projections sur ce dernier sont également perpendiculaires entr'elles; et pour avoir les coordonnées (T_2, U_2) du point de rencontre de F avec le plan P, il suffira par conséquent de chercher celles du point de rencontre de la perpendiculaire tirée de I dans le plan $y'z'$ sur la projection exprimée par $\mu.U - \eta.T = D'$; ce qui donne:

$$T_2 = D'.\beta' = -D'.\eta \ , \quad U_2 = D'.\beta'' = +D'.\mu .$$

Ainsi la règle ordinaire que nous avons suivie plus haut pour la détermination des coordonnées T_2, U_2 et laquelle nous a donné $T_2 = 0$, $U_2 = 0$, tombe en défaut dans le cas actuel, puisque ces coordonnées ont les valeurs finies $-\eta.D'$, $\mu.D'$: ces valeurs donnent directement celle de $QII = D'$ qui ré-

sulte aussi de la formule générale (β §. 9) quand on y remplace $\left(\frac{a.\eta - b.\mu}{\lambda}\right)$ par la valeur O'; on a enfin $QO = \frac{A}{M.D'}$. La construction de cette solution est donc celle-ci. Du centre I on abaissera une perpendiculaire IW à la projection de F sur $y'z'$; au pied W on élevera une normale au plan $y'z'$, ou bien une parallèle à l'axe Ix'; à partir de W on portera sur cette parallèle une longueur $-\frac{a}{m}$ ou $-\frac{b}{\eta}$; ce qui donne le point Π, pour $W\Pi = -\frac{a}{\mu} = -\frac{b}{\eta}$; du point Π on abaissera une perpendiculaire ΠQ sur Ix'; elle a évidemment une longueur D'; sur ΠQ prolongée, on prendra la distance $QO = A : M.D'$; et en (O) on menera une droite OX parallèle à IQ ou Ix'; on aura ainsi l'axe demandé, repondant au mode spécial et actuel de la force F.

Si l'on compare maintenant cette solution de $\lambda = 0$ avec celle qu'on a obtenue plus haut pour $\eta = 0$, et par rapport à l'axe Iz', on voit qu'elles offrent la même solution au fond, appliquée tour-à-tour à l'axe Iz' et Ix'.

Mais il reste à voir si pour $\lambda = 0$ les solutions déduites l'une de $\beta' = 0$, l'autre de $\beta'' = 0$, concordent encore d'une manière semblable. Soit donc d'abord $\beta' = 0$, d'où:

$$\alpha = 0 \quad , \quad \alpha' = -\eta \quad , \quad \alpha'' = +\mu \quad , \quad \beta = -1 \quad , \quad \beta'' = 0 \quad , \quad \beta' = 0.$$

Ainsi la ligne (P, P') devient au point Π une droite parallèle à l'axe Ix' et le plan P' où:

$$-\eta.T + \mu.U + D = 0$$

n'est par conséquent autre que celui qui projette F sur $y'z'$; donc son équation actuelle exprime aussi l'équation de cette projection, et les quantités D, D' sont par conséquent égales en valeur absolue. Le plan P exprimé par

$$\mu T + \eta.U = 0$$

passe encore suivant l'axé Ix', pour être normal à F; pour le point $Q = (S,T,U,)$ on obtient:

$$S, = 0 \quad , \quad T, = \eta.D \quad , \quad U, = -\mu D.$$

Il se trouve donc au pied de la perpendiculaire abaissée dans $y'z'$ du centre I sur la projection de F. Quant au point Π, on obtient d'abord par les formules générales:

$$S_2 = -\frac{a}{m} \quad , \quad T_2 = \infty - \infty \quad , \quad U_2 = \infty - \infty,$$

ce qui semble encore une fois annoncer une indétermination, puisque la différence de deux infinis est telle quantité finie qu'on veut. Mais il n'en est rien, car les équations de (P, P') donnent:

$$T = \eta . D \quad , \quad U = -\mu . D \ ,$$

et expriment que les coordonnées (T, U) des divers points de cette droite ont des valeurs constantes; donc on doit avoir aussi:

$$T_2 = \eta . D \quad , \quad U_2 = -\mu . D,$$

partant: $T_2 - T_1 = 0$, $U_2 - U_1 = 0$, $Q\Pi^2 = (S_2 - S_1)^2 = \frac{a^2}{\mu^2} = \frac{b^2}{\eta^2}$;

$$Q\Pi = \frac{a}{\mu} = \frac{b}{\eta} \quad , \quad QO = \frac{B.\eta^2 + C.\mu^2}{M.a} \cdot \mu .$$

Enfin l'hypothèse $\beta'' = 0$, prise comme point de départ, reproduirait identiquement la même solution, de sorte que la concordance se vérifie ici comme pour le cas de $\eta = 0$. Il était toutefois indispensable de soumettre l'hypothèse de $\lambda = 0$ à un examen spécial; car quoiqu'elle ne fasse connaître aucune nouvelle propriété mécanique de la question, elle présente néanmoins des difficultés qu'il fallait lever directement, et des complications analytiques qui pourraient induire en erreur à un premier apperçu.

Rémarque. Au seul point de vûe physique et mécanique, la question est seulement possible quand le point (O, O', O'') obtenu par le calcul et la construction géométrique, tombe à l'intérieur du corps solide. En effet, quand il tombe à l'extérieur, il ne suffira pas de le fixer, il faudra encore le rendre solidaire avec le solide même; ce qui ne se peut que par le moyen de pièces matérielles, altérant les valeurs primitives des moments d'inertie A, B, C, la direction des axes d'inertie, et pouvant déplacer même le centre d'inertie du solide. Neanmoins dans ce cas même la question peut être considérée comme resolue approximativement par l'analyse précédente, toutes les fois que les pièces de liaison du point fixe avec le solide ont une masse très petite comparativement à celle du corps, et que cette très faible masse relative ne se trouve pas rejetée à une distance considérable du centre d'inertie primitif.

Rémarque II. Un cas particulier assez étendu et qui mérite encore d'être signalé, est celui où le solide donné est un solide homogène de seconde classe $B = C$, et $A >$ ou $< B$, et qui serait ébranlé par une force de percussion dont la ligne d'action coupe l'axe Ix' du moment inégal. On sait que dans un tel cas tout plan mené suivant l'axe Ix' du moment inégal ou suivant l'axe de figure

pour le cas des solides de révolution, est un plan d'inertie central du solide; de sorte qu'en supposant que la ligne F coupe l'axe Ix', on peut dire que ces deux droites forment le plan $x'y'$, et faire en conséquence $\eta = 0$, et $b = 0$. (voir. éq. F. §. 4.) On déduit de là $Q\Pi = 0$, $QO = \infty$; $Q'\Pi = 0$, $Q'O' = \infty$. (voir. les formules α, β, §. 9. α', β'... §. 11.) Mais la solution fournie par $\beta'' = 0$ se maintient, car on trouve (α'', β''... §. 11):

$$\alpha = 0 \quad , \quad \alpha' = 0 \quad , \quad \alpha'' = \mp\sqrt{(\lambda^2 + \mu^2)} = \mp 1 \quad , \quad D = 0,$$

$$Q''\Pi = \pm a \quad , \quad Q''O'' = C:M.Q''\Pi = C:Ma;$$

$$S_1 = 0 \quad , \quad T_1 = 0 \quad , \quad U_1 = 0;$$

$$S_2 = -a.\mu \quad , \quad T_2 = +a.\lambda \quad , \quad U_2 = 0 \quad ; \quad \beta = +\mu \quad , \quad \beta' = -\lambda.$$

Le point Q'' coïncide par conséquent avec le centre I du solide, et le point Π, ce qui était évident à l'avance, se trouve placé dans le plan $x'y'$. On aura le centre (O'') en prenant sur $I\Pi$, prolongé en sens contraire, une longueur $Q''O''$ ou $IO'' = C:Ma$; et l'axe $O''X''$, en élevant en (O'') une perpendiculaire au plan $x'y'$.

Ainsi, quand un solide de seconde classe ($B = C, A >$ ou $< B$) est ébranlé par une force de percussion, agissant dans un plan quelconque, mené suivant l'axe du moment inégal, il n'existe plus qu'un seul centre spontané (O'') situé dans ce même plan, et qu'un seul axe spontané et permanent de rotation, normal à ce plan. Il est superflu d'examiner le cas où le solide doit être ébranlé au contraire par une force agissant suivant une direction perpendiculaire à un plan quelconque mené suivant l'axe de figure ou du moment d'inertie inégal; car on reconnait alors immédiatement par le (§. 12. 4°.) qu'il y a une infinité de points (O) et d'axes OX qui satisfont à la question, et qui tous sont situés dans le plan dont il s'agit.

Rémarque III. Toutes les fois qu'une force de percussion ébranle un solide de première classe, $A = B = C$, on peut trouver d'une infinité de manières différentes, dans le plan central, perpendiculaire à sa ligne d'action, un point fixe (O) *pour lequel l'axe OX normal à ΠO, et situé dans ce plan, est à la fois un axe spontané et permanent de rotation.* En effet, pour un tel solide, toute droite centrale, partant la droite menée par I parallèlement à la ligne d'action quelconque de la percussion, forme un axe d'inertie en I; donc le plan central, perpendiculaire à cette même ligne, forme aussi un plan d'inertie; donc, quelle que soit la droite suivant laquelle agit la

percussion, on peut toujours dire ici, qu'elle est normale à un plan d'inertie du centre, et faire en conséquence $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $\eta = 0$; ce qui rentre immédiatement au cas No. 12. 4⁰ et demontre la propriété énoncée. Quant à la construction de cette suite illimitée des points (O) et des axes OX, on n'a qu'à relire ce qui est dit au (§. 12) et prendre là $A = B = C$.

En outre, comme les moments d'inertie du solide, relatifs aux divers axes du centre sont tous égaux entr'eux, et que d'un autre côté la ligne de F est un des axes permanents du solide au point Π, il s'ensuit que les deux points $(O\,\Pi)$ sont ici dans une dépendance parfaitement réciproque; c'est-a-dire que si l'on percute le solide suivant l'axe OX, c'est le point Π qu'il faudra fixer, pour que la secousse y soit nulle, et que c'est la ligne $F\Pi$ en Π qui devient à son tour l'axe spontané et permanent du solide; de sorte que la droite $F\Pi$ est encore dans une dépendance de parfaite réciprocité avec chaque axe OX déterminé par notre solution. Il y a néanmoins cette différence entre les deux points (Π, O); c'est que la droite ΠO est un axe permanent du solide au point (O), et qu'elle ne l'est pas au point Π. De plus, la propriété de réciprocité subsiste encore pour les solides en général, quand la force de percussion est normale à l'un des plans d'inertie, parceque dans ce cas sa ligne d'action devient toujours au point Π un axe permanent.

Rémarque IV. La force de percussion agit dans l'un des trois plans d'inertie; dans le plan $x'y'$ par exemple. On a déjà reconnu (§. 7, exemple I) une solution de la question actuelle par le moyen du facteur $\mu\alpha' H + \alpha\lambda E = 0$, généralement inadmissible. Mais il s'agit présentement de voir ce que deviennent les trois solutions générales des (§. 9, 10, 11.) Or d'après la supposition faite, il faut avoir:

$$\eta = 0 \quad , \quad b = 0.$$

La solution $\beta = 0$, donne par $(\alpha, \beta, \ldots)$: $Q\Pi = 0$, $QO = \infty$; celle $\beta' = 0$ donne par $(\alpha', \beta', \ldots)$ $Q'\Pi = 0$, $Q'O' = \infty$; celle $\beta'' = 0$ produit au contraire les résultats finis:

$$\alpha = 0 \quad , \quad \alpha' = 0 \quad , \quad \alpha'' = -1 \quad , \quad \beta = \mu \quad , \quad \beta' = -\lambda \, ,$$

$$D = 0 \quad , \quad Q''\Pi^2 \lambda^2 = a^2\lambda^2 \quad , \quad Q''\Pi = a \quad , \quad Q''O = C{:}Ma \, ,$$

$$S_1 = 0 \quad , \quad T_1 = 0 \, , \; U_1 = 0 \, , \; S_2 = -a\mu \, , \; T_2 = +a\lambda \, , \; U_2 = \frac{b}{\lambda} = 0.$$

Ainsi les deux premières solutions deviennent impossibles, en plaçant les points (O, O') à des distances infinies; mais la troisième solution fournie par

$\beta''=0$ se maintient: le point $Q''=(S,T,U,)$ se confond avec l'origine, ou le centre I du solide; pour avoir (O''), il faut prendre, à partir de I, sur le prolongement contraire de la normale $III=a$, abaissée sur F, une longueur $C:Ma$ ou $C:MIII$. Or cette solution est absolument identique à celle de l'exemple (I.) (§. 7).

Mais alors même que cette identité n'existerait pas, on serait encore forcé d'admettre la solution de l'exemple cité, et de ne pas rejèter d'une manière absolue l'égalité à zéro du facteur $\mu\alpha' H+\alpha\lambda E$. Du reste, si cette égalité annonce une impossibilité de la question pour le cas de l'exemple (II §. 7), il n'en faut pas être surpris, puisque dans ce cas même l'équation de condition (V) devient également impossible; car par $\eta=0$, on a $\alpha=0$, et elle devient simplement:

$$\mu^2\lambda^2 D^2(C\alpha'^2)^2=0,$$

ou
$$\mu\lambda DC\cdot\frac{\lambda^2\mu^2(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon'^2}=\mu\lambda DC=0:$$

égalité absurde, puisqu'aucune des quantités μ,λ,D n'est généralement nulle par la seule hypothèse de $\eta=0$, qui donne $D=\frac{b\mu(1-\varepsilon)}{\varepsilon'}=\frac{b}{\lambda}$. Mais le (No. 5° §. 12) démontre néanmoins que dans ce cas méme la question comporte encore une double solution. Ainsi les résultats mêmes de nos calculs tendent à nous raffermir dans la signification que nous avons attribuée d'abord au facteur $\mu\alpha' H+\alpha\lambda E=0$. Toutes les fois que la ligne d'action de la force satisfait par sa position à la condition (V. §. 7), il donne une solution propre de la question, laquelle peut dans de certains cas particuliers devenir identique à l'une des trois solutions générales: dès que la condition (V) cesse d'avoir lieu, la solution propre n'existe plus, et annonce simplement une impossibilité relative de la question, puisqu'il est reconnu maintenant que l'une au moins des trois solutions générales se maintient dans tous les cas. Du reste, la solution propre qui subsiste dans le cas de la condition (V), donne, comme toute solution générale, une droite (P, P') située en II dans le plan P, ou rectangulaire avec la droite F: car en multipliant les valeurs de β, β', β'' (§. 7) par λ, μ, η respectivement, et ajoutant les trois résultats, on retrouve

$$\beta\lambda+\beta'\mu+\beta''\eta=0;$$

et cette rectangularité seule suffit pour nous porter à admettre la solution propre dont il s'agit. En effet, soit $II\delta$, la position de (P,P') et $O,,O,X,$ le point spon-

tané et l'axe permanent correspondant qu'elle fournit: comme les circonférences de cercles décrites des points $(O, O', O'', O_,)$ comme centres avec des rayons $O\Pi, O'\Pi, O''\Pi, O_,\Pi$, et dans des plans normaux à P, ont toutes une tangente commune en Π, normale au même plan, ou dirigée suivant la ligne de la percussion F, il s'ensuit que si le point Π est le centre de la résultante effective des réactions d'inertie tangentielles, ou le centre de réaction d'inertie tangentielle pour le centre fixe (O) du solide et pour l'axe d'ébranlement OX, il peut fort bien l'être encore pour les trois autres points $(O', O'', O_,)$ rendus fixes tour-à-tour, et pour les axes correspondants; car à chaque fois, l'ébranlement se faisant autour de l'un quelconque de ces quatre axes, la réaction d'inertie tangentielle totale se fera en sens contraire de la ligne d'action de F; ce qui est une condition essentielle et indispensable à remplir pour que la percussion soufferte par le point fixe, soit nulle. Cette explication mécanique suffit pour faire comprendre qu'il peut y avoir au moins cette multiplicité de solutions que l'examen analytique de la question nous a fournies d'une manière peremptoire.

Rémarque V. Mais cette diversité de solutions nous conduit à présenter le rapprochement suivant. Etant donné un point fixe (ω) dans un corps solide, il y existe toujours trois axes permanents au moins qui sont rectangulaires entr'eux. Si l'on veut ébranler le solide autour du premier $\omega\xi$ de ces axes, pour qu'il n'en résulte ni percussion sur l'axe ni sur le point fixe, il faut faire agir la force dans le plan permanent des deux autres $\omega\xi', \omega\xi''$, normalement au plan méné suivant $\omega\xi$ et le centre I', et à une distance convénable IP de ce centre I; ce qui donne un premier centre de percussion P (Voir. §. **3** fin), situé dans le plan $(\omega\xi', \omega\xi'')$? Mais évidemment, on peut demander d'ébranler le solide sous les mêmes conditions autour de chacun des deux axes $\omega\xi', \omega\xi''$, ce qui donne deux autres centres de percussion ou de réaction tangentielle P', P'', l'un P' situé dans le plan $(\omega\xi'', \omega\xi)$ et l'autre P'' dans le plan $(\omega\xi, \omega\xi')$. Ainsi donc pour un même point fixe (ω) d'un solide, il y a trois centres de réaction tangentielle (P, P', P'') situés dans les trois plans permanents du point, et trois modes de percussion connus correspondants. De même, pour un mode de percussion donné, on peut trouver en général dans le plan central P, perpendiculaire à sa direction en Π, trois points (O, O', O'') et trois axes spontanés et permanents $OX, O'X', O''X''$ autour de chacun desquels le solide sera mis en mouvement, sans qu'il y ait percussion sur le point rendu fixe, ni sur l'axe correspondant. Tel est le théorème réciproque général, démontré par l'analyse précédente.

La quatrième solution $(\Pi\delta_,, O_,X_,)$ exprimée au (§. 7) est en effet im-

possible dans le cas général; puisqu'elle n'a lieu que pour le mode de percussion spécial qui satisfait à la condition (V). Faisons remarquer aussi que dans la question directe, le point (ω) peut être choisi de manière à y donner pour le solide une pluralité, et même une infinité d'axes permanents, ce qui produit une égale multitude de centres de réaction tangentielle. De même, dans la question reciproque il se peut que le mode spécial de percussion soit tel que l'on puisse trouver d'une infinité de manières différentes un point fixe (O) au solide, et un axe OX en ce point qui soit à la fois l'axe d'ebranlement et l'axe permanent de rotation. (*Voir par exemple le No.* 4 §. 12.) L'analogie n'est pas toutefois complète à cet égard entre les deux théories. En effet, quel que soit le point fixe donné (ω), pourvu qu'il diffère du centre d'inertie, il aura au moins trois centres de réaction tangentielle, situés dans ses trois plans $(\omega\xi', \omega\xi'').(\omega\xi'', \omega\xi)\ldots$; au contraire dans la question réciproque le mode de percussion peut être spécifié de façon qu'il n'y ait plus qu'une manière unique de trouver dans le solide le point (O) correspondant. (*Voir par exemple le No.* 6, *remarq. IV.*)

13.

Pour mieux éclairir la signification de l'égalité à zéro du facteur $\mu\alpha' H + \alpha\lambda E$, il nous reste une question accessoire à traiter: question qui se trouve implicitement resolûe par l'analyse des numeros précédents.

Par le centre d'inertie I d'un solide on mêne un plan P normal à la ligne d'action F de la force de percussion, et suivant F, comme charnière fixe, on conçoit un plan P', d'abord arbitraire pour le reste. On demande dans quelle position il faut arrêter P', pour que sur sa droite d'intersection (P, P') avec P on puisse assigner un point (O) tel que l'axe OX normal en (O) à P', soit un axe permanent du solide en ce point, et devienne parsuite l'axe d'ébranlement par rapport à la force F; le point (O) étant rendu fixe, et solidaire avec le solide proposé.

Si l'on conserve les notations admises plus haut pour caractériser les divers éléments de la question, on conclut immédiatement que les équations (S) doivent subsister, puisque la condition qui exige que OX soit permanent, est maintenue; et comme elles doivent fournir pour S une même valeur commune

$$S = -\alpha D - \frac{\alpha\alpha''\beta E}{\mu . D},$$

il faut encore que l'équation (B. §. 5) subsiste; et comme en vertu de la signification reconnue pour le facteur β, on peut actuellement supprimer celui-ci, on obtient au lieu de (B) l'équation

$$(\mu\alpha'.H+\alpha\lambda.E)\alpha''=0\ldots\ (B'),$$

laquelle, pour subsister généralement, permet encore la suppression du facteur commun α''; puisque faire $\alpha''=0$, ce serait ramener la question à un cas tout particulier que nous laisserons ici de côté. En joignant donc à l'équation (B') ainsi entendue, les deux équations (A) et la relation perpetuelle $\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1$, on obtient les équations nécessaires pour déterminer toutes les inconnues α, α', α'', D, et les auxiliaires β, β', β''.

En posant pour abréger:

$$\lambda^2\mu^2(A-B)^2+\mu^2\eta^2(B-C)^2+\eta^2\lambda^2(C-A)^2=W^2,$$

on trouve les valeurs suivantes:

$$\alpha=\frac{\mu\eta(C-B)}{W}\ ,\quad \alpha'=\frac{\eta\lambda(A-C)}{W}\ ,\quad \alpha''=\frac{\lambda\mu(B-A)}{W}\ ,$$

et dans l'hypothèse que λ ne soit pas nul, on a D par:

$$D\lambda=\frac{a(C-A)\eta+b(A-B).\mu}{W}.\lambda;$$

ce qui détermine complètement le plan P'; de sorte que la question est bien déterminée en général. Pour obtenir ensuite le point (O) par ses coordonnées S, T, U, on calculera les quantités subsidiaires β,β',β'' par les formules

$$\beta=\alpha'\eta-\alpha''\mu=\frac{\lambda}{W}[A(\eta^2+\mu^2)-(B\mu^2+C\eta^2)],$$

$$\beta'=\ldots\ldots\ldots=\frac{\mu}{W}[(B-A).\lambda^2+(B-C).\eta^2],$$

$$\beta''=\ldots\ldots\ldots=\frac{\eta}{W}[(C-B).\mu^2+(C-A).\lambda^2].$$

Il est aisé de vérifier l'identité de ces valeurs de α, α', α'', D, etc. avec celles qui ont été trouvées au (§. 7) sous une forme différente et moins symétrique à cause des abréviations qu'on y a adoptées, et qu'il faut remplacer par leurs valeurs pour faire cette vérification. Du reste cette identité de résultats est nécessaire, parce-

que les équations qui ont servi de point de départ, sont les mêmes dans l'un et l'autre cas.

Ainsi donc la signification du facteur $\mu\alpha' H + \alpha\lambda . E = 0$ est maintenant manifeste, puisqu'il forme la base fondamentale de la solution de la question qu'on vient de traiter, tandis que le facteur $\beta = 0$ résout la question générale reciproque de la théorie ordinaire du centre de percussion. Or il se peut que la première solution satisfasse dans de certains cas particuliers à toutes les conditions de la seconde question, et qu'elle fournisse ainsi accidentellement des solutions toutes spéciales de celle-ci.

Mais notre analyse fournit en même temps la solution de la question réciproque de la précédente qu'on vient de traiter, et donne lieu à quelques conséquences intéressantes qu'il convient de signaler.

Étant donnée une droite (P, P') *de position et de direction* $(p, q, \beta, \beta', \beta'')$: *trouver sur cette droite un point* (O) *pour lequel l'un des axes permanents du solide soit perpendiculaire en* (O) *à cette droite, et forme avec celle-ci un plan central du solide.*

Nommons P le plan déterminé par la droite $(p, q, \beta, \beta', \beta'')$ et par le centre I, et soient λ, μ, η la direction de la normale au plan P, et P' le plan passant suivant la droite donnée, et rectangulaire avec P. Si l'on dénote encore par $-D$ la perpendiculaire menée de I sur P', bien connu de position et de direction, on obtient d'abord pour la direction $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ de l'axe demandé:

$$\alpha = \mu . \beta'' - \eta\beta' \quad , \quad \alpha' = \eta\beta' - \lambda\beta'' \quad , \quad \alpha'' = \lambda\beta' - \mu . \beta,$$

et pour le calcul des coordonnées S, T, U du point (O), la formule

$$S = -\alpha . D - \frac{\alpha\alpha''\beta . E}{\mu D},$$

dans laquelle α, α', α'' ont les valeurs précédentes en fonction des données β, β', β'', λ, μ, η, et où D peut aussi être pris comme une donnée immédiate; ensuite les équations de la droite donnée (P, P'), savoir

$$\begin{aligned} T.\beta - S.\beta' &= p, \\ U.\beta' - T.\beta'' &= q, \\ S.\beta'' - U.\beta &= r, \end{aligned}$$

donneront T, U, quand l'abscisse S est calculée.

Du reste, les quantitées D, λ, μ, η pourraient être exprimées au préalable en fonction des données directes β, β', β'', p et q ou r; ce qui exprimerait les inconnues (α, α', α'', S, T, U) par celles-ci seulement. Mais la question précédente étant une fois resolue, on est naturellement amenée à généraliser par analogie, et à *demander par exemple, l'ensemble des points* (O) *d'un solide pour chacun desquels l'un des axes naturels de rotation ait une direction donnée.*

Solution. Conçevons que dans les équations (I, II, §. 2) on remette pour f, g, h, A', B' leurs valeurs en S, T. U, A, B, C. Elles expriment dès lors chacune une surface du second ordre qui par leurs intersection courbe donnent le lieu des points (O) demandés; les quantités α, α', α'' désignant dans ce cas, comme à l'ordinaire, des cosinus d'angles donnés, soumis à la relation perpétuelle $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$.

Mais au lieu de développer cette question, il sera préférable de s'attacher plutôt à cette autre d'une tournure un peu différente, et qui nous paraît plus feconde en conséquences: *Trouver sur une droite donnée* (D) *de position et de direction dans un solide, si toutefois c'est possible, un point* (O) *pour lequel cette droite soit elle-même un axe permanent ou naturel de rotation de ce solide.*

Solution. Représentons les équations de (D) par:

$$\left.\begin{aligned} T.\alpha - S.\alpha' &= p \\ U.\alpha - S.\alpha'' &= q \end{aligned}\right\} \ldots (D) \ldots (\alpha, \alpha', \alpha'', p, q).$$

En substituant dans les équations (I, II, §. 2) les valeurs de f, g, h, A', B', en S, T, U, A, B, C, on obtient à leur place:

$$\alpha'.\alpha''.H + \alpha'\alpha''(T^2 - U^2) + \alpha\alpha''.S.T - \alpha\alpha'.S.U + (\alpha''^2 - \alpha'^2).T.U = 0$$

$$\alpha.\alpha''.E + \alpha\alpha''(S^2 - U^2) + \alpha'.\alpha''.S.T + (\alpha''^2 - \alpha^2).S.U - \alpha.\alpha'.T.U = 0.$$

Portant ensuite dans celles-ci les valeurs de T et U en S, déduites de (D), et faisant la réduction des termes, on reconnaît aisement que le terme en S^2 dans chaque équation devient identiquement nul, et l'on obtient les deux équations suivantes, comme résultats de cette substitution:

$$\text{(I)}\quad \alpha^2.\alpha'.\alpha''.H + (p\alpha'' - q.\alpha').S + \alpha'\alpha''(p^2 - q^2) + (\alpha''^2 - \alpha'^2)pq = 0,$$

$$\text{II.}\quad \alpha^2.\alpha''.E - q.S - \alpha''.q^2 - \alpha'.p.q = 0.$$

On voit qu'elles se réduisent encore à la forme linéaire par rapport à S, et qu'elles assigneront à cette abscisse une valeur commune:

$$\text{(III.)} \qquad S = \alpha^2.\alpha'' \cdot \frac{E}{q} - \alpha'' q - \alpha' p,$$

pourvu que l'équation de condition suivante:

$$(\alpha'' p - \alpha' q)\left(\alpha^2 \alpha'' \frac{E}{p} - \alpha'' q - \alpha' p\right) + \alpha^2 \alpha' \alpha'' H + \alpha' \alpha''(p^2 - q^2) + (\alpha''^2 - \alpha'^2) pq = 0$$

subsiste entre les coëfficients de direction donnés $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ et les deux quantités linéaires p, q. En la réduisant à la forme la plus simple, on obtient à sa place:

$$\alpha^2.\alpha''.\left(\alpha' H + \alpha''.\frac{E}{q} \cdot p - \alpha'.E\right) = 0,$$

ou en remettant pour E, H, leurs valeurs, et simplifiant:

$$\text{(IV.)} \quad \alpha^2.\alpha''.\left[\alpha'(A - B) + \alpha''.(C - A)\frac{p}{q}\right] = 0.$$

Ainsi l'on voit par là que toute droite, satisfaisant à la condition (IV) par les données (α, q), est susceptible de fournir une solution de la question, et que pour toute droite différente au contraire, il est impossible d'y trouver un point pour lequel elle soit un axe naturel de rotation. Cela étant reconnu, examinons quelques cas particuliers rémarquables.

D'abord, *pour les solides de première classe, on peut toujours trouver sur une droite quelconque prise au hasard, un point* (O) *pour lequel elle soit un axe permanent*; puisqu'alors la condition (IV) est satisfaite identiquement. Il suffira d'abaisser du centre I un plan perpendiculaire sur la droite donnée, et leur point de rencontre sera le point (O). De même, *pour les solides de seconde classe on peut toujours trouver sur une droite prise au hasard un point* (O) *pour lequel la condition prescrite est remplie.*

En effet, soit $C = A$: la condition (IV) devient $\alpha^2.\alpha''.\alpha' = 0$; et celle-ci est d'abord satisfaite identiquement pour toute droite parallèle au plan d'inertie (x', z') qui donne $C = A$, puisqu'alors $a' = 0$. Ensuite quelle que soit la direction différente de la droite, on peut toujours faire tourner un certain plan autour de Iy', jusqu'à ce qu'il devienne parallèle à la droite. En arrêtant le plan dans cette position, et prenant l'axe Iz' suivant la ligne d'intersection avec le plan normal en I à Iy', on aura $\alpha = 0$, et la condition $\alpha^2\alpha'\alpha'' = 0$ est par conséquent toujours remplie ainsi; d'ailleurs l'axe Iz' peut toujours être choisi d'après la con-

dition $\alpha = 0$, ou de $\alpha'' = 0$, puisque l'hypothèse $C = A$ fait que tout les axes en I, perpendiculaires à Iy', sont des axes d'inertie.

Quant au cas général des solides de troisième classe, il nous fait tomber immédiatement sur une difficulté assez serieuse, qui consiste à reconnaître l'usage de chaque facteur $\alpha^2.\alpha''$, et $\alpha'\,(A-B)q+\alpha''(C-A)p$ de l'équation (IV). Or je dis que le premier qui se rapporte uniquement à la direction de la droite, doit être rejeté, et supprimé dans cette équation, comme ne pouvant conduire qu'à des conséquences contradictoires et inadmissibles. En effet, si l'on était en droit de prendre $\alpha^2.\alpha'' = 0$, partant $\alpha'' = 0$ par exemple, toute droite parallèle au plan d'inertie $x'y'$ serait, pour son point (O), déterminé par $S=-\alpha' p$, $T=+\alpha p$, $U=\frac{q}{\alpha}$, un axe permanent du solide: donc réciproquement, en un point quelconque donné $(O) = S, T, U$ d'un corps, on devrait toujours pouvoir déterminer une direction $(\alpha\alpha')$ parallèle au plan d'inertie $x'y'$, et qui serait en ce point un axe permanent; les quantités α, α' auraient les valeurs $\alpha = T:\sqrt{(S^2+T^2)}$, $\alpha' = -S:\sqrt{(S^2+T^2)}$. Or si une telle solution était admissible pour le plan $x'y'$, elle devrait l'être pour chacun des deux autres plans d'inertie, puisque $x'y'$ pourrait désigner tour-à-tour chacun de ces plan; et l'on devrait conclure de là qu'en un point quelconque (O) d'un solide, on puisse toujours trouver trois directions naturelles de rotation, respectivement parallèles aux trois plans d'inertie; ce qui, quoique possible dans quelques cas particuliers du point (O), est néanmoins impossible en général, et en contradiction avec la théorie connue qui démontre la rectangularité de ces axes deux-à-deux au point donné. Ainsi l'hypothèse $\alpha'' = 0$, faite séparément, doit être rejetée, et il en est par conséquent de même de celle $\alpha = 0$: donc le facteur $\alpha^2.\alpha''$ de (IV) doit être supprimé, et cette condition devient par conséquent simplement:

$$\alpha'(A-B).q+\alpha''(C-A).p = 0 \ldots \text{(m)}.$$

On voit d'abord que celle-ci est satisfaite identiquement par les égalités simultanées $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 0$, qui donnent en même temps par (III) et (D): $S=0$, $T=p$, $U=q$. Ces résultats démontrent immédiatement que *toute droite perpendiculaire à l'un quelconque des trois plans d'inertie d'un solide, est un axe permanent ou naturel de rotation pour son point de rencontre avec ce plan* (*voir.* §. 1. *énoncé I.*). Mais par là même il est évident à l'avance que toute droite située dans l'un des trois plans d'inertie, est toujours nécessairement un axe permanent pour un certain de ses points (O). L'analyse précédente

confirme cela, en même temps qu'elle nous fournit une nouvelle preuve de la nécessité de supprimer $\alpha^2\alpha''$ dans (IV). En effet, supposons d'abord dans (m), $\alpha''=0$, à l'exclusion de $\alpha'=0$; dès lors il faut que l'on ait $q=0$; ce qui place la droite donnée dans le plan $x'y'$ même, et fournit par l'équation (III), en vertu de $\alpha''=0$, $q=0$:

$$S=\tfrac{0}{0},\ \text{partant}\ T=\tfrac{0}{0}\quad ,\quad U=0.$$

Cela prouve donc bien que toute droite située dans l'un quelconque $x'y'$ des plans d'inertie est un axe permanent pour un certain de ses points. Mais cette analyse semble être en défaut pour la détermination de ce point. Or avant de rien conclure à ce sujèt, il faut voir aussi ce que donne l'égalité $\alpha'=0$, celle $\alpha''=0$ étant exclue. Dès lors (m) devient $\alpha''p(C-A)=0$, ou $p=0$; d'où résulte $T=0$, ce qui place la droite dans le plan z', x', et il vient:

$$U=\alpha q+\alpha\alpha''^2\cdot\frac{C-A}{M.q}\quad ;\quad S=-\alpha''q+\alpha^2\alpha''\cdot\frac{C-A}{M.q}.$$

Ainsi l'équation de la droite (α', α'', q) placée sur le plan z', x', étant $U\alpha-S\alpha''=q$, les coordonnées (U, S) du point (O), pour lequel elle est un axe permanent du solide, sont données par les formules précédentes, et la prétendue indétermination n'a pas lieu réellement. Si l'on voulait avoir le point (O) sur la droite placée dans le plan $x'y'$ même, pour lequel l'indétermination apparente s'est d'abord produite, on appliquerait aux trois formules précédentes la méthode de l'échange progressif des lettres, en remarquant d'abord que l'équation $U\alpha-S\alpha''=q$ donne par là $S\alpha'-T\alpha=r$, r étant une constante nouvelle, égale à $-p$ en vertu de la première équation (D): par là la valeur de U obtenue ci-dessus dans le plan $(z'x')$, donnerait pour le plan $(x'y')$:

$$S=\alpha'.r+\alpha'\alpha^2\cdot\frac{A-B}{M.r}=-\alpha'p-\alpha'\alpha^2\cdot\frac{A-B}{M.p},$$

et de même: $T=-\alpha r+\alpha'^2\alpha\cdot\dfrac{A-B}{M.r}=+\alpha p-\alpha'^2\alpha\cdot\dfrac{A-B}{M.p}$.

La même méthode, appliquée à ces deux dernières (r étant conservé), ou celle de l'échange regressif appliquée aux formules primitives, ferait connaître de même le point (O) pour le cas où la droite (D) serait placée dans le plan $(y'z')$. Mais un seul système de formules étant suffisant ainsi, on voit clairement que l'indetermination effective n'aurait lieu que dans le cas où le calcul appliqué successivement à chacun des trois plans, donnerait à chaque fois des valeurs de coor-

données ayant la forme $\frac{0}{0}$. Nous ferons remarquer aussi en passant, que si l'on prenait les équations de la droite (D) sous une forme symetrique, savoir:

$$\left.\begin{aligned} T\alpha - S\alpha' &= P, \\ U\alpha' - T\alpha'' &= Q \\ S\alpha'' - U\alpha &= R \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{d'où } p = P, \\ &\text{et } \quad Q = R, \end{aligned}$$

conformément à l'esprit de l'echange progressif, ce qui donnerait en même temps:

$$P\alpha'' + Q\alpha + R\alpha' = 0,$$

la condition (m) serait remplacée par la formule

$$P.\alpha''(C-A) - R\alpha'(A-B) = 0 \ldots (\mathrm{M}),$$

d'où il résulterait immédiatement par l'échange des lettres:

$$Q\alpha(A-B) - P\alpha''(B-C) = 0 \ldots (\mathrm{M}'),$$
$$R\alpha'(B-C) - Q.\alpha(C-A) = 0 \ldots (\mathrm{M}'').$$

Mais ces équations de condition ne doivent pas subsister simultanément; elles expriment toutes trois la même chose avec des lettres différentes; c'est pourquoi ayant par exemple examiné plus haut les cas de $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 0$ à la fois, ce qui rend (m), partant (M), identique, il est superflu de voir ensuite ce que donnerait la combinaison $\alpha'' = 0$, $\alpha = 0$, et ensuite celle $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$. Mais si on voulait le faire, on devrait recourir une fois à la formule (M') et à ce qui s'y rattache, et l'autre fois il faudrait employer (M''), et ce qui en dépend; car selon qu'on voudra employer ou (M), ou (M'), ou (M''), il faudra modifier l'équation (III) en conséquence. Une circonstance bien simple confirme notre manière de voir à ce sujèt; c'est que la propriété déduite, par exemple de $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 0$, étant une fois énoncée en langage ordinaire, est absolument identique à ce qui résulterait de $\alpha = 0$, $\alpha'' = 0$ qui répondent à la formule (M'), ou de $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 0$ qui repondent à (M''); c'est à quoi on parvient immédiatement par l'emploi unique et exclusif de (M) ou (m) et (III), en faisant remarquer que le plan $(y'z')$ par exemple peut tour-à-tour être l'un quelconque de trois plans d'inertie du solide. Ces considérations sont analogues à celles qui sont exposée aux (§. 10 et 11) sur les diverses solutions fournies par $\beta = 0$, par $\beta' = 0$, et par $\beta'' = 0$.

Après cela on peut faire remarquer que pour toute droite située dans l'un des trois plans d'inertie, et passant en outre par le centre du solide, le point (O) passe à l'infini; car à la vérité (m) devient identique par $p = 0$, $q = 0$; mais les coordonnées U, S pour la droite $U\alpha - S\alpha'' = 0$ deviennent toutes deux infinies; à moins que d'avoir en même temps $\alpha = 0$, $\alpha'' = 1$, ou $\alpha = 1$, $\alpha'' = 0$; ce qui rendrait encore S, U indéterminées; mais on sait qu'alors on peut avoir $S = 0$, $U = 0$.

De plus, comme il y a alors indétermination; on en conclut que *tout axe d'inertie d'un solide est un axe permanent pour l'un quelconque de ses points.* (Voir. §. 1 fin. énoncé II); ce qui a été démontré d'une façon différente dans le mémoire cité au (§. 1). Enfin, pour avoir le lieu géométrique des points (O) dans le plan d'inertie $(z'x')$, en chacun desquels une même direction constante (α, α'') est un axe permanent, il faudra substituer dans la valeur $U = \alpha q + \alpha\alpha''^2 . \frac{E}{q}$, la valeur de q considéré comme variable dans l'équation $q = \alpha . U - \alpha'' . S$, ce qui donne l'équation:

$$- \alpha\alpha'' . U^2 + (\alpha''^2 - \alpha^2) . U . S + \alpha\alpha'' . E = 0 ,$$

laquelle caractérise une hyperbole. Ainsi *le lieu géométrique des points situés dans un même plan d'inertie, en chacun desquels l'un des axes permanents dans ce plan, conserve une direction invariable, est une hyperbole concentrique au centre du solide.* Pour le cas de $\alpha'' = \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(2)}$, la courbe devient $S^2 - U^2 = -E = \frac{A - B}{M}$.

D'ailleurs, comme la droite centrale de direction (α, α'') coupe et touche la courbe à l'infini, ainsi qu'on pourrait le vérifier directement, il s'ensuit qu'elle forme une asymptote; et comme la direction rectangle à celle-là produirait évidemment le même lieu géométrique des points (O), elle doit être l'autre asymptôte. C'est ce que vérifie encore la courbe obtenue, puisque son équation ne change pas en y remplaçant (α, α'') par $(-\alpha'', +\alpha)$; elle est par conséquent équilatère dans tous les cas. Réciproquement, étant donnée et tracée dans un des trois plans d'inertie du solide une hyperbole équilatère quelconque, représentée par l'équation

$$- U^2 + m . S . U + S^2 \pm b^2 = 0 ,$$

on en pourra toujours fixer les dimensions d'après la condition que ses asymp-

têtes rectangles représentent pour chaque point de la courbe les deux directions conjuguées permanentes du solide. À cet effet on fera:

$$m = \frac{\alpha''^2 - \alpha^2}{\alpha\alpha''} \; ; \; \pm b^2 = E = \left(\frac{C-A}{M}\right) .$$

Dans ces égalités la quantité $\pm b^2$ doit avoir la valeur invariable $\left(\frac{C-A}{M}\right)$; mais on peut se donner m à volonté, et déterminer les deux directions conjuguées permanentes ou les asymptôtes, en fonction de la donnée m.

Dans le cas particulier des solides de deuxième espèce, la courbe tracée dans le plan central à moments égaux, degénère en deux droites centrales rectangulaires

$$U\alpha - S\alpha'' = 0 \quad , \quad U\alpha'' + S\alpha = 0 \; ;$$

ce qui signifie qu'en un point quelconque (O) d'un tel plan, l'un des axes naturels est la droite tirée de là au centre, le second une perpendiculaire à la droite OI, et le troisième la normale au plan des deux premièrs axes, ou une parallèle à l'axe du moment inégal; c'est-à-dire à l'axe de figure dans les solides de révolution.

Suite du §. 13.

Examinons présentement le cas plus général de la question: celui où la droite (D), sans cesser de satisfaire à la question, ne se trouve dans aucun des trois plans d'inertie, ni normale à leurs directions. En tirant de l'équation (m) la valeur de q en p et la portant dans (D), on obtient pour les équations générales de la droite (D'), propre à satisfaire à la question:

$$\left.\begin{aligned} \alpha . U - \alpha' . S &= P \ldots\ldots\ldots \\ \alpha . U - \alpha'' . S &= \frac{A-C}{A-B} \cdot \frac{\alpha''}{\alpha} . P \ldots . \end{aligned}\right\} \ldots (D') .$$

En concevant p comme un paramètre variable, et l'éliminant d'entre ces équations, on obtient d'abord le lieu géométrique de toutes les droites à direction $(\alpha, \alpha', \alpha)$, propres à satisfaire à la question; ce qui donne le plan central suivant:

$$\alpha\alpha'(A-B).U + \alpha\alpha''(C-A).T + \alpha'\alpha''(B-C).S = 0 \ldots (P) .$$

De plus, en portant la même valeur de q dans l'équation (III), on obtient pour l'abscisse S du point (O), pris sur chaque droite individuelle (D'):

$$S = \alpha^2.\alpha'.\frac{A-B}{A-C}.\frac{E}{p} - \left(\alpha' + \frac{A-C}{A-B}.\frac{\alpha''^2}{\alpha'}\right).P \ldots . (P'),$$

et l'on obtient ensuite les coordonnées T, U par les équations (D'); de sorte qu'une droite quelconque (D'), étant donnée et tracé dans le plan (P), on peut toujours calculer la position de son point (O) pour lequel elle est un axe naturel de rotation du solide. On peut dire aussi, (P') étant considéré comme un plan normal à l'axe d'inertie Ix', que ce point (O) résulte de l'intersection d'un plan spécial (P') avec une droite spéciale (D') correspondante.

En construisant une infinité de droites (D') parallèles, correspondantes aux valeurs consécutives de la ligne arbitraire p, et les plans (P') correspondants à ces mêmes valeurs, on aura par l'intersection de ces droites avec leurs plans correlatifs, le lieu géométrique des points (O) tous situés dans le même plan (P). Donc, pour avoir de même la projection orthogonale de la courbe plane des points (O) sur les plans d'inertie coordonnés, il suffit d'éliminer p entre chaque équation (D') et celle (P'). Mais une seule élimination suffit évidemment, puisqu'ayant par exemple l'équation de la projection sur le plan $x'y'$, on concevra un cylindre droit, ayant cette projection pour base; et il coupera le plan (P) suivant la courbe même des points (O) que l'on cherche. Cette projection et la surface cylindrique à laquelle elle sert de base, auront pour équation commune:

$$(\alpha T - \alpha' S) S + \left(\alpha' + \frac{A-C}{A-B}.\frac{\alpha''^2}{\alpha'}\right).(\alpha T - \alpha' S)^2 - \alpha^2 \alpha'.\frac{A-B}{A-C}.E = 0,$$

et celle-ci exprime encore une hyperbole; ce que l'on pourrait vérifier par sa forme même, en passant des axes x', y' à deux autres axes rectangles (S', T') de même origine I, et dont le premier IS' coïncide avec la projection d'une droite centrale $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ sur le plan $x'y'$, tandis que l'autre IT' se trouve dans le même plan suivant une perpendiculaire au premier. Du reste il est assez évident par les équations (D', P'), et il suit de ce qui précède que la courbe même des points (O) dans le plan (P) est une hyperbole, puisque d'une part on reconnait sans élimination qu'elle est du second degré, et que d'autre part la droite centrale (D') à laquelle répond un paramètre $p = 0$, a un point à l'infini positif et négatif, commun avec la courbe. De plus, comme on voit par ces mêmes équations que pour $p = 0$, $S = \infty$, et que les limites des rapports $\frac{T}{S}, \frac{U}{S}$ deviennent $\frac{\alpha'}{\alpha}, \frac{\alpha''}{\alpha}$ respectivement, il s'ensuit que la droite centrale $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ est encore une asymptôte à la courbe même des points (O) dans le plan (P).

Pour vérifier ce résultat d'une autre manière, nommons IS' la projection sur $x'y'$ de la droite centrale $(\alpha, \alpha', \alpha'')$, et IT' une perpendiculaire à IS' dans le même plan; g, h désignant pour un instant les angles de IS' avec Ix', Iy', et ϑ l'inclinaison de la droite même sur le plan $x'y'$, on aura: $\alpha = \cos g \,.\, \cos\vartheta$, $\alpha' = \cos h \,.\, \cos\vartheta$, $\alpha'' = \sin\vartheta$.

En passant des coordonnées (S, T) d'un point quelconque rapporté aux axes Ix', Iy', à celles (S', T') du même point rapporté aux axes IS', IT', à l'aide des quantités $\cos g$, $\cos h$, $\cos\vartheta$, on obtient pour l'équation de la courbe sur $x'y'$:

$$\alpha\alpha' . S'T' + (b\alpha^2 + b\alpha'^2 - \alpha'^2)\alpha''^2 . T'^2 - \frac{\alpha^2\alpha'^2}{b} \cdot E = 0;$$

b désigne pour abréger, la quantité $\frac{A-C}{A-B} = b$. De cette équation entre S' et T' on conclut que l'une des asymptôtes est la droite IS' même, tandis que l'autre fait avec IS' l'angle de cosinus $m \,.\, \alpha''^2 : \sqrt{(\alpha^2\alpha'^2 + m^2\alpha''^4)}$, pour $m = b\alpha^2 + b\alpha'^2 - \alpha'^2$. Or puisqu'il est généralement vrai que la projection de la tangente à une courbe dans l'espace, coïncide avec la tangente à la projection même de la courbe, la même propriété doit subsister pour les asymptôtes; de sorte que dans le cas actuel, la droite S', formant l'asymptôte de la courbe sur x', y', la droite centrale $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ doit être à son tour celle de la courbe même des points (O). Par la même raison la seconde asymptôte à la courbe de projection sur $x'y'$ est la projection de la seconde asymptôte (β, β', β'') de la ligne des points (O); de sorte que la droite centrale (β, β', β'') est aussi connue, et que l'on pourrait même aisément calculer ses coëfficients de de direction β, β', β''.

Comme l'hyperbole est absolument symétrique par rapport à chaque asymptôte, on est naturellement conduit à se demander si dans la présente question les deux directions $(\alpha, \alpha', \alpha'')(\beta, \beta', \beta'')$ ne doivent pas jouir toutes deux à la fois de la propriété de donner chacune dans le plan (P) un système de droites parallèles, dont chacune soit un axe naturel pour un certain de ses points. Concevons donc la droite $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ comme donnée; elle donnera lieu à un système de parallèles situées toutes dans le plan P, et à une hyperbole de points (O) pour chacun desquels elle forme un axe naturel de rotation du solide. Soient λ, μ, η les coëfficients de direction de la normale au plan (P), on aura par son équation:

$$\lambda = \alpha'\alpha''(B-C) : N \quad ; \quad \mu = \alpha''\alpha(C-A) : N \quad , \quad \eta = \alpha\alpha'(A-B) : N,$$

et en vertu de la relation perpétuelle $\lambda^2 + \mu^2 + \eta^2 = 1$, la quantité N se trouve

définie d'elle-même. Ces valeurs de λ, μ, η peuvent pour le moment être representées par les formes

$$\lambda = \alpha'\alpha'' P : N \quad , \quad \mu = \alpha''\alpha Q : N \quad , \quad \eta = \alpha\alpha' R : N;$$

les abréviations P, Q, R satisfaisant par leur signification à la condition $P+Q+R=0$. Cela posé, concevons dans le plan (P) une direction centrale (β,β',β'') d'abord arbitraire; ses équations seront: $\beta T-\beta'.S=0$, $\beta.U-\beta''.S=0$, et comme elle est dans ce plan, mis sous la forme

$$\alpha'\alpha''.P.S+\alpha''\alpha.Q.T+\alpha\alpha'.R.U=0,$$

il faut qu'on ait: $\alpha'\alpha'.P.\beta+\alpha''\alpha.Q\beta'+\alpha\alpha'.R.\beta''=0.$

De plus, pour que les deux directions $(\alpha, \alpha', \alpha'')(\beta, \beta', \beta'')$ soient réciproques, c'est-à-dire pour que la seconde puisse à son tour donner un système de droites naturelles de rotation, il faut que l'équation de condition précédente subsiste encore, quand on y permute les α avec les β, ce qui donne:

$$\beta'\beta''.P\alpha+\beta''\beta.Q\alpha'+\beta\beta'.R\alpha''=0.$$

Or en tirant de là les valeurs de β', β'', en β, P, Q, R, α, on trouve:

$\beta' = \beta.\alpha' : \alpha''$, $\beta'' = \beta\alpha'' : \alpha$, partant $\beta = \pm\alpha$, $\beta' = \pm\alpha'$, $\beta'' = \pm\alpha'$. Ainsi donc il n'y a aucune droite différente de celle donnée d'abord qui dans le plan (P) puisse fournir une direction naturelle de rotation aux divers points (O) de la courbe hyperbolique; donc en chaque point de cette courbe une parallèle à l'asymptôte étant un axe naturel du solide, les deux autres sont en ce même point seulement dans un plan normal en (O) à la même asymptôte, et la seconde asymptôte n'a aucune signification mécanique.

Mais un plan central quelconque étant donné au hasard:

$$\lambda.S+\mu.T+\eta.U=0:$$

on y peut toujours déterminer une direction unique, fournissant un système de parallèles qui soient chacune pour un certain (O) de ses points un axe naturel de rotation. $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ marquant cette direction, il faut que les équations précédentes subsistent entre les α, et λ, μ, η, ce qui donne maintenant:

$$\alpha = \mu.\eta.P:N' \quad , \quad \alpha' = \eta.\lambda.Q.N' \quad , \quad \alpha'' = \lambda.\mu.R:N',$$

et N' aura la valeur déduite de l'équation

$$N'^2 = \mu^2\eta^2 P^2 + \eta^2\lambda^2 Q^2 + \lambda^2.\mu^2.R^2.$$

En introduisant ces valeurs de α, α', α'' dans l'équation de la courbe sur $x'y'$, on obtient l'équation du cylindre droit qui par son intersection avec le plan donné produit la courbe des points (O). De plus, on voit de nouveau par là que dans le plan donné la direction cherchée est nécessairement unique. Ensuite, $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ étant trouvés, on peut toujours employer les équations (D', P') pour calculer et construire les coordonnées (S, T, U) du point (O) sur chaque droite individuelle $(\alpha, \alpha', \alpha'', p)$. À l'aide des formules précédentes on démontrerait aisément la propriété qui suit: après avoir déterminé dans un plan central quelconque (P), ayant une direction normale (λ,μ,η), la direction naturelle de rotation correspondante $(\alpha, \alpha', \alpha'')$, si l'on construit un nouveau plan central (Q), perpendiculaire à la droite $(\alpha, \alpha', \alpha'')$, la direction permanente de ce second plan coïncide avec la normale au premier plan.

Jusqu' ici nous avons supposé, pour remplir la condition (m), que la direction $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ des droites (D') soit invariable. Supposons au contraire que l'on rende une fois cette direction variable, et que l'on demande de déterminer dans l'espace tout un faisceau de droites, passant toutes par un même point fixe (h, k, l) de l'espace, et formant chacune pour un certain (O) de ses points un axe naturel de rotation du solide que l'on considère.

D'après l'énoncé de ces conditions, les paramètres linéaires p, q prendront évidemment les valeurs:

$$p = \alpha k - \alpha' h \quad , \quad q = \alpha l - \alpha'' h.$$

En les substituant dans les équations (m) et (III) ou (II), et éliminant ensuite de chaque résultat les quantités α, α', α'' à l'aide des valeurs

$$\alpha = \frac{S-h}{R} \quad , \quad \alpha' = \frac{T-k}{R} \quad , \quad \alpha'' = \frac{U-l}{R} \quad , \quad R^2 = (S-h)^2 + (T-k)^2 + (U-l)^2,$$

on obtiendra par (m) la surface hyperbolique:

$$(A-B)(l.S-h.U)(T-k) + (C-A)(k.S-h.T)(U-l) = 0 \ldots (\sigma),$$

et par la condition (III) ou (II) on trouvera celle du troisième degré:

$$(T^2+U^2+S^2-h.S-k.T-l.U)(l.S-h.U) - (S-h)(U-l).E = 0 \quad (\sigma'),$$

de sorte que le faisceau de droites est simplement l'ensemble des génératrices

d'une surface conique de centre (h,k,l) et ayant pour base la courbe d'intersection des deux surfaces (σ, σ').

Sans nous arrêter pour le moment à examiner de plus près la nature de cette courbe d'intersection et la loi de distribution géométrique de ces diverses directions permanentes sur le cône correspondant, ce qui entraînerait peut-être dans des développements étendus, nous nous attacherons au cas particulier où le point fixe serait placé sur l'un quelconque des trois plans d'inertie, et où l'on met la condition que toutes les droites (D') susceptibles de fournir une solution, soient situées dans ce même plan; ce qui nous donnera de nouveau l'occasion de faire ressortir le véritable esprit de la méthode de l'échange progressif qui, telle que nous la prenons, est loin d'être une simple règle mnémonique, et de nous raffermir dans les considérations que nous avons fait valoir précédemment, et surtout aux (§. 9, 10, α) pour expliquer la diversité de solutions dont il y est question. Or pour déduire la solution particulière de la question où le point fixe (h, k, l), ainsi que tout le faisceau, sont dans le plan $x'y'$, par exemple, il faut faire dans les équations (σ, σ'), $l = 0$, $U = 0$, à la fois. Mais dès lors ces équations deviennent identiques; de sorte que la solution générale semble se trouver en défaut, en ne resolvant pas un cas tout particulier. On ne saurait expliquer cette singularité en voulant rémonter aux équations de condition primitives qui pour $l = 0$, $U = 0$, ne donnent absolument rien non plus. En opérant sur le plan $(y'z')$, ce qui suppose $h = 0$, $S = 0$, on trouve encore que les équations (σ,σ') deviennent identiques, de sorte qu'on ne pourrait même en conclure que la question soit possible ou impossible. Mais en opérant une fois sur le plan $(z'x')$, ce qui suppose

$$k = 0 \quad , \quad T = 0,$$

la surface (σ) devient encore identique, et l'équation (σ') donne de son côté la courbe du troisième degré:

$$\text{(C.)} \quad (U^2 - l.U + S^2 - h.S)(hU - lS) - (U - l)(S - h)\left(\frac{C-A}{M}\right) = 0.$$

En s'attachant d'abord purement à la forme de tels résultats, on pourrait se trouver singulièrement embarrassé. Car ne serait-on pas conduit à conclure que sur deux des plans d'inertie il n'y ait pas de solution, ou que du moins elle ne soit pas contenue dans l'analyse même, qui fournit néanmoins une solution bien précise pour le troisième plan d'inertie? Mais l'explication de ces contra-

dictions apparentes est bien simple au fond. D'abord, le fait même du calcul, donnant une solution sur le plan d'inertie $z'x'$, et celui-ci étant d'ailleurs l'un quelconque des trois plans de ce genre, puisque nous n'avons pas eu besoin de dire par exemple que les axes Iz', $I'x'$ sont ceux des moments d'inertie minimum et maximum: il s'ensuit que l'analyse ici resout d'une seule pièce et par une seule formule ce qu'ailleurs elle donne par trois résultats successifs. Ainsi, loin d'offrir une contradiction, elle nous présente sous une forme concise et unique (C), tout ce qu'elle doit donner. En appliquant en effet aux lettres U, S, l, h, C, A la méthode matérielle de l'échange progressif, on obtient la courbe (C') sur le plan $x'y'$; et celle-ci (C') donnerait à son tour la courbe (C'') sur le plan $y'z'$. Or évidemment l'unique équation (C) suffit pour représenter les trois courbes (C, C', C'') à la fois.

Il faut considérer que la courbe d'intersection des surfaces (σ, σ') est le lieu géométrique des points (O), pour chacun desquels la droite du faisceau qui y passe, est un axe naturel de rotation du solide; que pour obtenir l'équation (σ'), on a supprimé un facteur $S-h$ commun à tous les termes du premier membre; ce qui est en effet permis dans le cas le plus général, puisque $S-h=0$ rendrait $\alpha=0$, et ferait gratuitement toutes les droites du faisceau parallèles au plan d'inertie $y'z'$. Mais dans quelques cas particuliers il se peut que $S-h=0$ donne une solution spéciale de la question; de sorte que si l'on veut discuter complètement les divers cas, il faut au préalable retablir le facteur $S-h$ dans l'équation (σ'). Mais nous renonçons, du moins pour le moment, à cette discussion, parceque les conséquences dont elle nous paraît susceptible, sont déjà trouvées par d'autres voies, (voir le memoire cité au §. 1), et nous préferons d'ajouter à tout ce qui précède quelques notes et éclaircissements qui nous paraissent indispensables.

14.

Notes et éclaircissements.

Note I.

Sur le §. 1., *équation* (I', II', III') *et équation:*

$$A,\zeta^3+B,\zeta^2+C,\zeta+D,=0.$$

Je crois devoir fournir au lecteur le moyen de vérifier l'exactitude de mes calculs dans la recherche de valeurs de $A,B,C,D,$ de l'équation $A,\zeta^3+\alpha=0,$

et indiquer la marche suivie pour parvenir à cette équation. Si l'on fait la transformation

$$\alpha = \cos\vartheta.\cos\eta\ ,\ \alpha' = \cos\vartheta.\sin\eta\ ,\ \alpha'' = \sin\vartheta\ ,\ \operatorname{tang}\vartheta = z\ ,\ \operatorname{tang}\eta = \zeta,$$

on obtient:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1+z^2).\sqrt{(1+\zeta^2)}}}\ ,\quad \alpha' = \frac{\zeta}{\sqrt{(1+z^2).\sqrt{(1+\zeta^2)}}}\ ,\quad \alpha'' = \frac{z}{\sqrt{(1+z^2)}},$$

ce qui donne aussi les valeurs de $\alpha\alpha'$, $\alpha'\alpha''$, $\alpha''\alpha$; et en les substituant dans les équations (I', II', III'), on transforme celles-ci très aisément dans les trois suivantes:

$$(f+B'\zeta).z.\sqrt{(1+\zeta^2)} + h.z^2(1+\zeta^2) - g\zeta - h\zeta^2 = 0 \ \ldots\ (\text{I}'),$$

$$(A'+f\zeta).z.\sqrt{(1+\zeta^2)} + gz^2(1+\zeta^2) - h\zeta - g = 0 \ \ldots\ (\text{II}'),$$

$$(A'+B').\zeta + f\zeta^2 - f + (g\zeta - h).z.\sqrt{(1+\zeta^2)} = 0 \ \ldots\ (\text{III}').$$

En prenant $z\sqrt{(1+\zeta^2)} = u$, comme une seule inconnue, on déduit de (III'), qui est du premier degré par rapport à u:

$$u = -\frac{(A'-B')\zeta + f\zeta^2 - f}{g\zeta - h}.$$

En substituant cette valeur de u dans l'équation (II'), on a:

$$-(A'+f\zeta)\cdot\frac{(A'-B')\zeta+f\zeta^2-f}{g\zeta-h} + g\cdot\frac{[(A'-B')\zeta+f\zeta^2-f]^2}{(g\zeta-h)^2} - (g+h\zeta) = 0$$

ou bien:

$$\{g[(A'-B')\zeta+f\zeta^2-f] - (A'+f.\zeta)(g\zeta-h)\}.[(A'-B')\zeta+f\zeta^2-f] - (g+h\zeta)(g\zeta-h)^2 = 0.$$

Mais en effectuant d'abord les calculs indiqués sur le premier facteur du premier terme, on reconnait aisément que ce facteur se reduit à:

$$A'h - gf + (fh - gB')\zeta,$$

de sorte que l'équation même devient:

$$(\text{D.})\quad [A'h - gf + (fh - gB')\zeta][(A'-B')\zeta + f\zeta^2 - f] - (g+h\zeta)(g\zeta-h)^2 = 0,$$

ou, en effectuant les opérations:

$$\text{(E.)}\quad \left\{\begin{aligned}&(f^2h - fgB' - g^2h)\zeta^3 - A'fh + gf^2 - gh^2\\ &+ [(A'-B').(fh - gB') - g^3 - gf^2 + 2gh^2 + A'fh].\zeta^2\\ &+ [(A'h - gf).(A'-B') - f(fh - gB') + 2g^2h - h^3].\zeta\end{aligned}\right\} = 0.$$

Pour obtenir ensuite les valeurs des coëfficients de $\zeta^3, \zeta^2, \zeta, \zeta^0$, dans cette équation, en fonction des données immédiates A, B, C, S, T, U, M, il faut se rappeler que l'on a fait

$$A' = M.(S^2 - U^2) + \int x'^2\,dm - \int z'^2\,dm\,,$$
$$B' = M.(T^2 - U^2) + \int y'^2\,dm - \int z'^2\,dm\,,$$

d'où: $$A' - B' = M.(S^2 - T^2) + \int x'^2\,dm - \int y'^2\,dm\,.$$

Donc, puisque $\int x'^2\,dm = \frac{1}{2}(C - A + B)$, $\int y'^2\,dm = \frac{1}{2}(A - B + C)$, $\int z'^2\,dm = \frac{1}{2}(B - C + A)$, on obtient:

$$A' = C - A + M.(S^2 - U^2) \quad , \quad B' = C - B + M.(T^2 - U^2)$$
$$\text{et } A' - B' = B - A + M.(S^2 - T^2)\,,$$
$$f = M.S.T \quad , \quad g = M.S.U \quad , \quad h = M.T.U\,.$$

En substituant ces valeurs de A', B', f, g, h dans les coëfficients des divers termes de l'équation (E), on vérifiera l'exactitude des valeurs que j'ai données dans le texte pour les coëfficients. On pourra commencer par reconnaître que tous les termes dans chaque coëfficient, independants des moments d'inertie A, B, C, se détruisent identiquement; ce qui abrège considérablement le travail des reductions à effectuer pour chaque coëfficient.

Pour contrôler l'exactitude de l'équation (E) même, nous avons procédé de la manière suivante. Les équations (I', II') donnent, eu égard à la signification de u:

$$h.u^2 + (f + B'\zeta)\,u - (g\zeta + h\zeta^2) = 0\,,$$
$$g.u^2 + (A' + f\zeta)\,u - (g + h\zeta) = 0\,.$$

Éliminant seulement le terme en u^2, entre celles-ci, on en tire une équation en u qui donne:

$$u = \frac{(g + h\zeta).(h - g\zeta)}{A'h - gf + (fh - gB')\zeta} .$$

En égalant cette valeur de u à celle qui a été déduite plus haut de l'équation (III′), on retrouve en effet l'équation (D), d'où l'équation (E) est déduite. Du reste, cela doit arriver, parceque l'une quelconque des trois équations (I′, II′, III′) est une conséquence des deux autres. Il est vrai que nous n'avons pour ainsi dire fait aucun usage de la valeur même des quantites $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$, $D_{,}$ pour établir nos conclusions relatives aux axes naturels, et que nous avons presque constamment fait usage des équations de conditions mêmes (I′, II′, III′); néanmoins il était utile de calculer $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$, $D_{,}$ et de vérifier l'exactitude de leurs valeurs; car rien ne prouve que l'on ne puisse en faire un usage utile et immédiat. Ainsi par exemple on voit que ces quantités $A_{,}$, $B_{,}$...., étant toutes les quatre des quatrième et deuxième degrés par rapport aux coordonnées (S, T, U), ne changent pas de valeurs, quand on y change à la fois les signes de (S, T, U): donc la quantité ζ reste la même pour les mêmes valeurs absolues des coordonnées, prises à la fois comme positives ou comme négatives. Mais à une même valeur de ζ repond le même z ou le même ϑ; ainsi, en deux points (O, O') d'un solide, pris à des distances du centre égales et opposées, les trois axes permanents sont deux-à-deux parallèles entr'eux.

Note II, relative au §. 11 fin.

Ayant une fois reconnu l'existence de la solution qui repond à $\beta = 0$ dans la question générale, on en conclut, conformément au texte, qu'il doit y avoir une deuxième solution générale, correspondante à $\beta' = 0$, et une troisième, fournie par β.

Mais pour s'assurer qu'il en est ainsi, il n'est point nécessaire de recommencer par rapport à T tous les calculs effectués d'abord par rapport à la lettre S, pour parvenir aux équations (S). Il suffira:

I°. de vérifier que les équations (I, II, §. 4) sont satisfaites identiquement par $\beta' = 0$, après qu'on y aura substitué les valeurs de S, U en fonction de T, savoir:

$$S = (T\beta + \eta D) : \beta' , \qquad U = (\beta''.T - \lambda D) : \beta'$$

$$f = M.(\beta T^2 + \eta D.T) : \beta' , \quad g = (\beta T + \eta D).(\beta'' T - \lambda D) : \beta'^2$$

$$h = (\beta'' T^2 - \lambda D.T) : \beta'.$$

Or en effectuant ces substitutions dans (I, II), reduisant ensuite tous les termes de chaque résultat au dénominateur commun β'^2, et y faisant ensuite $\beta' = 0$, après l'expulsion du dénominateur, on reconnait aisément que chaque équation est satisfaite par $\beta' = 0$.

II. L'hypothèse $\beta' = 0$ appliquée aux équations (P, P'):

$$\left.\begin{aligned} T.\beta - S.\beta' + \eta.D &= 0 \\ U.\beta' - S.\beta'' + \lambda.D &= 0 \\ S.\beta'' - U\beta + \mu.D &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (P, P'),$$

laisse évidemment S, U indéterminés, et donne pour T la valeur $T = -\eta D:\beta$; ce qui prouve que le point (O) occupe dans un plan $T = -\eta D:\beta$, parallèle à celui (x', z'), une position indéterminée sur une droite (P, P'); partant que ce point peut être calculé d'après la condition mécanique d'une percussion nulle. On peut vérifier en effet que cette valeur de $T = -\eta D:\beta$ reproduit celle de $T_, = -\alpha'.D$, en mettant pour α', D les valeurs qu'ils prennent pour $\beta' = 0$. On trouve par là:

$$T_, = a\lambda + (a\eta - b\mu)\eta : \lambda ,$$

et en remplaçant dans $T = -\eta D:\beta$, D, β par leurs valeurs pour $\beta' = 0$, on trouve encore la même chose, ou $T = T_,$; comme cela doit être. On trouverait de méme $T_2 = T_1 = T$. On vérifierait aussi aisément l'exactitude de sa solution qui repond à $\beta'' = 0$.

Note III.

Il convient de rappeler une propriété essentielle que nous avons admise tacitement dans le courant du texte et que l'on a oubliée de signaler avant que d'entrer en matière; elle consiste en ce-ci. Pour percuter et ebranler un solide autour d'un axe permanent d'un point fixe, il est nécessaire et suffisant que la force agisse suivant une droite située dans le plan permanent des deux autres axes naturels de rotation. (Voir pour la démonstration le tome 43, cahier 2, remarques VII et IX.)

Note IV.

On peut faire remarquer en passant que dans les équations d'une droite $\alpha T - \alpha' S = P$, $\alpha' U - \alpha'' T = Q$, $\alpha'' S - \alpha U = R$, les trois constan-

tes P, Q, R n'expriment pas seulement des perpendiculaires réduites; qu'en outre la ligne P exprime le produit de la plus courte distance D_z entre la droite et l'axe Oz, par le sinus de l'angle compris entre leurs directions. En nommant D_x, D_y les plus courtes distances entre la droite et les axes Ox, Oy, on trouve pour Q, et R une signification analogue. Puisque donc on a l'équation de condition

$$\alpha''.P + \alpha.Q + \alpha'.R = 0,$$

on doit avoir aussi:

$$D_z.\alpha''.\sqrt{(1-\alpha''^2)} + D_x.\alpha.\sqrt{(1-\alpha^2)} + D_y.\alpha'.\sqrt{(1-\alpha'^2)} = 0:$$

équation de condition qui doit subsister entre les plus courtes distances d'une droite à trois axes coordonnés rectangles. Ainsi, soit qu'on introduise les constantes P, Q, R dans les équations d'une droite, soit qu'on y emploie les plus courtes distances D_z, D_x, D_y, on n'a jamais que deux constantes distinctes, d'où résulte la troisième.

Note V.

Échange progressif des lettres: Après avoir donné dans mes mémoires divers exemples de cette méthode, il convient de l'expliquer brièvement d'une manière générale. Supposons que l'on ait à opérer sur neuf quantités, trois coordonnées rectangles (x, y, z), trois composantes rectangles (X, Y, Z) de forces, et trois moments d'inertie A, B, C d'un solide relatifs aux trois axes coordonnés. Si l'on a trouvé pour l'expression d'une certaine quantité Q_{zx}, relative au plan (z, x) la valeur ou la loi de composition analytique:

$$Q_{z,x} = \varphi(z, y, Z, X, C, A, B),$$

la méthode de l'échange progressif consiste à trouver la quantité analogue $Q_{x,y}$ relative au plan xy, sans nouveaux calculs; et à déduire de là la quantité analogue $Q_{y,z}$ relative au troisième plan (y, z). À cet effet on déduira $Q_{x,y}$ de $Q_{z,x}$ en avançant dans la valeur de celle-ci toutes les lettres d'un rang, en allant de gauche à droite, de z vers x, de x vers y, et de y vers z. Ainsi, de la combinaison de lettres z, y, Z, X, C, A, B qui donne $Q_{z,x}$, on déduira la nouvelle combinaison x, z, X, Y, A, B, C, qui doit donner $Q_{x,y}$; et de celle-ci cette troisième ... y, x, Y, Z, B, C, A qui donnera $Q_{y,z}$. On obtient donc par là:

$$Q_{x,y} = \varphi(x, z, X, Y, A, C, B) \quad , \quad Q_{y,x} = \varphi(y, x, Y, Z, B, A, C).$$

On pourrait déduire aussi $Q_{y,z}$ de $Q_{z,x}$ par voie retrograde, en reculant toutes les lettres d'un rang dans celle-ci; ce qui est manifeste, puisque la dernière résulte elle-même de $Q_{y,z}$ par la voie progressive.

Dans les mémoires précédents nous avons donné divers exemples de cette méthode de l'échange progressif et regressif. Mais quelques cas traités dans le travail actuel, nous paraissent jeter une nouvelle lumière sur ce sujet. Ainsi le cas, traité à la fin du (§. 13), est tel que les équations de condition relatives aux deux plans $x'y'$, $y'z'$ deviennent identiques, ce qui pourrait conduire à des conséquences erronnées, si, avant d'établir aucune conclusion, on n'examinait ce que la même analyse générale doit donner pour le troisième plan coordonné $z'x'$. Or il arrive qu'alors elle donne la courbe

$$(C.)\quad (U^2 - l.U + S^2 - h.S)(h.U - l.S) + (U - l)(S - h)\frac{C - A}{M} = 0\,,$$

et de là on conclut immédiatement que sur le plan $x'y'$ on doit obtenir la courbe

$$(C'.)\quad (S^2 - h.S + T^2 - k.T)(k.S - h.T) + (S - h)(T - k)\frac{A - B}{M} = 0.$$

Ainsi, d'une part l'analyse ne fournit d'abord rien sur le plan $x'y'$; tandis que par l'examen du résultat qu'elle produit pour le plan $(z'x')$, elle nous conduit d'autre part à admettre la courbe (C') sur le plan $x'y'$; et c'est par là même qu'elle se sauve de toute contradiction.

On voit par là qu'il peut se faire que l'analyse ne donne d'une question qu'une solution unique en apparence, et qu'il en existe néanmoins une pluralité de solutions différentes. Les discussions établies aux (§. 9, 10, 11) de ce travail en fournissent une nouvelle preuve et offrent un exemple rémarquable dans ce genre. Ajoutons finalement que la méthode de l'échange progressif à laquelle se rattachent essentiellement ces dernières considérations relatives à une solution multiple, quoiqu' unique en apparence, peut être employée avec avantage dans la plupart des applications de l'analyse à la géométrie; néanmoins il nous paraît difficile d'indiquer d'une manière à la fois générale et précise, les cas où elle est susceptible d'application, et ceux où elle ne l'est point; nous n'oseriont même affirmer que la question qui naît de là, soit en elle même insignifiante, ou qu'elle ait une importance propre.

Note VI. Terminologie et notations.

Comme la considération de la direction d'une droite est très importante, surtout en mécanique, on peut nommer pour abréger, *coëfficients de direction*

les cosinus des angles que forme cette droite, prise dans un sens convenu avec les trois axes coordonnés rectangles. α, α', α'' désignant ces coïfficients, on dit que la droite a la direction $(\alpha, \alpha', \alpha'')$; et S, T, U désignant les coordonnées d'un quelconque de ses points, on représente ses équations par les formules symétriques

$$\alpha T - \alpha' S = P \quad , \quad \alpha' U - \alpha'' T = Q \quad , \quad \alpha \ldots$$

dans lesquelles les quantités P, Q, R sont liées entr'elles par une équation de condition connue $P\alpha'' + Q\alpha + R\alpha' = 0$ qui exprime que l'une quelconque des trois formules est une conséquence identique des deux autres; ce qui doit être en effet. La position d'un plan étant déterminée par la direction (λ, μ, η) de sa normale et par la distance D de l'origine au plan, distance qui a aussi (λ, μ, η) pour direction, on peut toujours représenter son équation entre les coordonnées courantes S, T, U de l'un quelconque de ses points par la formule

$$\lambda S + \mu T + \eta U - D = 0 .$$

Cette représentation est beaucoup plus commode dans les théories mécaniques, surtout que celle de la géométrie analytique ordinaire; et la théorie si importante des moments de rotation des forces y conduit d'elle-même, comme à la méthode de l'échange progressif et à des propriétés géométriques que les transformations purement analytiques laissent à l'état de lettre morte.

Souvent quand les notations relatives à diverses directions se multiplient trop, au point de fatiguer la mémoire, nous y substituons, du moins momentanément, des notations analogues à celles de la géométrie de position de *Carnot*, qui soulagent la mémoire et permettent à l'esprit de se préoccuper exclusivement du fond même du sujet. De cette façon on peut lire en quelque sorte la signification géométrico-mécanique des formules et en déduire plus aisément les propriétés générales qu'elles représentent. Or cette déduction et l'énoncé en langage ordinaire, de ces propriétés doivent constituer le but final du géomètre dans les recherches mécaniques; et sous ce rapport la science de l'équilibre des forces, et du mouvement des corps offre encore un vaste champ de recherches à parcourir.

Au centre d'inertie d'un solide on peut toujours déterminer trois axes rectangles au moins, dont chacun forme un axe absolu d'équilibration des forces centrifuges. Si le solide est mis en mouvement de rotation autour d'un tel axe, les forces centrifuges, ou réactions d'inertie normales qui naîssent de là, et qui subsistent à chaque instant ultérieur, par l'effet de l'inflexion angulaire momentanée de chaque molécule, se font l'équilibre sur l'axe, censé parfaitement libre après que l'impulsion sera une fois imprimée au corps. En effet, cet axe est par défi-

nition déterminé d'après la condition que l'énergie des forces centrifuges à la tourner autour de tout autre axe fixe du centre, soit nulle. De plus, la résultante effective de ces forces doit par là même, subsister et se transmettre au centre *I*, rendu fixe pendant l'instant du choc: mais il est aisé à voir que cette résultante est nulle d'elle même; de sorte que les agents centrifuges laisseraient absolument au repos l'axe qu'ils sollicitent, alors même que celui-ci serait parfaitement libre. De plus, les réactions d'inertie tangentielles sont nulles dans le mouvement uniforme de rotation qui résulte de l'impulsion. C'est pourquoi je nomme toute ligne de ce genre dans un solide, *axe d'inertie*, rejetant la dénomination *d'axe principal* qu'il convient de reserver à chacun des diamètres conjugués rectangles dans les courbes et surfaces courbes du second ordre. En conséquence de cela je nomme *plan d'inertie* l'un quelconque des plans formés par les trois axes d'inertie pris-à-deux.

Quand une fois on cherche les axes d'équilibration des forces centrifuges dans un solide pourvu d'un point fixe quelconque (*O*), on trouve encore trois directions rectangles en ce point; mais alors ces forces, sans tendre encore à tourner l'axe autour de tout autre axe du point fixe, auront néanmoins une résultante effective qui passe en ce point. Ainsi, pour rester complètement immobile, l'axe de rotation doit conserver le point fixe (*O*), et n'est par conséquent plus qu'un *axe d'équilibration relative*: mais cette dernière dénomination étant encore un peu longue, je préfére conserver celle qui est plus usitée: *axe permanent*, ou celle *d'axe naturel de rotation*, déjà employée par *Euler*. C'est pourquoi on peut nommer *plan permanent* tout plan du point fixe, déterminé par les axes permanents pris deux-à-deux. Dans la théorie ordinaire on confond sous la dénomination d'axes principaux, les deux genres de lignes ou axes dont il s'agit; et l'on y emploie un procédé de généralisation inopportune, puisque la première difficulté à vaincre consiste dans la détermination des trois axes d'inertie: et cette difficulté étant une fois surmontée, on peut seulement demander ensuite de trouver en un point fixe quelconque du solide, les axes naturels ou permanents de rotation, par rapport aux directions des axes d'inertie. Or le (§. 1) de ce travail resout cette question; et c'était sur ce terrain nouveau qu'il fallait d'abord la transporter avant que de pouvoir en venir au problème général réciproque qui forme le principal objet de ce mémoire. Pour mieux justifier la marche que nous avons suivie dans la théorie des axes d'inertie et permanents, il faut considérer que la fameuse équation du troisième degré à laquelle on parvient dans toutes les méthodes, ne peut guéres servir qu'à constater l'existence de ces axes; que pour obtenir du moins la direction des axes d'inertie dans un très grand nombre de cas particuliers,

il faut recourir, non pas à cette équation, mais a quelques considérations de symétrie géométrique qui, en combinaison avec la définition même, font voir immédiatement que dans les solides homogènes les axes d'inertie coïncident avec les axes de symétrie directe du solide. Ainsi donc, pour tout solide homogène pourvu d'axes de symétrie directe, la question des axes d'inertie se trouve complètement resolue. Pour avoir ensuite les directions des axes permanents d'un tel solide, relatifs à un point fixe quelconque, il faut recourir à l'analyse du (§. 1). Il est vrai que celle ci mène aussi à une équation du troisième degré; mais celle-ci ne renferme du moins aucun terme constant qui ne puisse être aisément évalué; puisque ses coëfficients $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$, $D_{,}$ se composent uniquement des moments d'inertie principaux relatifs au centre, et des coordonnées du point fixe rapporté aux axes d'inertie. Mais les quantités de la forme $\int xy\,dm$, $\int yz\,dm$, $\int zx\,dm$ qui s'évaluent, il est vrai, comme des moments d'inertie, dont le calcul est néanmoins très difficile, se trouvent exclues dans le cas actuel. Ainsi donc, dans le cas dont il s'agit, et qui se présentent peut-être seuls dans les applications pratiques de la mécanique, la question des axes d'inertie et des axes permanents se trouve resolue de fait par notre marche, et sans avoir besoin de présupposer applanies des difficultés le plus souvent invincibles. Après cela nous retombons dans l'ornière ordinaire pour le cas général où il s'agit de solides qui sont dépourvu d'axes de symétrie. En effet, dès lors on ne voit plus par l'aide de la symétrie les axes d'inertie; et l'on en est réduit à les calculer par une équation du troisième degré, renfermant comme constantes les moments d'inertie du solide relatifs à trois axes coordonnés rectangles, et les quantités $\int xy\,dm$, $\int yz\,dm$, $\int zx\,dm$; or c'est surtout le calcul de ces quantités qui constitue la vraie difficulté de la question, et jusqu'à ce jour ce calcul me paraît avoir été trop négligé. Je termine donc en proposant quelques questions qui se rapportent à se sujet:

I. Calculer les moments d'inertie des polyèdres reguliers, relatifs à trois de leurs axes d'inertie rectangulaires.

II. Calculer les moments d'inertie d'un tétraèdre quelconque relatifs à trois axes coordonnés rectangles ayant l'origine au centre; puis les intégrales $\int xy\,dm$, $\int yz\,dm$, $\int zx\,dm$, *et déduire de là la direction des trois axes d'inertie.*

III. Calculer le moment d'inertie d'une pyramide par rapport à la hauteur par rapport à deux axes rectangulaires passant par le pied de la hauteur, et situés dans le plan de la base.

Bruxelles, ce 9. Mai 1852.

2.

Application des transcendantes abéliennes à la théorie des fractions continues.

(Par Mr. *C. W. Borchardt* de Berlin.)

Un des résultats mémorables que l'analyse doit à *Abel*, est la liaison trouvée par lui entre les propriétés des intégrales à différentielles irrationnelles et le développement des fonctions irrationnelles en fractions continues. En cherchant les conditions sous lesquelles les intégrales de la forme $\int \frac{fx}{\sqrt{X}}dx$, fx et X désignant des fonctions entières de x, peuvent être évaluées en logarithmes, il est parvenu à faire dépendre cette évaluation d'un caractère spécial qui affecte en même temps le développement de $\sqrt{X}$ en fraction continue. (Voir Tome I, pag. 185 de ce Journal ou Tome I, pag. 33 des oeuvres complètes d'*Abel*.)

Jacobi, en poursuivant les recherches d'*Abel*, est allé plus loin; en se bornant au cas, où X est du quatrième degré et $\int \frac{fx}{\sqrt{X}}dx$ une intégrale elliptique, il a établi une liaison plus générale que celle qui avait été trouvée par *Abel*, liaison qui existe même lorsque l'intégrale $\int \frac{fx}{\sqrt{X}}dx$ ne peut pas être évaluée en logarithmes. Le résultat auquel il est parvenu, est en quelque sorte l'inverse du résultat obtenu par *Abel*. Au lieu de faire dépendre certaines propriétés des intégrales elliptiques $\int \frac{fx}{\sqrt{X}}dx$ (X représentant une fonction du quatrième degré) du développement de $\sqrt{X}$ en fraction continue, il a, au contraire, donné des formules qui font dépendre le développement de $\sqrt{X}$ en fraction continue de la multiplication des intégrales elliptiques. (Voir Tome VII, pag. 41 de ce Journal.)

Mais les formules de *Jacobi* se rapportent exclusivement au cas, où X ne dépasse pas le quatrième degré, et, même pour ce cas, elles ont été publiées par lui sans démonstration. On ne connaît pas la route qui l'y a conduit, mais quel-

ques remarques faites dans son mémoire cité ci-dessus portent à croire qu'elle a été entièrement différente de celle qui a été suivie dans les recherches dont on va lire l'exposé. Le présent mémoire donne une méthode directe pour établir la liaison générale qui existe entre le développement de la racine carrée $\sqrt{X}$ d'une fonction entière de degré pair en fraction continue et la multiplication des intégrales abéliennes $\int \frac{fx}{\sqrt{X}} dx$; et cette méthode conduit tant aux formules de *Jacobi* exprimées en fonctions elliptiques, lorsqu'on suppose X être une fonction du quatrième degré, qu'à des formules plus générales exprimées en fonctions abéliennes, lorsqu'on laisse indéterminé le degré de X.

1.

Soit x une variable indépendante, et X une fonction de x du degré pair 2ν, dans laquelle la plus haute puissance de x est affectée d'un coëfficient positif $= A^2$, A représentant une constante positive, différente de zéro; le procédé employé par *Abel* dans son mémoire cité ci-dessus pour développer $\sqrt{X}$ en fraction continue se réduit aux opérations suivantes:

Il n'y a qu'une seule manière de satisfaire à l'équation

$$X = r_0^2 + s_0 ,$$

en sorte que r_0 et s_0 soient des fonctions entières de x,
que s_0 soit d'un degré moindre que ν,
que le signe de r_0 soit pris de façon que la plus haute puissance de x s'y trouve multipliée par $+A$.

Considérons le radical $\sqrt{X}$ pour des valeurs de x comprises entre la plus petite racine réelle de l'équation $X = 0$ et $-\infty$, ou entre la plus grande racine et $+\infty$. Ce radical pouvant être pris avec le signe $+$ ou le signe $-$, il ne sera entièrement déterminé que l'orsqu'on aura fait une convention précise sur son signe. Entre les limites assignées pour la variable x ce signe est déterminé sans ambiguité par la double condition: 1^0 que $\sqrt{X}$ varie d'une manière continue avec x, 2^0 que pour des valeurs numériques de x indéfiniment croissantes positives ou négatives, le rapport de $\sqrt{X}$ à Ax^ν converge vers l'unité positive.

Cela posé, faisons

$$\sqrt{X} = r_0 + \frac{1}{w_0} , \quad \text{d'où}$$

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{X} - r_0} = \frac{\sqrt{X} + r_0}{s_0} \quad , \quad \frac{1}{w_0} = \frac{s_0}{\sqrt{X} + r_0} \, .$$

Pour des valeurs numériques de x indéfiniment croissantes le dénominateur $\sqrt{X} + r_0$ de $\frac{1}{w_0}$ divisé par $A x^{\nu}$ converge vers 2, tandis que son numérateur s_0 divisé par la même quantité converge vers zéro, donc $\frac{1}{w_0}$ converge aussi vers zéro; donc r_0 est la fonction entière de x déterminée de manière que la différence $\sqrt{X} - r_0$ s'évanouit pour des valeurs infinies de x. *)

Soit

$$r_0 = v_0 s_0 + u_0 \, ,$$

v_0 représentant le quotient, et $\frac{u_0}{s_0}$ le reste de la division de r_0 par s_0; faisons

$$w_0 = 2v_0 + \frac{1}{w_1} \text{ d'où}$$

$$w_1 = \frac{1}{w_0 - 2v_0} = \frac{\sqrt{X} + r_1}{s_1} \, ,$$

$$r_1 = 2v_0 s_0 - r_0 = r_0 - 2u_0 \quad , \quad s_1 = 1 + 4u_0 v_0 \, .$$

La quantité r_1 est du degré ν tandis que s_1 ne peut pas dépasser le degré $\nu - 1$, donc en ayant égard au signe de $\sqrt{X}$ on reconnaît que pour des valeurs numériques de x indéfiniment croissantes, $\frac{1}{w_1}$ converge vers zéro.

Soit

$$r_1 = v_1 s_1 + u_1 \, ,$$

v_1 représentant le quotient, et $\frac{u_1}{s_1}$ le reste de la division de r_1 par s_1, faisons

$$w_1 = 2v_1 + \frac{1}{w_2} \text{ d'où}$$

$$w_2 = \frac{1}{w_1 - 2v_1} = \frac{\sqrt{X} + r_2}{s_2} \, ,$$

$$r_2 = 2v_1 s_1 - r_1 = r_1 - 2u_1 \quad , \quad s_2 = s_0 + 4u_1 v_1 \, .$$

---

*) Si l'on définit de cette manière la fonction r_0, la notion de *la fonction entière contenue dans une fonction donnée*, notion qui a sa source dans les fonctions rationnelles fractionnaires, prend un sens si général, qu'elle s'applique en même temps à une classe très-étendue de fonctions irrationnelles.

La quantité r_2 est du degré ν tandis que s_2 ne peut pas dépasser le degré $\nu - 1$ etc. etc.

En répétant ces opérations un nombre indéfini de fois, on arrive au développement suivant de $\sqrt{X}$ en fraction continue:

$$(1.)\quad \sqrt{X} = r_0 + \frac{1}{2v_0 + \frac{1}{2v_1 + \frac{1}{2v_2 + \cdots + \frac{1}{2v_{n-1} + \frac{1}{w_n}}}}}.$$

w_n, le quotient complet de la fraction continue (1), est donné par l'équation

$$(2.)\qquad w_n = \frac{\sqrt{X} + r_n}{s_n},$$

et les quantités $r_0, r_1, \ldots r_n \ldots; s_0, s_1, \ldots s_n \ldots; v_0, v_1, \ldots v_n \ldots$ sont définies par le système suivant d'équations:

$$(3.)\quad \begin{cases} X = r_0^2 + s_0 \\ r_0 = v_0 s_0 + u_0 \\ r_1 = v_1 s_1 + u_1 \\ \vdots \\ r_{n-1} = v_{n-1} s_{n-1} + u_{n-1} \\ r_n = v_n s_n + u_n\,. \end{cases} \qquad (4.)\quad \begin{cases} r_1 = 2v_0 s_0 - r_0 = r_0 - 2u_0 \\ r_2 = 2v_1 s_1 - r_1 = r_1 - 2u_1 \\ \vdots \\ r_n = 2v_{n-1} s_{n-1} - r_{n-1} = r_{n-1} - 2u_{n-1} \\ r_{n+1} = 2v_n s_n - r_n = r_n - 2u_n. \end{cases}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} s_1 = 1 + 4u_0 v_0 \\ s_2 = s_0 + 4u_1 v_1 \\ \vdots \\ s_n = s_{n-2} + 4u_{n-1} v_{n-1} \\ s_{n+1} = s_{n-1} + 4u_n v_n\,. \end{cases}$$

Pour vérifier ces équations on n'a qu'à considérer les relations qui lient entre eux les quotients complets consécutifs, savoir:

$$w_{n-1} = 2v_{n-1} + \frac{1}{w_n},$$

$$w_n = 2v_n + \frac{1}{w_{n+1}},$$

$$w_{n-1} = 2v_{n-1} + \frac{1}{2v^n + \frac{1}{w_{n+1}}} = 2v_{n-1} + \frac{w_{n+1}}{2v_n w_{n+1} + 1}.$$

En substituant dans la première et la troisième de ces relations les valeurs de w_{n-1}, w_n, w_{n+1} tirées de la formule (2), on trouve:

$$(\sqrt{X} + r_{n-1} - 2v_{n-1}s_{n-1}).(\sqrt{X} + r_n) = s_n s_{n-1},$$

$$(\sqrt{X} + r_{n-1} - 2v_{n-1}s_{n-1}).(2v_n\sqrt{X} + 2v_n r_{n+1} + s_{n+1}) = s_{n-1}(\sqrt{X} + r_{n+1}),$$

d'où, en égalant de part et d'autre la partie irrationnelle à la partie irrationnelle, on obtient:

$$r_n = 2v_{n-1}s_{n-1} - r_{n-1},$$

$$s_{n-1} = s_{n+1} + 2v_n r_{n+1} + 2v_n(r_{n-1} - 2v_{n-1}s_{n-1}),$$

$$= s_{n+1} + 2v_n(r_{n+1} - r_n),$$

ce qui démontre les équations (4), (5).

Les quantités r_0, r_1.... sont toutes du degré ν, les quantités s_0, s_1...., u_0, u_1.... ne peuvent pas dépasser respectivement les degrés $\nu - 1$, $\nu - 2$, les quantités v_0, v_1.... sont au moins du premier degré. Les degrés des quantités r_i, s_i et le signe donné au radical $\sqrt{X}$ sont tels que pour des valeurs numériques de x indéfiniment croissantes les valeurs numériques des quotients complets w_i croissent aussi jusqu'à l'infini. Si l'on ne dispose pas d'une manière particulière des coëfficients qui entrent dans la fonction X, les quantités s_i et v_i sont précisément des degrés $\nu - 1$ et 1. Dans ce cas, auquel se rapportent les considérations suivantes, le développement de $\sqrt{X}$ en fraction continue sera nommé *régulier.**)

Formons à présent les réduites de la fraction continue (1) et posons

$$\frac{p_0}{q_0} = r_0, \quad \frac{p_1}{q_1} = r_0 + \frac{1}{2v_0}, \quad \frac{p_2}{q_2} = r_0 + \frac{1}{v_0 + \frac{1}{v_1}} \text{ etc.},$$

---

*) Le cas *irrégulier* dans lequel les quantités s_0, s_1..... peuvent s'abaisser au-dessous du degré $\nu - 1$ tandis que v_0, v_1..... peuvent dépasser le premier degré, offre un grand intérêt, car les irrégularités du développement de $\sqrt{X}$ annoncent (comme *Abel* l'a montré dans le cas le plus simple) une réduction correspondante d'intégrales abéliennes à des intégrales du même genre et d'un ordre moins élevé. Mais cette importante matière mérite d'être prise pour objet d'un travail à part.

les numérateurs $p_0, p_1 \ldots$ et les dénominateurs $q_0, q_1 \ldots$ sont donnés par le système d'équations:

$$(6.)\quad \begin{cases} p_0 = r_0 \\ p_1 = 2v_0 p_0 + 1 \\ p_2 = 2v_1 p_1 + p_0 \\ \vdots \\ p_n = 2v_{n-1} p_{n-1} + p_{n-2} \\ p_{n+1} = 2v_n p_n + p_{n-1}\,. \end{cases} \qquad (7.)\quad \begin{cases} q_0 = 1 \\ q_1 = 2v_0 \\ q_2 = 2v_1 q_1 + q_0 \\ \vdots \\ q_n = 2v_{n-1} q_{n-1} + q_{n-2} \\ q_{n+1} = 2v_n q_n + q_{n-1}\,. \end{cases}$$

Dans le cas *régulier* que nous considérons chacun des quotients $v_0, v_1 \ldots$ est du premier degré, donc $q_0, q_1, q_2 \ldots q_n \ldots$ sont des degrés $0, 1, 2, \ldots n, \ldots$ et $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n \ldots$ des degré $\nu, \nu+1, \nu+2, \ldots \nu+n \ldots$ Ces quantités satisfont à l'équation connue:

$$(8.)\qquad p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1},$$

commune à toutes les fractions continues dans lesquelles les numérateurs partiels sont égaux à l'unité. Elles satisfont en outre à des relations spéciales qui n'ont lieu que pour la fraction continue proposée, et qui établissent une liaison entre les quantités p_n, q_n, d'une part, et les quantités r_n, s_n d'autre part. En effet, divisant les deux dernières des équations (6), (7), l'une par l'autre, on obtient:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{2v_n p_n + p_{n-1}}{2v_n q_n + q_{n-1}}\,.$$

Si l'on remplace le quotient partiel $2v_n$ par le quotient complet w_n, la réduite $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ se change en la vraie valeur $\sqrt{X}$ de la fraction continue, et il vient:

$$(9.)\qquad \sqrt{X} = \frac{p_n w_n + p_{n-1}}{q_n w_n + q_{n-1}}\,.$$

Multipliant par $q_n w_n + q_{n-1}$, substituant la valeur de w_n donnée par l'équation (2) et égalant séparément la partie rationnelle à la partie rationnelle et la partie irrationnelle à la partie irrationnelle, on obtient les deux équations:

$$p_n = q_n r_n + q_{n-1} s_n$$
$$X q_n = p_n r_n + p_{n-1} s_n\,,$$

et de là, en éliminant successivement r_n et s_n, et se servant de l'équation (8):

$$p_n^2 - Xq_n^2 = (-1)^{n-1} s_n \,, \tag{10.}$$

$$p_n p_{n-1} - Xq_n q_{n-1} = (-1)^n r_n \,. \tag{11.}$$

Multipliant l'une par l'autre l'équation (10) et celle que l'on en déduit en remplaçant n par $n-1$, on trouve, à l'aide d'une identité algébrique connue et des équations (8) et (11):

$$r_n^2 - X = -s_n s_{n-1} \quad \text{ou}$$

$$X = r_n^2 + s_n s_{n-1} \,. \tag{12.}$$

Les trois équations (10), (11), (12) se rapportent à toutes les valeurs entières et positives de n et même à $n = 0$, si l'on convient de poser

$$p_{-1} = 1 \quad , \quad q_{-1} = 0 \quad , \quad s_{-1} = 1 .$$

Des équations (8), (9) on déduit:

$$p_n - \sqrt{X}.q_n = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n w_n + q_{n-1}} \,, \tag{13.}$$

d'où l'on conclut qu'avec des valeurs numériques de x indéfiniment croissantes $p_n - \sqrt{X}.q_n$ converge vers zéro.

Le développement actuel de $\sqrt{X}$ en fraction continue tel qu'il est donné par le système de formules que l'on vient d'obtenir, est parfaitement analogue à celui de la racine carrée d'un nombre entier, avec cette seule différence que les fonctions entières y remplacent les nombres entiers.

Les équations (10), (12) sont de la même forme que l'équation algébrique qui sert de base au théorème d'*Abel*, et c'est sur cette concordance que se fonde le moyen de faire dépendre le développement dont il s'agit de la multiplication des intégrales abéliennes. Pour faire à la question qui nous occupe l'application de ce théorème, il convient de le formuler préalablement en un énoncé complet.

Mais auparavant, introduisons, au lieu de x, une nouvelle variable y par une substitution linéaire et fractionnaire. Une telle substitution peut être déterminée de manière qu'en l'introduisant dans les équations (10, 12) elles se changent en d'autres de la même forme, dans lesquelles X est remplacé par une fonction Y du degré $2v-1$ seulement, et ayant les facteurs y, $1-y$. Ainsi déterminée, cette substitution coïncide avec celle par laquelle Mr. *Richelot*, (tome XII,

pag. 181 de ce Journal), réduit les intégrales abéliennes $\int \frac{fx}{\sqrt{X}} dx$ à leur forme canonique.

2.

Supposons pour plus de simplicité que tous les facteurs linéaires de X soient réels et différents entre eux. Posons

$$(14.) \qquad X = (x - a_1)(x - a_2) \ldots\ldots\ldots (x - a_{2\nu}) ,$$

les quantités $a_1, a_2, \ldots . a_{2\nu}$ étant rangées dans l'ordre de leur grandeur relative, de sorte que

$$\text{ou} \qquad a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_{2\nu}$$

$$\text{ou} \qquad a_1 > a_2 > \ldots\ldots > a_{2\nu} .$$

Cela posé, la substitution linéaire et fractionnaire dont on vient de parler, peut être partagée en deux plus simples que nous allons exposer l'une après l'autre.

Introduisons en premier lieu une nouvelle variable z par la substitution linéaire et entière:

$$(15.) \qquad x - a_1 = (a_2 - a_1) z ;$$

$$(16.) \quad \begin{cases} \text{posons} & b_1 = \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} , \quad b_2 = \frac{a_4 - a_1}{a_2 - a_1} , \quad \ldots\ldots b_{2\nu-2} = \frac{a_{2\nu} - a_1}{a_2 - a_1} , \\ \text{d'où} & 1 < b_1 < b_2 < \ldots\ldots < b_{2\nu-2} , \end{cases}$$

de sorte qu'à des valeurs de x, décroissantes depuis a_1 jusqu'à $-\infty$ et de $+\infty$ jusqu'à $a_{2\nu}$ dans le premier cas, ou croissantes depuis a_1 jusqu'à $+\infty$ et de $-\infty$ jusqu'à $a_{2\nu}$ dans le second cas, correspondent dans l'un et l'autre cas des valeurs de z décroissantes depuis 0 jusqu'à $-\infty$ et de $+\infty$ jusqu'à $b_{2\nu-2}$. On aura:

$$(17.) \qquad \sqrt{X} = (a_2 - a_1)^\nu \sqrt{Z} ,$$

$$(18.) \quad Z = z(z-1)(z-b_1)(z-b_2) \ldots\ldots (z - b_{2\nu-2}) ,$$

le radical $\sqrt{Z}$ devant être pris avec le mème signe que z^ν dans l'un et l'autre des deux intervalles de z que l'on considère.

Concevons que le radical $\sqrt{Z}$ soit développé en fraction continue d'après

la méthode du n^0 **1**, la variable z étant considérée comme variable indépendante, et soient $\varpi_n, \chi_n, \varrho_n, \sigma_n, \omega_n = \frac{\sqrt{Z}+\varrho_n}{\sigma_n}$ les quantités qui dans le développement de $\sqrt{Z}$ remplacent les quantités $p_n, q_n, r_n, s_n, w_n = \frac{\sqrt{X}+r_n}{s_n}$ obtenues dans le développement de $\sqrt{X}$; ces nouvelles quantités $\varpi_n, \chi_n \ldots$ se distingueront seulement par des facteurs constants de leurs correspondantes $p_n, q_n \ldots$. En effet, on s'assure aisément que l'on a

$$(19.)\quad \begin{cases} p_{2n} = (a_2 - a_1)^\nu \varpi_{2n} & p_{2n+1} = \varpi_{2n+1} \\ q_{2n} = \chi_{2n} & q_{2n+1} = \frac{1}{(a_2-a_1)^\nu}\ \chi_{2n+1} \\ r_n = (a_2-a_1)^\nu \varrho_n & \\ s_{2n} = (a_2 - a_1)^{2\nu} \sigma_{2n} & s_{2n+1} = \sigma_{2n+1} \\ w_{2n} = \frac{1}{(a_2-a_1)^\nu}\ \omega_{2n} & w_{2n+1} = (a_2-a_1)^\nu \omega_{2n+1}\ . \end{cases}$$

Les valeurs de $\sqrt{X}, p_n, q_n, r_n, s_n$ étant substituées dans les équations (8, 10, 11, 12, 13), celles-ci deviennent

$$(8.)^* \qquad \varpi_n \chi_{n-1} - \chi_n \varpi_{n-1} = (-1)^{n-1},$$

$$(10.)^* \qquad \varpi_n^2 - Z\chi_n^2 = (-1)^{n-1} \sigma_n\ ,$$

$$(11.)^* \qquad \varpi_n \varpi_{n-1} - Z\chi_n\chi_{n-1} = (-1)^n \varrho_n\ ,$$

$$(12.)^* \qquad \varrho_n^2 - Z = -\sigma_n \sigma_{n-1},$$

$$(13.)^* \qquad \varpi_n - \sqrt{Z}.\chi_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\chi_n \omega_n + \chi_{n-1}},$$

équations qui se rapportent même à $n = 0$, si l'on convient de faire

$$\varpi_{-1} = 1 \quad , \quad \chi_{-1} = 0 \quad , \quad \sigma_{-1} = 1\ .$$

Introduisons, en second lieu, une nouvelle variable y au lieu de z par la substitution linéaire et fractionnaire

$$(20.) \qquad \frac{z}{z-1} = \frac{y}{\eta}\ , \qquad z = \frac{y}{y-\eta}\ .$$

Posons

$$(21.)\quad \begin{cases} \eta = \dfrac{b_{2\nu-2}-1}{b_{2\nu-2}}\,, \quad \varkappa_1^2\eta = \dfrac{b_{2\nu-3}-1}{b_{2\nu-3}}\,, \quad \varkappa_2^2\eta = \dfrac{b_{2\nu-4}-1}{b_{2\nu-4}} \ldots . \varkappa_{2\nu-3}^2\eta = \dfrac{b_1-1}{b_1}\,, \\ \text{d'où} \\ b_{2\nu-2} = \dfrac{1}{1-\eta}\,, \quad b_{2\nu-3} = \dfrac{1}{1-\varkappa_1^2\eta}\,, \quad b_{2\nu-4} = \dfrac{1}{1-\varkappa_2^2\eta} \ldots \ldots b_1 = \dfrac{1}{1-\varkappa_{2\nu-3}^2\eta}, \\ 0 < \eta < 1\,, \\ 1 > \varkappa_1^2 > \varkappa_2^2 > \ldots\ldots\ldots > \varkappa_{2\nu-3}^2 > 0\,, \end{cases}$$

de sorte qu'à des valeurs de z décroissantes depuis 0 jusqu'à $-\infty$ et de $+\infty$ jusqu'à $b_{2\nu-2}$ correspondent des valeurs de y croissantes depuis 0 jusqu'à η et de η jusqu'à 1. On aura

$$z = \frac{y}{y-\eta}\,, \quad z-1 = \frac{\eta}{y-\eta}\,, \quad z-b_{2\nu-2} = \frac{\eta}{1-\eta}\cdot\frac{1-y}{y-\eta}\,, \ldots\ldots$$

$$z-b_{2\nu-2-i} = \frac{\eta}{1-\varkappa_i^2\eta}\cdot\frac{1-\varkappa_i^2 y}{y-\eta} \ldots\ldots$$

$$(22.)\qquad \sqrt{Z} = \left(\frac{\eta}{y-\eta}\right)^{\nu}\sqrt{\frac{Y}{H}}\,,$$

$$(23.)\quad \begin{cases} Y = y(1-y)(1-\varkappa_1^2 y)(1-\varkappa_2^2 y) \ldots\ldots\ldots (1-\varkappa_{2\nu-3}^2 y) \\ H = \eta(1-\eta)(1-\varkappa_1^2\eta)(1-\varkappa_2^2\eta) \ldots\ldots\ldots (1-\varkappa_{2\nu-3}^2\eta) \end{cases}$$

le radical $\sqrt{\frac{Y}{H}}$ ayant le signe $+$ dans tout l'intervalle de y depuis 0 jusqu'à 1. Si l'on convient de prendre $\sqrt{H}$ avec le signe $+$, $\sqrt{Y}$ aura donc aussi le signe $+$.

En introduisant y au lieu de z dans ϖ_n, χ_n, ϱ_n, σ_n, $\omega_n = \dfrac{\sqrt{Z}+\varrho_n}{\sigma_n}$, ces quantités prennent la forme:

$$(24.)\quad \varpi_n = \frac{P_n}{(y-\eta)^{n+\nu}}\,, \quad \chi_n = \frac{Q_n}{(y-\eta)^n}\,, \quad \varrho_n = \frac{R_n}{(y-\eta)^{\nu}}\,, \quad \sigma_n = \frac{S_n}{(y-\eta)^{\nu-1}}\,,$$

$$\omega_n = \frac{W_n}{y-\eta}\,, \qquad W_n = \frac{\eta^{\nu}\sqrt{\frac{Y}{H}}+R_n}{S_n}\,,$$

P_n, Q_n, R_n, S_n représentant des fonctions entières de y respectivement des degrés $n+\nu$, n, ν, $\nu-1$. En même temps les équations (8)*, (10)*, (11)*, (12)*, (13)* se changent en:

$$(25.)\quad P_nQ_{n-1} - Q_nP_{n-1} = (-1)^{n-1}(y-\eta)^{2n+\nu-1},$$

$$(26.)\quad P_n^2 - \frac{\eta^{2\nu}}{H} Y Q_n^2 = (-1)^{n-1}(y-\eta)^{2n+\nu+1} S_n,$$

$$(27.)\quad P_nP_{n-1} - \frac{\eta^{2\nu}}{H} Y Q_nQ_{n-1} = (-1)^{n}(y-\eta)^{2n+\nu-1} R_n,$$

$$(28.)\quad R_n^2 - \frac{\eta^{2\nu}}{H} Y = -(y-\eta)^2 S_n S_{n-1},$$

$$(29.)\quad P_n - \eta^{\nu}\sqrt{\frac{Y}{H}}\cdot Q_n = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(y-\eta)^{2n+\nu+1}}{Q_nW_n + (y-\eta)^2 Q_{n-1}}.$$

Le premier membre de l'équation (29) est divisible par $(y-\eta)^{2n+\nu+1}$. En effet, d'après les équations (17, 19, 22, 24) on a:

$$\frac{r_n}{\sqrt{X}} = \frac{\varrho_n}{\sqrt{Z}} = \frac{R_n}{\eta^{\nu}\cdot\sqrt{\frac{Y}{H}}}.$$

Mais, en vertu des conventions faites sur le signe de r_0, en vertu des équations (4), et eu égard aux degrés des quantités $u_0, u_1, u_2 \ldots$, on a pour $y = \eta$, c. à. d. pour $x = \pm\infty$:

$$\frac{r_0}{\sqrt{X}} = 1 \quad , \quad \frac{r_n}{r_0} = 1$$

donc pour $y = \eta$ il vient:

$$R_n = \eta^{\nu}.$$

Par conséquent, pour $y = \eta$ la quantité $W_n = \dfrac{\eta^{\nu}\cdot\sqrt{\frac{Y}{H}} + R_n}{S_n}$, dont le numérateur devient $= 2\eta^{\nu}$, ne peut pas s'évanouir. Pour $y = \eta$, la quantité Q_n ne peut non plus s'évanouir, car si Q_n était divisible par $y-\eta$, q_n serait d'un degré inférieur à n, ce qui est impossible. Donc, pour $y = \eta$, le dénominateur $Q_nW_n + (y-\eta)^2Q_{n-1}$ du second membre de l'équation (29) est différent de zéro, donc le premier membre est divisible par $(y-\eta)^{2n+\nu+1}$, c. q. f. d.

Tout se réduit à présent à la solution des deux équations (26, 28), après quoi les quantités r_n, s_n sont déterminées par les formules (19, 24).

Les deux substitutions (15, 20) réunies donnent:

$$\frac{x-a_1}{x-a_2} = \frac{y}{\eta},$$

et en éliminant les quantités $b_1, b_2 \ldots b_{2\nu-2}$ entre les équations **(16,21)**, il vient:

$$\eta = \frac{a_{2\nu} - a_2}{a_{2\nu} - a_1} \quad , \quad \varkappa_1^2 \eta = \frac{a_{2\nu-1} - a_2}{a_{2\nu-1} - a_1} \quad , \quad \varkappa_2^2 \eta = \frac{a_{2\nu-2} - a_2}{a_{2\nu-2} - a_1} \quad , \quad \ldots\ldots \varkappa_{2\nu-3}^2 \eta = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} ,$$

donc y dépend de x par l'équation:

$$\frac{x - a_1}{x - a_2} = \frac{a_{2\nu} - a_1}{a_{2\nu} - a_2} y .$$

Cette substitution, équivalente à deux substitutions différentes dans les deux hypothèses que les quantités $a_1, a_2, \ldots a_{2\nu}$ forment une série croissante ou décroissante, est identique à deux des 4ν substitutions linéaires de Mr. *Richelot*, énumérées dans le mémoire cité ci-dessus. En examinant de plus près ces 4ν substitutions, l'on trouve que dans $4\nu - 4$ de ces substitutions, la quantité η est > 1; que dans deux, η peut être > 1 ou < 1, suivant les valeurs particulières de $a_1, a_2, \ldots a_{2\nu}$; et que les deux substitutions qui restent sont les seules dans lesquelles η est toujours < 1, quelles que soient les valeurs particulières de $a_1, a_2 \ldots a_{2\nu}$. Ce sont ces deux dernières substitutions que l'on vient de composer en appliquant l'une après l'autre les substitutions **(15, 20)**.

3.

Après avoir exposé dans le n^0 précédent la substitution linéaire qui conduit de la variable x à la variable y par l'intermédiaire de z, énonçons à-présent le théorème d'*Abel* sous la forme dont nous aurons besoin dans le cours de ces recherches. Ce théorème*) peut être énoncé comme il suit:

»Soient $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ deux fonctions entières données de y, telles que »le produit $\varphi_1(y) \cdot \varphi_2(y)$ s'élève au degré 2ν ou $2\nu - 1$; soit $\Psi(y)$ la fonction »transcendante définie par l'équation

$$(30.) \qquad \Psi(y) = \int \frac{L_0 + L_1 y + \ldots + L_{\nu-2} y^{\nu-2}}{V[\varphi_1(y)\varphi_2(y)]} dy ,$$

»les coëfficients $L_0, L_1, \ldots L_{\nu-2}$ désignant des quantités quelconques; soient V, »VV deux fonctions entières de y telles que l'expression

*) Voyez le mémoire d'*Abel*: „Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes", Tome III, pag. 313 de ce Journal ou Tome I, pag. 288 de ses oeuvres complètes, et le mémoire de *Jacobi*: „Ueber die Additionstheoreme der *Abel*'schen Integrale zweiter und dritter Gattung", Tome XXX, pag. 121 de ce Journal.

$$\Upsilon = \varphi_1(y)V^2 - \varphi_2(y)W^2$$

»s'élève au degré N. Déterminons V, W de sorte que Υ soit divisible par le »produit des $N-\nu+1$ facteurs linéaires

$$y-x_1\ ,\ y-x_2\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ y-x_{N-\nu+1}\ ,$$

»et soient $y_1, y_2, \ldots . y_{\nu-1}$ les $\nu-1$ racines que l'on obtient en égalant à zéro »le quotient

$$\frac{\varphi_1(y)V^2-\varphi_2(y)W^2}{(y-x_1)(y-x_2)\ldots\ldots\ldots(y-x_{N-\nu+1})}\ ,$$

»de sorte que l'on a identiquement:

(31.) $$\Upsilon = \varphi_1(y)V^2-\varphi_2(y)W^2$$
$$= \Upsilon(a)\cdot\frac{(y-x_1)(y-x_2)\ldots..(y-x_{N-\nu+1})(y-y_1)(y-y_2)\ldots..(y-y_{\nu-1})}{(a-x_1)(a-x_2)\ldots..(a-x_{N-\nu+1})(a-y_1)(a-y_2)\ldots..(a-y_{\nu-1})}\ ,$$

»a désignant une constante quelconque. Cela posé, les $\nu-1$ racines $y_1, y_2, \ldots.$ »$\ldots y_{\nu-1}$ sont des fonctions des $N-\nu+1$ racines $x_1, x_2, \ldots. x_{N-\nu+1}$ telles qu'el- »les vérifient en même temps pour toutes les valeurs possibles des coëfficients »$L_0, L_1, \ldots. L_{\nu-2}$ la relation transcendante

(32.) $$\delta_1\Psi(x_1)+\delta_2\Psi(x_2)+\ldots..+\delta_{N-\nu+1}\Psi(x_{N-\nu+1})$$
$$=\delta'\Psi(y_1)+\delta''\Psi(y_2)+\ldots.+\delta^{(\nu-1)}\Psi(y_{\nu-1})+C\ ,$$

»C désignant une constante. $\delta_1, \delta_2, \ldots.\delta_{N-\nu+1}, \delta', \delta'', \ldots.\delta^{(\nu-1)}$ sont $+1$ ou -1 »et l'on a:

$\delta_i = +1$ ou $= -1$, suivant que $y-x_i$ divise

$$\sqrt{\varphi_1(y)}.V-\sqrt{\varphi_2(y)}.W \text{ ou } \sqrt{\varphi_1(y)}.V+\sqrt{\varphi_2(y)}.W,$$

$\delta^{(k)} = +1$ ou $= -1$, suivant que $y-y_k$ divise

$$\sqrt{\varphi_1(y)}.V+\sqrt{\varphi_2(y)}.W \text{ ou } \sqrt{\varphi_1(y)}.V-\sqrt{\varphi_2(y)}.W.»$$

Non seulement l'équation transcendante **(32)** est une conséquence de l'équation algébrique **(31)**, mais ces deux équations peuvent se remplacer mutuellement, de sorte que l'on a aussi le théorème inverse:

»Les quantités $x_1, x_2, \ldots. x_{N-\nu+1}$ et les signes $\delta_1, \delta_2, \ldots.\delta_{N-\nu+1}$ étant »donnés, les quantités $y_1, y_2, \ldots.y_{\nu-1}$ et les signes $\delta', \delta'', \ldots.\delta^{(\nu-1)}$ propres à

»satisfaire pour toutes les valeurs possibles des coëfficients $L_0, L_1, \ldots L_{\nu-2}$ à l'équa-»tion transcendante (32) vérifient en même temps l'équation algébrique (31), et »cette vérification se fait en sorte que

$$(33.)\quad \begin{cases} y - x_i \text{ divise le facteur irrationnel } \sqrt{\varphi_1(y)}.V - \delta_i\sqrt{\varphi_2(y)}.W \\ y - y_k \text{ divise le facteur irrationnel } \sqrt{\varphi_1(y)}.V + \delta^{(k)}\sqrt{\varphi_2(y)}.W.\text{»} \end{cases}$$

La dernière partie de ce théorème établit entre les intégrales et les expressions algébriques une correspondance de signe qui est d'une grande importance pour les applications ultérieures.

Les limites inférieures des intégrales sont des constantes quelconques. Dans le cas particulier où ces limites inférieures forment un second système de racines propres à vérifier l'équation $\Upsilon = 0$, la constante C s'évanouit, qu'elles que soient les valeurs des coëfficients $L_0, L_1, \ldots L_{\nu-2}$.

Posons

$$(34.)\quad (1-y)(1-\varkappa_1^2 y)(1-\varkappa_2^2 y)\ldots(1-\varkappa_{2\nu-3}^2 y) = \Phi(y) = \frac{Y}{y}\,.$$

et faisons les hypothèses spéciales suivantes:

$1^0.$ $\varphi_1(y) = 1\,,$

$\varphi_2(y) = y\,\Phi(y)\,,$

V du degré $n+\nu\,,$

W du degré $n\,.$

$2^0.$ $\varphi_1(y) = y\,,$

$\varphi_2(y) = \Phi(y)\,,$

V du degré $n+\nu-1\,,$

W du degré $n\,.$

Dans l'un et l'autre cas toutes les racines de l'équation $\Upsilon = 0$ peuvent s'évanouir ensemble, donc, en prenant toutes les intégrales depuis la limite inférieure 0, la constante C disparaît, quelles que soient les valeurs des coëfficients $L_0, L_1, \ldots L_{\nu-2}$, et en faisant $a = 0$ l'on obtient les deux théorèmes:

Théorème I. Soit

$$(35.)\quad \Psi(y) = \int_0^y \frac{L_0 + L_1 y + \ldots + L_{\nu-2} y^{\nu-2}}{\sqrt{[y\,\Phi(y)]}}\, dy,$$

$\Phi(y)$ désignant la fonction définie par l'équation (34), soient V et W des fonctions entières de y des degrés $n+\nu$ et n, considérons l'équation transcendante:

$$(36.)\quad \delta_1\Psi(x_1) + \delta_2\Psi(x_2) + \ldots\ldots + \delta_{2n+\nu+1}\Psi(x_{2n+\nu+1})$$
$$= \delta'\Psi(y_1) + \delta''\Psi(y_2) + \ldots\ldots + \delta^{(\nu-1)}\Psi(y_{\nu-1}),$$

ayant lieu pour toutes les valeurs possibles des coëfficients $L_0, L_1, \ldots L_{\nu-2}$, et l'équation algébrique:

$$(37.)\quad \Upsilon = V^2 - y\,\Phi(y)\,W^2$$
$$= (V(0))^2\left(1-\frac{y}{x_1}\right)\left(1-\frac{y}{x_2}\right)\ldots\left(1-\frac{y}{x_{2n+\nu+1}}\right)\left(1-\frac{y}{y_1}\right)\left(1-\frac{y}{y_2}\right)\ldots\left(1-\frac{y}{y_{\nu-1}}\right),$$

avec les conditions:

$$(38.)\quad \begin{cases} V - \delta_i\sqrt{y\,\Phi(y)}.W \text{ divisible par } y - x_i, \\ V + \delta^{(k)}\sqrt{y\,\Phi(y)}.W \text{ divisible par } y - y_k. \end{cases}$$

Cela posé, les quantités $x_1, x_2, \ldots x_{2n+\nu+1}$ et les signes $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{2n+\nu+1}$ étant donnés, l'équation transcendante (36) d'une part, et l'équation algébrique (37) avec les conditions (38) d'autre part, donnent aux quantités $y_1, y_2, \ldots y_{\nu-1}$ et aux signes $\delta', \delta'', \ldots \delta^{(\nu-1)}$ des valeurs identiques et peuvent, par conséquent, être remplacées l'une par l'autre.

• *Théorème II.* Soit

$$(35.)\quad \Psi(y) = \int_0^y \frac{L_0 + L_1 y + \ldots + L_{\nu-2} y^{\nu-2}}{\sqrt{[y\,\Phi(y)]}}\, dy,$$

$\Phi(y)$ désignant la fonction définie par l'équation (34), soient V et W des fonctions entières de y des degrés $n+\nu-1$ et n, considérons l'équation transcendante:

$$(39.)\quad \delta_1\Psi(x_1) + \delta_2\Psi(x_2) + \ldots\ldots + \delta_{2n+\nu}\Psi(x_{2n+\nu})$$
$$= \delta'\Psi(y_1) + \delta''\Psi(y_2) + \ldots\ldots + \delta^{(\nu-1)}\Psi(y_{\nu-1}),$$

»satisfaire pour toutes les valeurs possibles des coëfficients $L_0, L_1, \ldots L_{\nu-2}$ à l'équa-»tion transcendante (32) vérifient en même temps l'équation algébrique (31), et »cette vérification se fait en sorte que

$$(33.)\quad \begin{cases} y - x_i \text{ divise le facteur irrationnel } \sqrt{\varphi_1(y)}.V - \delta_i\sqrt{\varphi_2(y)}.W \\ y - y_k \text{ divise le facteur irrationnel } \sqrt{\varphi_1(y)}.V + \delta^{(k)}\sqrt{\varphi_2(y)}.W.\text{»} \end{cases}$$

La dernière partie de ce théorème établit entre les intégrales et les expressions algébriques une correspondance de signe qui est d'une grande importance pour les applications ultérieures.

Les limites inférieures des intégrales sont des constantes quelconques. Dans le cas particulier où ces limites inférieures forment un second système de racines propres à vérifier l'équation $\Upsilon = 0$, la constante C s'évanouit, qu'elles que soient les valeurs des coëfficients $L_0, L_1, \ldots\ldots L_{\nu-2}$.

Posons

$$(34.)\quad (1-y)(1-\varkappa_1^2 y)(1-\varkappa_2^2 y)\ldots\ldots(1-\varkappa_{2\nu-3}^2 y) = \Phi(y) = \frac{Y}{y}.$$

et faisons les hypothèses spéciales suivantes:

$1^0.$ $\varphi_1(y) = 1$,

$\varphi_2(y) = y\,\Phi(y)$,

V du degré $n+\nu$,

W du degré n.

$2^0.$ $\varphi_1(y) = y$,

$\varphi_2(y) = \Phi(y)$,

V du degré $n+\nu-1$,

W du degré n.

Dans l'un et l'autre cas toutes les racines de l'équation $\Upsilon = 0$ peuvent s'évanouir ensemble, donc, en prenant toutes les intégrales depuis la limite inférieure 0, la constante C disparaît, quelles que soient les valeurs des coëfficients $L_0, L_1, \ldots L_{\nu-2}$, et en faisant $a = 0$ l'on obtient les deux théorèmes:

Théorème I. Soit

$$(35.)\quad \Psi(y) = \int_0^y \frac{L_0 + L_1 y + \ldots + L_{\nu-2} y^{\nu-2}}{\sqrt{[y\,\Phi(y)]}}\, dy,$$

$\Phi(y)$ désignant la fonction définie par l'équation (34), soient V et W des fonctions entières de y des degrés $n+\nu$ et n, considérons l'équation transcendante:

$$(36.)\quad \delta_1\Psi(x_1) + \delta_2\Psi(x_2) + \ldots\ldots + \delta_{2n+\nu+1}\Psi(x_{2n+\nu+1})$$
$$= \delta'\Psi(y_1) + \delta''\Psi(y_2) + \ldots\ldots + \delta^{(\nu-1)}\Psi(y_{\nu-1}),$$

ayant lieu pour toutes les valeurs possibles des coëfficients $L_0, L_1, \ldots L_{\nu-2}$, et l'équation algébrique:

$$(37.)\quad T = V^2 - y\,\Phi(y)\,W^2$$
$$= (V(0))^2\left(1-\frac{y}{x_1}\right)\left(1-\frac{y}{x_2}\right)\ldots\left(1-\frac{y}{x_{2n+\nu+1}}\right)\left(1-\frac{y}{y_1}\right)\left(1-\frac{y}{y_2}\right)\ldots\left(1-\frac{y}{y_{\nu-1}}\right),$$

avec les conditions:

$$(38.)\quad \begin{cases} V - \delta_i\sqrt{y\,\Phi(y)}.W \text{ divisible par } y - x_i, \\ V + \delta^{(k)}\sqrt{y\,\Phi(y)}.W \text{ divisible par } y - y_k. \end{cases}$$

Cela posé, les quantités $x_1, x_2, \ldots x_{2n+\nu+1}$ et les signes $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{2n+\nu+1}$ étant donnés, l'équation transcendante (36) d'une part, et l'équation algébrique (37) avec les conditions (38) d'autre part, donnent aux quantités $y_1, y_2, \ldots y_{\nu-1}$ et aux signes $\delta', \delta'', \ldots \delta^{(\nu-1)}$ des valeurs identiques et peuvent, par conséquent, être remplacées l'une par l'autre.

Théorème II. Soit

$$(35.)\quad \Psi(y) = \int_0^y \frac{L_0 + L_1 y + \ldots + L_{\nu-2} y^{\nu-2}}{\sqrt{[y\,\Phi(y)]}}\, dy,$$

$\Phi(y)$ désignant la fonction définie par l'équation (34), soient V et W des fonctions entières de y des degrés $n+\nu-1$ et n, considérons l'équation transcendante:

$$(39.)\quad \delta_1\Psi(x_1) + \delta_2\Psi(x_2) + \ldots\ldots + \delta_{2n+\nu}\Psi(x_{2n+\nu})$$
$$= \delta'\Psi(y_1) + \delta''\Psi(y_2) + \ldots\ldots + \delta^{(\nu-1)}\Psi(y_{\nu-1}),$$

ayant lieu pour toutes les valeurs possibles des coëfficients $L_0, L_1, \ldots L_{\nu-2}$, et l'équation algébrique:

$$(40.) \quad \Upsilon = yV^2 - \Phi(y)W^2$$

$$= -(W(0))^2\left(1-\frac{y}{x_1}\right)\left(1-\frac{y}{x_2}\right)\ldots\left(1-\frac{y}{x_{2n+\nu}}\right)\left(1-\frac{y}{y_1}\right)\left(1-\frac{y}{y_2}\right)\ldots\left(1-\frac{y}{y_{\nu-1}}\right),$$

avec les conditions

$$(41.) \quad \begin{cases} \sqrt{y}.V - \delta_i\sqrt{\Phi(y)}.W \text{ divisible par } y-x_i\,, \\ \sqrt{y}.V + \delta^{(k)}\sqrt{\Phi(y)}.W \text{ divisible par } y-y_k\,. \end{cases}$$

Cela posé, les quantités $x_1, x_2, \ldots x_{2n+\nu}$ et les signes $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{2n+\nu}$ étant donnés, l'équation transcendante (39), d'une part, et l'équation algébrique (40) avec les conditions (41), d'autre part, donnent aux quantités $y_1, y_2, \ldots y_{\nu-1}$ et aux signes $\delta', \delta'', \ldots \delta^{(\nu-1)}$ des valeurs identiques, et peuvent, par conséquent, être remplacées l'une par l'autre.

4.

Revenons, après ces explications préliminaires, à la solution des équations (26, 28), solution à laquelle se reduit, comme il a déja été remarqué dans le n° 2, toute la question dont il s'agit.

Considérons d'abord les équations (26) et (29) du n° 2, savoir:

$$(26.) \quad P_n^2 - \eta^{2\nu}\frac{Y}{H}\cdot Q_n^2 = (-1)^{n-1}(y-\eta)^{2n+\nu+1}S_n\,,$$

$$(29.) \quad P_n - \eta^{\nu}\sqrt{\frac{Y}{H}}\cdot Q_n = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(y-\eta)^{2n+\nu+1}}{Q_nW_n + (y-\eta)^2Q_{n-1}}\,,$$

P_n étant du degré $n+\nu$ et Q_n du degré n.

L'équation (26) se trouve comprise dans le nombre des équations (37), auxquelles se rapporte le théorème I du n^0 précédent. En effet, soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\nu-1}$ les $\nu-1$ valeurs de y pour lesquelles S_n s'évanouit, et posons

$$V = P_n \quad , \quad W = \frac{\eta^{\nu}Q_n}{\sqrt{H}}\,,$$

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n+\nu+1} = \eta \quad , \quad y_1 = \alpha_1 \,, \quad y_2 = \alpha_2, \ldots y_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1}\,,$$

alors l'équation (37) se change en l'équation (26).

Or, en vertu des remarques faites à la fin du n° 2 relativement à l'équation (29) son premier membre est divisible par $(y-\eta)^{2n+\nu+1}$, c. à. d. que toutes les différences $y-x_i$ divisent le même facteur irrationnel:

$$P_n - \eta^\nu \sqrt{\frac{Y}{H}} . Q_n = V - \sqrt{y\,\Phi(y)} . W,$$

ou, ce qui revient au même, que tous les signes $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{2n+\nu+1}$ sont positifs. Donc, en désignant dans le cas spécial d'ont il s'agit par $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots \varepsilon^{(\nu-1)}$ les signes représentés par $\delta', \delta'', \ldots \delta^{(\nu-1)}$ dans le cas général du théorème I, on parvient, par l'application de ce théorème, au résultat suivant:

Les $\nu-1$ racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\nu-1}$ de l'équation $S_n = 0$ sont des fonctions de η telles qu'en posant

$$(35.) \qquad \Psi(y) = \int_0^y \frac{L_0 + L_1 y + \ldots + L_{\nu-2} y^{\nu-2}}{\sqrt{Y}} dy ,$$

elles vérifient pour toutes les valeurs possibles des coëfficients $L_0, L_1, L_2, \ldots L_{\nu-2}$ l'équation transcendante:

$$(42.) \quad (2n+\nu+1)\Psi(\eta) = \varepsilon'\Psi(\alpha_1) + \varepsilon''\Psi(\alpha_2) + \ldots + \varepsilon^{(\nu-1)}\Psi(\alpha_{\nu-1}),$$

$\varepsilon', \varepsilon'', \ldots \varepsilon^{(\nu-1)}$ étant $+1$ ou -1.

Quel que soit le nombre entier μ, on peut toujours définir $\nu-1$ arguments $\eta'_\mu, \eta''_\mu, \ldots \eta^{(\nu-1)}_\mu$ par la condition que l'on ait pour des valeurs quelconques des coëfficients $L_0, L_1, \ldots L_{\nu-2}$ l'équation

$$(43.) \quad \mu\,\Psi(\eta) = \pm \Psi(\eta'_\mu) \pm \Psi(\eta''_\mu) \pm \ldots \pm \Psi(\eta^{(\nu-1)}_\mu) ,$$

et alors $\eta'_\mu, \eta''_\mu, \ldots \eta^{(\nu-1)}_\mu$ seront ce que l'on peut appeler *les arguments multiples de η de l'ordre μ* (relativement aux intégrales Ψ). Cette notation introduite, les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\nu-1}$ de l'équation $S_n = 0$ sont identiques aux $\nu-1$ arguments $\eta'_{2n+\nu+1}, \eta''_{2n+\nu+1}, \ldots \eta^{(\nu-1)}_{2n+\nu+1}$, multiples de η de l'ordre $2n+\nu+1$. Donc, en désignant par $S_n(0)$ la valeur de S_n pour $y=0$, on obtient:

$$(44.) \quad S_n = S_n(0)\left(1-\frac{y}{\eta'_{2n+\nu+1}}\right)\left(1-\frac{y}{\eta''_{2n+\nu+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{y}{\eta^{(\nu-1)}_{2n+\nu+1}}\right).$$

De plus, on conclut de la correspondance de signe établie par le théorème d'*Abel* que chaque différence

$y-\alpha_i$ divise le facteur irrationnel $P_n+\varepsilon^{(i)}\eta^\nu\sqrt{\frac{Y}{H}}.Q_n$,

de sorte que:

$$(45.)\qquad P_n=-\varepsilon^{(i)}\eta^\nu\sqrt{\frac{Y}{H}}.Q_n \quad \text{pour } y=\alpha_i\,.$$

Ayant déterminé la fonction S_n au coëfficient $S_n(0)$ près, il s'agit de calculer ce coëfficient et la fonction R_n, ce qui se fait à l'aide de l'équation **(28)** du n° **2** savoir de l'équation:

$$(28.)\qquad R_n^2-\eta^{2\nu}\frac{Y}{H}=-(y-\eta)^2S_nS_{n-1}\,.$$

Soit, pour abréger

$$(46.)\quad\begin{cases}\eta'_{2n+\nu+1}=\alpha_1\ ,\ \eta''_{2n+\nu+1}=\alpha_2\ ,\ \ldots\ldots\ \eta^{(\nu-1)}_{2n+\nu+1}=\alpha_{\nu-1}\ ,\\ \eta'_{2n+\nu}\ =\beta_1\ ,\ \eta''_{2n+\nu}\ =\beta_2\ ,\ \ldots\ldots\ \eta^{(\nu-1)}_{2n+\nu}\ =\beta_{\nu-1}\ ,\\ \eta'_{2n+\nu-1}=\gamma_1\ ,\ \eta''_{2n+\nu-1}=\gamma_2\ ,\ \ldots\ldots\ \eta^{(\nu-1)}_{2n+\nu-1}=\gamma_{\nu-1}\ ,\end{cases}$$

tous les arguments $\eta^{(i)}_{2n+\nu+1}$, $\eta^{(i)}_{2n+\nu}$, $\eta^{(i)}_{2n+\nu-1}$ étant définis par des équations de la forme **(43)**, et soit

$$(47.)\quad\begin{cases}A(y)=(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\ldots\ldots(y-\alpha_{\nu-1})\ ,\\ B(y)=(y-\beta_1)(y-\beta_2)\ldots\ldots(y-\beta_{\nu-1})\ ,\\ C(y)=(y-\gamma_1)(y-\gamma_2)\ldots\ldots(y-\gamma_{\nu-1})\ ,\end{cases}$$

de sorte que les quantités $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots\alpha_{\nu-1}$; $\beta_1,\beta_2,\ldots\ldots\beta_{\nu-1}$; $\gamma_1,\gamma_2,\ldots\ldots\gamma_{\nu-1}$ satisfont aux équations transcendantes:

$$(48.)\quad\begin{cases}(2n+\nu+1)\Psi(\eta)=\varepsilon'\Psi(\alpha_1)+\varepsilon''\Psi(\alpha_2)+\ldots\ldots+\varepsilon^{(\nu-1)}\Psi(\alpha_{\nu-1})\ ,\\ (2n+\nu)\Psi(\eta)=e'\Psi(\beta_1)+e''\Psi(\beta_2)+\ldots\ldots+e^{(\nu-1)}\Psi(\beta_{\nu-1})\ ,\\ (2n+\nu-1)\Psi(\eta)=\varepsilon'_1\Psi(\gamma_1)+\varepsilon''_1\Psi(\gamma_2)+\ldots\ldots+\varepsilon_1^{(\nu-1)}\Psi(\gamma_{\nu-1})\ ,\end{cases}$$

$\varepsilon',\varepsilon'',\ldots\ldots\varepsilon^{(\nu-1)}$; $e',e'',\ldots\ldots e^{(\nu-1)}$; $\varepsilon'_1,\varepsilon''_1,\ldots\ldots\varepsilon_1^{(\nu-1)}$ **étant $+1$ ou -1.**

De ces équations on déduit

$$(49.)\quad e'\Psi(\beta_1)+e''\Psi(\beta_2)+\ldots..+e^{(\nu-1)}\Psi(\beta_{\nu-1})+\Psi(\eta)$$
$$=\varepsilon'\Psi(\alpha_1)+\varepsilon''\Psi(\alpha_2)+\ldots..+\varepsilon^{(\nu-1)}\Psi(\alpha_{\nu-1}),$$

$$(50.)\quad e'\Psi(\beta_1)+e''\Psi(\beta_2)+\ldots..+e^{(\nu-1)}\Psi(\beta_{\nu-1})-\Psi(\eta)$$
$$=\varepsilon_1'\Psi(\gamma_1)+\varepsilon_1''\Psi(\gamma_2)+\ldots..+\varepsilon_1^{(\nu-1)}\Psi(\gamma_{\nu-1}),$$

$$(51.)\quad \varepsilon_1'\Psi(\gamma_1)+\varepsilon_1''\Psi(\gamma_2)+\ldots..+\varepsilon_1^{(\nu-1)}\Psi(\gamma_{\nu-1})+2\Psi(\eta),$$
$$=\varepsilon'\Psi(\alpha_1)+\varepsilon''\Psi(\alpha_2)+\ldots..+\varepsilon^{(\nu-1)}\Psi(\alpha_{\nu-1}),$$

dont la dernière est une conséquence des deux premières.

Considérons les équations (25, 27, 28) du n° 2, savoir:

$$(25.)\qquad P_nQ_{n-1}-Q_nP_{n-1}=(-1)^{n-1}(y-\eta)^{2n+\nu-1},$$

$$(27.)\quad P_nP_{n-1}-\frac{\eta^{2\nu}}{H}YQ_nQ_{n-1}=(-1)^n(y-\eta)^{2n+\nu-1}R_n,$$

$$(28.)\qquad R_n^2-\frac{\eta^{2\nu}}{H}Y=-(y-\eta)^2S_nS_{n-1}.$$

Des équations (25, 27) on déduit

$$(-1)^n(y-\eta)^{2n+\nu-1}\left\{R_n-\varepsilon\eta^\nu\sqrt{\frac{Y}{H}}\right\}=\left\{P_n-\varepsilon\eta^\nu\sqrt{\frac{Y}{H}}\cdot Q_n\right\}\left\{P_{n-1}+\varepsilon\eta^\nu\sqrt{\frac{Y}{H}}\cdot Q_{n-1}\right\},$$

ε pouvant être $+1$ ou -1. Dans cette équation

pour $\varepsilon=+1$ le premier facteur du second membre est divisible par $(y-\eta)^{2n+\nu+1}$ d'après l'équation (29),

pour $\varepsilon=-\varepsilon^{(i)}$ le premier facteur du second membre est divisible par $y-\alpha_i$ d'après l'équation (45),

pour $\varepsilon=\varepsilon_1^{(i)}$ le second facteur du second membre est divisible par $y-\gamma_i$ d'après l'équation que l'on déduit de (45), lorsqu'on y change n en $n-1$.

Donc on a les conditions:

$$(52.)\quad \begin{cases} R_n-\eta^\nu\sqrt{\frac{Y}{H}} \text{ divisible par } (y-\eta)^2 \\ R_n+\varepsilon^{(i)}\eta^\nu\sqrt{\frac{Y}{H}} \text{ divisible par } y-\alpha_i, \\ R_n-\varepsilon_1^{(i)}\eta^\nu\sqrt{\frac{Y}{H}} \text{ divisible par } y-\gamma_i. \end{cases}$$

L'équation (28) et les conditions (52) se trouvent comprises respectivement dans l'équation (37) et dans les conditions (38) du théorème I, sous les hypothèses:

$$n = 0 \quad , \quad V = R_n \quad , \quad W = \frac{\eta^\nu}{\sqrt{H}},$$

$$x_1 = \gamma_1, x_2 = \gamma_2 \ldots x_{\nu-1} = \gamma_{\nu-1}, x_\nu = \eta, x_{\nu+1} = \eta, y_1 = \alpha_1, y_2 = \alpha_2 \ldots y_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1},$$

$$\delta_1 = \varepsilon_1', \ \delta_2 = \varepsilon_1'' \ldots \delta_{\nu-1} = \varepsilon_1^{(\nu-1)}, \ \delta_\nu = 1, \delta_{\nu+1} = 1, \delta' = \varepsilon', \delta'' = \varepsilon'' \ldots \delta^{(\nu-1)} = \varepsilon^{(\nu-1)},$$

donc l'équation (51) est l'équation transcendante par laquelle, en vertu du théorème I, l'équation algébrique (28) avec les conditions (52) peuvent être remplacées.

Aux conditions (52) on peut substituer les 2ν équations:

$$(52.)^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{H}}{\eta^\nu} R_n(\eta) = \sqrt{H}, \\ \dfrac{\sqrt{H}}{\eta^\nu} R_n'(\eta) = \frac{1}{2} \dfrac{H'}{\sqrt{H}}, \\ \dfrac{\sqrt{H}}{\eta^\nu} R_n(\alpha_i) = -\varepsilon^{(i)} \sqrt{\alpha_i \Phi(\alpha_i)} \\ \dfrac{\sqrt{H}}{\eta^\nu} R_n(\gamma_i) = \varepsilon_1^{(i)} \sqrt{\gamma_i \Phi(\gamma_i)} \end{array} \right\} (i = 1, 2, \ldots . \nu - 1).$$

Si parmi ces 2ν équations on en choisissait arbitrairement $\nu + 1$ quelconques, elles suffiraient pour déterminer au moyen de la formule d'interpolation de *Lagrange* la quantité R_n (fonction entière de y du degré ν). Mais la forme, sous laquelle R_n se présenterait alors, manquerait de symétrie, ou serait au moins très-compliquée.

Pour arriver à l'expression la plus simple de R_n on prendra la route suivante:

On remplacera d'abord l'équation algébrique (28) avec les conditions (52) par l'équation transcendante (51), puis cette dernière par les deux équations transcendantes (49, 50), dont elle est la conséquence. Enfin, les équations transcendantes (49, 50) se trouvant comprises dans l'équation (39) du théorème II, on les remplacera, en vertu de ce théorème, par deux équations algébriques de la forme (40) avec des conditions de la forme (41), et l'on se trouvera ainsi conduit à remplacer l'équation algébrique (28) avec les conditions (52) par deux équations algébriques simultanées avec les conditions nécessaires qu'il faut y joindre.

Tout se réduit donc à appliquer le théorème II du n° précédent aux équa-

tions (49, 50). Ces deux équations transcendantes sont en effet comprises dans l'équation (39) du théoreme II sous les deux hypothèses:

$$1^0. \qquad n=0 \ , \ V=V \ , \ W=1 ,$$

$$x_1=\beta_1 \ , \ x_2=\beta_2 \ , \ \ldots x_{\nu-1}=\beta_{\nu-1} \ , \ x_\nu=\eta \ ; \ y_1=\alpha_1 \ , \ y_2=\alpha_2 , \ldots y_{\nu-1}=\alpha_{\nu-1},$$

$$\delta_1=e' \ , \ \delta_2=e'' \ , \ \ldots \delta_{\nu-1}=e^{(\nu-1)}, \ \delta_\nu=+1; \ \delta'=\varepsilon' \ , \ \delta''=\varepsilon'' , \ldots \delta^{(\nu-1)}=\varepsilon^{(\nu-1)},$$

$$2^0. \qquad n=0 \ , \ V=V_1 \ , \ W=1 ,$$

$$x_1=\beta_1 \ , \ x_2=\beta_2 \ , \ \ldots x_{\nu-1}=\beta_{\nu-1} , \ x_\nu=\eta \ ; \quad y_1=\gamma_1 \ , \ y_2=\gamma_2 , \ldots y_{\nu-1}=\gamma_{\nu-1},$$

$$\delta_1=e' \ , \ \delta_2=e'' \ , \ \ldots \delta_{\nu-1}=e^{(\nu-1)}, \ \delta_\nu=-1 \ ; \ \delta'=\varepsilon_1' \ , \ \delta''=\varepsilon_1'' , \ldots \delta^{(\nu-1)}=\varepsilon_1^{(\nu-1)}.$$

Donc en vertu de l'équation (40) et des conditions (41) du théorème II, les équations transcendantes (49, 50) sont remplacées par les deux équations algébriques:

$$(53.) \qquad y(V(y))^2-\Phi(y)=\frac{A(y)}{A(0)}\cdot\frac{B(y)}{B(0)}\cdot\frac{y-\eta}{\eta} ,$$

$$(54.) \qquad y(V_1(y))^2-\Phi(y)=\frac{C(y)}{C(0)}\cdot\frac{B(y)}{B(0)}\cdot\frac{y-\eta}{\eta} ,$$

avec les conditions:

$$(55.) \qquad V(\eta)=\sqrt{\frac{\Phi(\eta)}{\eta}} \ , \quad V(\beta_i)=e^{(i)}\sqrt{\frac{\Phi(\beta_i)}{\beta_i}} ,$$

$$(56.) \qquad V_1(\eta)=-\sqrt{\frac{\Phi(\eta)}{\eta}} \ , \quad V_1(\beta_i)=e^{(i)}\sqrt{\frac{\Phi(\beta_i)}{\beta_i}} ,$$

et

$$(57.) \qquad V(\alpha_i)=-\varepsilon^{(i)}\sqrt{\frac{\Phi(\alpha_i)}{\alpha_i}} ,$$

$$(58.) \qquad V_1(\gamma_i)=-\varepsilon_1^{(i)}\sqrt{\frac{\Phi(\gamma_i)}{\gamma_i}} ,$$

l'indice i devant avoir partout les valeurs $1, 2, \ldots . \nu-1$.

Rien n'est plus facile que de prendre la route inverse et de déduire des équations (53, 54) et des conditions (55, 56, 57, 58) l'équation (28) et les conditions (52). En effet, multipliant l'une par l'autre les deux équations (53, 54), et se servant de la même identité algébrique qui a déja été employée dans le n° 1, on obtient:

$$\{\Phi(y) \pm yV(y)V_1(y)\}^2 - Y\{V(y) \pm V_1(y)\}^2$$
$$= \frac{A(y)}{A(0)} \cdot \frac{C(y)}{C(0)} \cdot \left(\frac{B(y)}{B(0)}\right)^2 \cdot \left(\frac{y-\eta}{\eta}\right)^2.$$

Si l'on prend les signes inférieurs, chacune des expressions:

$$\Phi(y) - yV(y)V_1(y) \quad , \quad V(y) - V_1(y)$$

est divisible par le produit $(y-\beta_1)(y-\beta_2)\ldots\ldots(y-\beta_{\nu-1}) = B(y)$, comme il est facile de le vérifier par les formules (55, 56); donc en posant

$$(59.) \quad U(y) = \frac{\Phi(y) - yV(y)V_1(y)}{2B(y)} \quad , \quad G = \frac{V(y) - V_1(y)}{2B(y)} \quad ,$$

G désignant une constante, on a

$$(60.) \quad (U(y))^2 - G^2Y = \frac{1}{(2B(0))^2} \cdot \frac{A(y)}{A(0)} \cdot \frac{C(y)}{C(0)} \cdot \left(\frac{y-\eta}{\eta}\right)^2,$$

équation qui, comme il est aisé de s'en assurer, ne diffère de (28) que par un multiplicateur constant.

Des équations (59) on déduit

$$U(y) - \varepsilon G\sqrt{Y} = \frac{\{\sqrt{\Phi(y)} - \varepsilon\sqrt{y}.V(y)\}\{\sqrt{\Phi(y)} + \varepsilon\sqrt{y}.V_1(y)\}}{2B(y)} \quad ,$$

ε étant $+1$ ou -1. De là, en posant successivement $\varepsilon = +1$, $\varepsilon = -\varepsilon^{(i)}$, $\varepsilon = \varepsilon_1^{(i)}$, on trouve à l'aide des équations (55, 56, 57, 58) les résultats:

$$U(y) - G\sqrt{Y} \text{ divisible par } (y-\eta)^2,$$
$$U(y) + \varepsilon^{(i)}G\sqrt{Y} \text{ divisible par } y - \alpha_i \ ,$$
$$U(y) - \varepsilon_1^{(i)}G\sqrt{Y} \text{ divisible par } y - \gamma_i \ ,$$

ce qui équivaut aux équations:

$$\left.\begin{aligned} \frac{U(\eta)}{G} &= \sqrt{H} \ , \\ \frac{U'(\eta)}{G} &= \tfrac{1}{2}\frac{H'}{\sqrt{H}} \ , \\ \frac{U(\alpha_i)}{G} &= -\varepsilon^{(i)}\sqrt{\alpha_i \Phi(\alpha_i)} \\ \frac{U(\gamma_i)}{G} &= \quad \varepsilon_1^{(i)}\sqrt{\gamma_i \Phi(\gamma_i)} \end{aligned}\right\} \ (i = 1, 2, \ldots\ldots \nu - 1) \ .$$

Ces valeurs de $\frac{U(y)}{G}$ comparées aux valeurs de $\frac{\sqrt{H}}{\eta^\nu} R_n$ données par les équations (52)* montrent que la différence

$$\frac{U(y)}{G} - \frac{\sqrt{H}}{\eta^\nu} R_n$$

est divisible par $(y-\eta)^2(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\ldots(y-\alpha_{\nu-1})(y-\gamma_1)(y-\gamma_2)\ldots(y-\gamma_{\nu-1})$. Mais comme chacune des deux fonctions $U(y)$ et R_n ne dépasse pas le degré ν, on en conclut que pour des valeurs quelconques de y on a identiquement:

$$R_n = \frac{\eta^\nu}{\sqrt{H}} \cdot \frac{U(y)}{G},$$

ou, en substituant la valeur (59) de $U(y)$:

$$\text{(61.)} \qquad R_n = \frac{\eta^\nu}{\sqrt{H}} \cdot \frac{\Phi(y) - yV(y)V_1(y)}{2GB(y)}.$$

Les formules (55, 56) donnent ν valeurs de chacune des fonctions $V(y)$, $V_1(y)$, et comme ces fonctions sont l'une et l'autre du degré $\nu - 1$, ce nombre de valeurs est précisément le nombre nécessaire et suffisant pour déterminer $V(y)$ et $V_1(y)$ à l'aide de la formule d'interpolation de *Lagrange*.

Mais la détermination de ces deux fonctions peut être réduite à celle de la seule fonction

$$\text{(62.)} \qquad T(y) = \frac{V(y) + V_1(y)}{2(y-\eta)}.$$

En effet, d'après les équations (55, 56) la somme $V(y) + V_1(y)$ est divisible par $y - \eta$, donc $T(y)$ est une fonction entière du degré $\nu - 2$. L'équation (62) et la seconde des équations (59) forment un système d'équations qui, résolues d'après $V(y)$ et $V_1(y)$ donnent:

$$\text{(63.)} \qquad \begin{cases} V(y) = (y-\eta)T(y) + GB(y) \\ V_1(y) = (y-\eta)T(y) - GB(y). \end{cases}$$

De plus, les équations (55, 56) combinées avec l'équation (62) et la seconde des équations (59) donnent:

$$T(\beta_i) = e^{(i)} \frac{\sqrt{\frac{\Phi(\beta_i)}{\beta_i}}}{\beta_i - \eta},$$

$$(64.) \qquad G = \frac{\sqrt{\frac{\Phi(\eta)}{\eta}}}{B(\eta)},$$

et, de là, par la formule d'interpolation de *Lagrange*:

$$(65.) \qquad T(y) = \sum_{i=1}^{i=\nu-1} e^{(i)} \frac{\sqrt{\frac{\Phi(\beta_i)}{\beta_i}}}{\beta_i - \eta} \cdot \frac{\frac{1}{y-\beta_i} B(y)}{B'(\beta_i)} .$$

En portant la valeur de G donnée par la formule (64) dans les équations (63), on obtient:

$$V(y) = (y-\eta)\,T(y) + \sqrt{\frac{\Phi(\eta)}{\eta}} \cdot \frac{B(y)}{B(\eta)},$$

$$V_1(y) = (y-\eta)\,T(y) - \sqrt{\frac{\Phi(\eta)}{\eta}} \cdot \frac{B(y)}{B(\eta)},$$

et en substituant ces valeurs de G , $V(y)$, $V_1(y)$ dans l'équation (61), il vient:

$$(66.) \quad \begin{cases} R_n = \frac{1}{2} \frac{\eta^\nu B(\eta)}{\Phi(\eta)} \cdot \frac{\Phi(y) - y\,V(y).V_1(y)}{B(y)} \\ \text{ou} \\ R_n = \frac{1}{2} \eta^\nu \frac{y\,B(y)}{\eta B(\eta)} + \frac{1}{2} \frac{\eta^\nu B(\eta)}{\Phi(\eta)} \cdot \frac{\Phi(y) - y(y-\eta)^2 (T(y))^2}{B(y)} \end{cases},$$

$T(y)$ étant défini par l'équation (65).

Telle est l'expression cherchée de R_n, expression dont la simplicité ne laisse, à ce qu'il semble, rien à désirer. Elle montre que R_n dépend de la multiplication de l'ordre $2n+\nu$ des intégrales Ψ (car c'est à cet ordre que se rapportent les arguments β_1, β_2, $\ldots\ldots\beta_{\nu-1}$), tandis que S_n dépend de la multiplication de l'ordre $2n+\nu+1$.

Quoique une partie de R_n se présente sous une forme fractionnaire, la division se fait pourtant sans reste; en effet, $T(y)$ étant la fonction entière du degré $\nu-2$, égale à $\pm \frac{1}{y-\eta} \sqrt{\frac{\Phi(y)}{y}}$ pour les $\nu-1$ valeurs $y = \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_{\nu-1}$, la différence $\Phi(y) - y(y-\eta)^2 (T(y))^2$ est divisible par le produit $(y-\beta_1)(y-\beta_2)\ldots(y-\beta_{\nu-1}) = B(y)$, et c'est précisément ce quotient qui entre dans l'expression (66) de R_n.

On peut signaler une valeur de R_n qui se distingue par sa simplicité, c'est la valeur $R_n(0)$ que cette fonction prend pour $y = 0$. En effet, dans la partie de R_n qui contient $T(y)$, le carré de cette fonction se trouve multiplié par $y(y-\eta)^2$. Par conséquent, aux deux valeurs connues $R_n(\eta)$, $R'_n(\eta)$ qui se trouvent déjà parmi les équations (52)* on ne peut joindre qu'une seule troisième valeur $R_n(0)$ qui ait cela de commun avec elles d'être indépendante de tous les radicaux contenus en $T(y)$. Ces trois valeurs réunies forment le tableau suivant:

$$(67.) \qquad \begin{cases} R_n(\eta) = \eta^\nu , \\ R'_n(\eta) = \frac{1}{2}\eta^\nu \dfrac{H'}{H} , \end{cases}$$

$$(68.) \qquad R_n(0) = \tfrac{1}{2}\frac{\eta^\nu}{\Phi(\eta)} \cdot \frac{B(\eta)}{B(0)} .$$

La valeur (68) de $R_n(0)$ conduit en même temps à la détermination de la constante $S_n(0)$, le seul élément qui reste encore inconnu dans l'expression (44) de S_n.

Au lieu de $R_n(0)$ et $S_n(0)$ considérons les valeurs $\varrho_n(0)$ et $\sigma_n(0)$ que ϱ_n et σ_n prennent pour $z = 0$. Les variables y et z s'évanouissant ensemble d'après les équations (24), on a:

$$\varrho_n(0) = (-1)^\nu \frac{R_n(0)}{\eta^\nu} \quad , \quad \sigma_n(0) = (-1)^{\nu-1} \frac{S_n(0)}{\eta^{\nu-1}} ,$$

et à l'aide de l'équation (68) on conclut de là:

$$\varrho_n(0) = \frac{(-1)^\nu}{2\Phi(\eta)} \cdot \frac{B(\eta)}{B(0)} = \frac{(-1)^\nu}{2\Phi(\eta)} \cdot \prod_{i=1}^{i=\nu-1} \left(1 - \frac{\eta}{\beta_i}\right) ,$$

ou, en substituant pour β_i sa valeur $\eta^{(i)}_{2n+\nu}$ tirée des équations (46):

$$(69.) \qquad \varrho_n(0) = \frac{(-1)^\nu}{2\Phi(\eta)} \cdot \prod_{i=1}^{i=\nu-1} \left(1 - \frac{\eta}{\eta^{(i)}_{2n+\nu}}\right) ,$$

De plus l'équation (12)* savoir:

$$\varrho_n^2 - Z = -\sigma_n \sigma_{n-1}$$

à laquelle il faut ajouter:

$$\sigma_{-1} = 1$$

donne pour $z = 0$:

$$(\varrho_n(0))^2 = -\sigma_n(0).\sigma_{n-1}(0)\,.$$

De là on trouve par voie de substitution successive:

$$\sigma_0(0) = -\frac{(\varrho_0(0))^2}{\sigma_{-1}(0)} = -(\varrho_0(0))^2\,,$$

$$\sigma_1(0) = -\frac{(\varrho_1(0))^2}{\sigma_0(0)} = +\left(\frac{\varrho_1(0)}{\varrho_0(0)}\right)^2,$$

$$\sigma_2(0) = -\frac{(\varrho_2(0))^2}{\sigma_1(0)} = -\left(\frac{\varrho_2(0)\varrho_0(0)}{\varrho_1(0)}\right)^2$$

$$\sigma_3(0) = -\frac{(\varrho_3(0))^2}{\sigma_2(0)} = +\left(\frac{\varrho_3(0)\varrho_1(0)}{\varrho_2(0)\varrho_0(0)}\right)^2,$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n(0) = (-1)^{n-1}\left(\frac{\varrho_n(0)\varrho_{n-2}(0)\varrho_{n-4}(0)\ldots..}{\varrho_{n-1}(0)\varrho_{n-3}(0)\varrho_{n-5}(0)\ldots..}\right)^2.$$

On n'a qu'à porter dans ces formules les valeurs de $\varrho_0(0)$, $\varrho_1(0)$..... tirées de l'équation (69) pour trouver les valeurs finales des quantités $\sigma_0(0)$, $\sigma_1(0)$..... De cette manière il vient:

$$\sigma_0(0) = -\left\{\frac{1}{2\Phi(\eta)}\prod_{i=1}^{i=\nu-1}\left(1-\frac{\eta}{\eta_\nu^{(i)}}\right)\right\}^2,$$

$$\sigma_1(0) = +\left\{\prod_{i=1}^{i=\nu-1}\frac{\left(1-\frac{\eta}{\eta_{\nu+2}^{(i)}}\right)}{\left(1-\frac{\eta}{\eta_\nu^{(i)}}\right)}\right\}^2,$$

$$\sigma_2(0) = -\left\{\frac{1}{2\Phi(\eta)}\prod_{i=1}^{i=\nu-1}\frac{\left(1-\frac{\eta}{\eta_{\nu+4}^{(i)}}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_\nu^{(i)}}\right)}{\left(1-\frac{\eta}{\eta_{\nu+2}^{(i)}}\right)}\right\}^2,$$

$$\sigma_3(0) = +\left\{\prod_{i=1}^{i=\nu-1}\frac{\left(1-\frac{\eta}{\eta_{\nu+6}^{(i)}}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_{\nu+2}^{(i)}}\right)}{\left(1-\frac{\eta}{\eta_{\nu+4}^{(i)}}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_\nu^{(i)}}\right)}\right\}^2,$$

$$\vdots$$

et généralement:

$$(70.)\quad \begin{cases} \sigma_{2n-1}(0) = + \left\{ \prod_{i=1}^{i=\nu-1} \dfrac{\left(1-\dfrac{\eta}{\eta_{\nu+2}^{(i)}}\right)\left(1-\dfrac{\eta}{\eta_{\nu+6}^{(i)}}\right)\cdots\cdots\left(1-\dfrac{\eta}{\eta_{\nu+4n-2}^{(i)}}\right)}{\left(1-\dfrac{\eta}{\eta_{\nu}^{(i)}}\right)\left(1-\dfrac{\eta}{\eta_{\nu+4}^{(i)}}\right)\cdots\cdots\left(1-\dfrac{\eta}{\eta_{\nu+4n-4}^{(i)}}\right)} \right\}^2, \\ \sigma_{2n}(0) = - \left\{ \dfrac{1}{2\varphi(\eta)} \prod_{i=1}^{i=\nu-1} \dfrac{\left(1-\dfrac{\eta}{\eta_{\nu}^{(i)}}\right)\left(1-\dfrac{\eta}{\eta_{\nu+4}^{(i)}}\right)\cdots\cdots\left(1-\dfrac{\eta}{\eta_{\nu+4n}^{(i)}}\right)}{\left(1-\dfrac{\eta}{\eta_{\nu+2}^{(i)}}\right)\left(1-\dfrac{\eta}{\eta_{\nu+6}^{(i)}}\right)\cdots\left(1-\dfrac{\eta}{\eta_{\nu+4n-2}^{(i)}}\right)} \right\}^2. \end{cases}$$

Introduisons encore dans l'équation (44) z et σ_n au lieu de y et S_n à l'aide des formules (20, 24), et nous aurons:

$$(71.)\qquad \sigma_n = \sigma_n(0) \prod_{i=1}^{i=\nu-1} \left(1-\left(1-\frac{\eta}{\eta_{2n+\nu+1}^{(i)}}\right) z\right).$$

5.

Les résultats obtenus dans le n° précédent contiennent la solution complète du problème. La valeur de σ_n est donnée par les équations (70, 71); et pour connaître celle de ϱ_n on n'a qu'à diviser l'équation (66) par $(y-\eta)^\nu$ et à introduire z au lieu de y. De plus, en posant

$$(72)\qquad \varrho_n = h_0^{(n)} z^\nu + h_1^{(n)} z^{\nu-1} + \cdots\cdots + h_{\nu-1}^{(n)} z + h_\nu^{(n)},$$

les trois équations (67, 69) donnent les valeurs de $h_0^{(n)}$, $h_1^{(n)}$, $h_\nu^{(n)}$ En effet, on en tire, d'après la troisième des équations (24):

$$R_n = h_0^{(n)} y^\nu + h_1^{(n)} y^{\nu-1}(y-\eta) + \cdots\cdots + h_\nu^{(n)} (y-\eta)^\nu,$$

d'où

$$R_n(\eta) = \eta^\nu h_0^{(n)},$$

$$R'_n(\eta) = \nu \eta^{\nu-1} h_0^{(n)} + \eta^{\nu-1} h_1^{(n)},$$

Comparant ces valeurs à celles qui ont été données par les formules (67), on trouve:

$$(73.)\quad \begin{cases} h_0^{(n)} = 1, \\ h_1^{(n)} = -\frac{1}{2}\left(2\nu - \dfrac{\eta H'}{H}\right) = 1 + \dfrac{1}{1-\eta} + \sum_{i=1}^{i=2\nu-3} \dfrac{1}{1-\varkappa_i^2 \eta} \end{cases};$$

$h_\nu^{(n)}$, identique à $\varrho_n(0)$, est donné par l'équation (69) et l'on a:

$$(69.)^* \qquad h_\nu^{(n)} = \frac{(-1)^\nu}{2\Phi(\eta)} \cdot \prod_{i=1}^{i=\nu-1} \left(1 - \frac{\eta}{\eta_{2n+\nu}^{(i)}}\right).$$

Dans le cas des fonctions elliptiques c. à. d. pour $\nu = 2$ ces dernières équations sont suffisantes, et l'on n'a même pas besoin d'introduire z au lieu de y dans l'équation (66), car dans ce cas ϱ_n est du second degré et par conséquent entièrement déterminé par les trois coëfficients $h_0^{(n)}$, $h_1^{(n)}$, $h_\nu^{(n)} = h_2^{(n)}$. Le problème de déterminer le développement en fraction continue de la racine carrée d'une fonction du quatrième degré est donc résolu par les équations (69, 70, 71, 72, 73), et le résultat peut être énoncé dans le théorème suivant:

Théorème. „Soit

$$\sqrt{Z} = \sqrt{z(z-1)\left(z - \frac{1}{1-\eta}\right)\left(z - \frac{1}{1-\varkappa^2\eta}\right)} = \varrho_0 + \frac{1}{2v_0} + \frac{1}{2v_1} + \cdots + \frac{1}{2v_{n-1}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{Z} + \varrho_n}{\sigma_n}}$$

$$0 < \eta < 1$$

$$\Phi(y) = (1-y)(1-\varkappa^2 y)$$

$$H = \eta\Phi(\eta)$$

$$\Psi(y) = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\varkappa^2 y)}}$$

et soit η_μ défini par l'équation transcendante:

$$\mu\Psi(\eta) = \pm\Psi(\eta_\mu).$$

Cela posé, les quantités ϱ_n , σ_n sont données par les équations:

$$\varrho_n = z^2 - \tfrac{1}{2}\left(4 - \frac{\eta H'}{H}\right) z + \frac{1}{2\Phi(\eta)}\left(1 - \frac{\eta}{\eta_{2n+2}}\right),$$

$$\sigma_n = \sigma_n(0)\left\{1 - \left(1 - \frac{\eta}{\eta_{2n+3}}\right) z\right\},$$

$$\sigma_{2n-1}(0) = +\left\{\frac{\left(1-\frac{\eta}{\eta_4}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_8}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\eta}{\eta_{4n}}\right)}{\left(1-\frac{\eta}{\eta_2}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_6}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\eta}{\eta_{4n-2}}\right)}\right\}^2,$$

$$\sigma_{2n}(0) = -\left\{\frac{1}{2\Phi(\eta)}\cdot\frac{\left(1-\frac{\eta}{\eta_2}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_6}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\eta}{\eta_{4n-2}}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_{4n+2}}\right)}{\left(1-\frac{\eta}{\eta_4}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_8}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\eta}{\eta_{4n}}\right)}\right\}^2.$$

Ces résultats s'accordent entièrement avec ceux que *Jacobi* a donnés sans démonstration dans le tome VII, pag. 42 de ce Journal. Pour les rendre identiques on n'a qu'à poser

$$\varrho_n = z^2 - \tfrac{1}{2} a z + i_{n+1},$$

$$\sigma_n = -q_{n+1}(1 - r_{n+1} z),$$

$$\Psi(\eta) = u,$$

d'où, d'après la notation des fonctions elliptiques introduite par *Jacobi:*

$$\eta = (\sin\mathrm{am}(u))^2,$$

$$\eta_\mu = (\sin\mathrm{am}(\mu u))^2;$$

alors les quantités a, i_n, q_n, r_n, u sont précisément celles que *Jacobi* a désignées par les mêmes lettres.

6.

Il ne reste plus qu'à réduire les fonctions ϱ_n, σ_n à leur plus simple expression.

Introduisons les quantités

$$\zeta_\mu^{(i)} = \frac{\eta_\mu^{(i)}}{\eta_\mu^{(i)} - \eta}, \tag{74.}$$

de sorte que pour $y = \eta_\mu^{(i)}$, z prend la valeur $\zeta_\mu^{(i)}$, et posons

$$Z = zF(z), \tag{75.}$$

d'où d'après (18, 21):

$$F(z) = (z-1)(z-b_1)(z-b_2)\ldots\ldots(z-b_{2\nu-2})$$

$$= (z-1)\left(z-\frac{1}{1-\eta}\right)\left(z-\frac{1}{1-\varkappa_1^2\eta}\right)\ldots\ldots\left(z-\frac{1}{1-\varkappa_{2\nu-3}^2\eta}\right),$$

et d'aprés (34):

$$F(0) = -\frac{1}{\Phi(\eta)}.$$

Cela posé, les équations (70, 71) par lesquelles on détermine σ_n, prennent la forme simple*):

$$(71.)^* \qquad \sigma_n = \sigma_n(0)\, \Pi\left(1-\frac{z}{\zeta_{2n+\nu+1}}\right)$$

$$(70.)^* \quad \begin{cases} \sigma_{2n-1}(0) = \left\{\Pi \dfrac{\zeta_\nu \quad \zeta_{\nu+4} \ldots\ldots \zeta_{\nu+4n-4}}{\zeta_{\nu+2}\zeta_{\nu+6} \ldots\ldots \zeta_{\nu+4n-2}}\right\}^2 \\ \sigma_{2n}(0) = -\left\{\frac{1}{2}F(0)\, \Pi \dfrac{\zeta_{\nu+2}\zeta_{\nu+6}\ldots\ldots\zeta_{\nu+4n-2}}{\zeta_\nu \quad \zeta_{\nu+4}\ldots\zeta_{\nu+4n-4}\zeta_{\nu+4n}}\right\}^2. \end{cases}$$

Pour le calcul de ϱ_n divisons la formule

$$(22.) \qquad \sqrt{Z} = \frac{\eta^\nu}{\sqrt{H}} \cdot \frac{\sqrt{Y}}{(y-\eta)^\nu},$$

par

$$(20.) \qquad z = \frac{y}{y-\eta},$$

d'où, d'après (75, 34):

$$\sqrt{\frac{F(z)}{z}} = \frac{\eta^\nu}{\sqrt{H}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\Phi(y)}{y}}}{(y-\eta)^{\nu-1}} \quad ;$$

donc en posant

$$\frac{\eta^\nu}{\sqrt{H}} \cdot \frac{T(y)}{(y-\eta)^{\nu-2}} = \theta(z),$$

---

*) Pour plus de simplicité on s'est abstenu d'écrire dans les produits suivants les indices supérieurs des quantités $\zeta_\mu^{(i)}$. Les signes Π se rapportent à toutes les valeurs 1, 2, ...$\nu-1$ de l'indice supérieur de sorte que p. e. $\Pi\zeta_\mu = \zeta_\mu' \zeta_\mu'' \ldots\ldots \zeta_\mu^{(\nu-1)}$.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

l'on obtient:

$$(76.)\quad \theta(z) = \sum_{i=1}^{i=\nu-1} e^{(i)} \sqrt{\frac{F(\zeta^{(i)}_{2n+\nu})}{\zeta^{(i)}_{2n+\nu}} \cdot \frac{(z-\zeta'_{2n+\nu})\ldots\ldots(z-\zeta^{(\nu-1)}_{2n+\nu})}{(\zeta^{(i)}_{2n+\nu}-\zeta'_{2n+\nu})\ldots\ldots(\zeta^{(i)}_{2n+\nu}-\zeta^{(\nu-1)}_{2n+\nu})}},$$

celle des différences qui a $\zeta^{(i)}_{2n+\nu}$ pour terme soustractif devant être omise dans le numérateur comme dans le dénominateur. On obtient de même:

$$\frac{\eta^\nu}{\sqrt{H}} \cdot \sqrt{\frac{\Phi(\eta)}{\eta}} \cdot \frac{B(y)}{B(\eta)} \cdot \frac{1}{(y-\eta)^{\nu-1}} = \frac{\eta^{\nu-1}}{(y-\eta)^{\nu-1}} \cdot \frac{B(y)}{B(\eta)} = \Pi(z-\zeta_{2n+\nu}) .$$

En substituant ces valeurs dans les équations **(63)**, on trouve:

$$\frac{\eta^\nu}{\sqrt{H}} \cdot \frac{V(y)}{(y-\eta)^{\nu-1}} = \theta(z) + \Pi(z-\zeta_{2n+\nu}) ,$$

$$\frac{\eta^\nu}{\sqrt{H}} \cdot \frac{V_1(y)}{(y-\eta)^{\nu-1}} = \theta(z) - \Pi(z-\zeta_{2n+\nu}) ;$$

et, à l'aide de ces valeurs, l'équation

$$(y-\eta)^\nu \varrho_n = R_n = \tfrac{1}{2} \frac{\eta^\nu B\eta}{\Phi(\eta)} \cdot \frac{\Phi(y) - yV(y)V_1(y)}{B(y)} ,$$

qui résulte de la combinaison de l'équation **(66)** et de la troisième des équations **(24)** se change en:

$$(77.)\qquad \varrho_n = \tfrac{1}{2} \left\{ z\,\Pi(z-\zeta_{2n+\nu}) + \frac{F(z) - z(\theta(z))^2}{\Pi(z-\zeta_{2n+\nu})} \right\} .$$

En introduisant la substitution

$$(20.)\qquad z = \frac{y}{y-\eta} ,$$

dans l'intégrale

$$(35.)\qquad \Psi(y) = \int_0^y \frac{L_0 + L_1 y + \ldots\ldots + L_{\nu-2} y^{\nu-2}}{\sqrt{y\,\Phi(y)}}\, dy$$

on obtient:

$$(78.)\quad \Psi(y) = \Omega(z) = \int_0^z \frac{\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots\ldots + \lambda_{\nu-2} z^{\nu-2}}{\sqrt{zF(z)}} dz\,,$$

$\lambda_0, \lambda_1, \ldots\ldots \lambda_{\nu-2}$ représentant un nouveau système de coëfficients arbitraires déterminés convenablement en fonction de $L_0, L_1, \ldots L_{\nu-2}$.

Ces transformations (20, 74, 78) introduites dans l'équation (43) et dans la seconde des équations (48) permettent de définir directement les quantités $\zeta_\mu', \zeta_\mu'', \ldots\ldots \zeta_\mu^{(\nu-1)}$ et les signes $e', e'', \ldots\ldots e^{(\nu-1)}$ par les équations transcendantes:

$$(79.)\quad \mu\,\Omega(-\infty) = \pm\Omega(\zeta_\mu') \pm \Omega(\zeta_\mu'') \pm \ldots\ldots \pm \Omega(\zeta_\mu^{(\nu-1)})\,,$$

$$(80.)\quad (2n+\nu)\,\Omega(-\infty) = e'\Omega(\zeta_{2n+\nu}') + e''\Omega(\zeta_{2n+\nu}'') + \ldots\ldots + e^{(\nu-1)}\Omega(\zeta_{2n+\nu}^{(\nu-1)})\,,$$

ayant lieu pour toutes les valeurs possibles des coëfficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots\ldots \lambda_{\nu-2}$.

Introduisons enfin au lieu de z et de ϱ_n, σ_n la première variable x et les quantités r_n, s_n par les relations:

$$(15.)\quad x - a_1 = (a_2 - a_1)\,z\,,$$

$$(19.)\quad \begin{cases} r_n = (a_2 - a_1)^\nu \varrho_n \\ s_{2n} = (a_2 - a_1)^{2\nu}\,\sigma_{2n}\,,\quad s_{2n+1} = \sigma_{2n+1}\,. \end{cases}$$

Posons

$$(81.)\quad \xi_\mu^{(i)} - a_1 = (a_2 - a_1)\,\zeta_\mu^{(i)}$$

et

$$(82.)\quad X = (x - a_1)\,\varphi(x)\,,$$

d'où d'après (14, 16):

$$\varphi(x) = (x - a_2)(x - a_3)\ldots\ldots(x - a_{2\nu})\,,$$

$$\varphi(a_1) = (a_2 - a_1)^{2\nu-1} F(0)\,,$$

et divisons la formule

$$(17.)\quad \sqrt{X} = (a_2 - a_1)^\nu \sqrt{Z}$$

par

$$(15.)\quad x - a_1 = (a_2 - a_1)\,z\,,$$

d'où, d'après (82, 75):

$$\sqrt{\frac{\varphi(x)}{x-a_1}} = (a_2-a_1)^{\nu-1}\sqrt{\frac{F(z)}{z}},$$

donc, en posant

$$(a_2-a_1)^{\nu-1}\theta(z) = t_n,$$

$\theta(z)$ étant défini par l'équation (76), on obtient:

$$(83.)\quad t_n = \sum_{i=1}^{i=\nu-1} e^{(i)}\sqrt{\frac{\varphi(\xi^{(i)}_{2n+\nu})}{\xi^{(i)}_{2n+\nu}-a_1}\cdot\frac{(x-\xi'_{2n+\nu})\ldots\ldots(x-\xi^{(\nu-1)}_{2n+\nu})}{(\xi^{(i)}_{2n+\nu}-\xi'_{2n+\nu})\ldots\ldots(\xi^{(i)}_{2n+\nu}-\xi^{(\nu-1)}_{2n+\nu})}},$$

celles des différences qui a $\xi^{(i)}_{2n+\nu}$ pour terme soustractif devant être omise dans le numérateur comme dans le dénominateur. On obtient de même*):

$$(a_2-a_1)^{\nu-1}\Pi(z-\zeta_{2n+\nu}) = \Pi(x-\xi_{2n+\nu}).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (77), ϱ_n étant exprimé en r_n par l'une des relations (19), on trouve:

$$(84.)\quad r_n = (a_2-a_1)^{\nu}\varrho_n = \tfrac{1}{2}\left\{(x-a_1)\Pi(x-\xi_{2n+\nu}) + \frac{\varphi(x)-(x-a_1)t_n^2}{\Pi(x-\xi_{2n+\nu})}\right\}.$$

Un calcul analogue transforme (70)* et (71)* dans les formules suivantes:

$$(85.)\quad s_n = s_n(0)\,\Pi\left(1-\frac{x-a_1}{\xi_{2n+\nu+1}-a_1}\right) = s_n(0)\,\Pi\left(\frac{x-\xi_{2n+\nu+1}}{a_1-\xi_{2n+\nu+1}}\right),$$

$$(86.)\quad \begin{cases} s_{2n-1}(0) = \left\{\Pi\dfrac{(\xi_\nu-a_1)(\xi_{\nu+4}-a_1)\ldots\ldots(\xi_{\nu+4n-4}-a_1)}{(\xi_{\nu+2}-a_1)(\xi_{\nu+6}-a_1)\ldots\ldots(\xi_{\nu+4n-2}-a_1)}\right\}^2 \\ s_{2n}(0) = -\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a_1)\,\Pi\dfrac{(\xi_{\nu+2}-a_1)(\xi_{\nu+6}-a_1)\ldots\ldots(\xi_{\nu+4n-2}-a_1)}{(\xi_\nu-a_1)(\xi_{\nu+4}-a_1)\ldots\ldots\ldots(\xi_{\nu+4n-4}-a_1)(\xi_{\nu+4n}-a_1)}\right\}^2, \end{cases}$$

En introduisant la substitution

$$(15.)\quad x-a_1 = (a_2-a_1)z,$$

dans l'intégrale (78), on obtient:

---

*) On s'est abstenu d'écrire dans les produits suivants les indices supérieurs des quantités $\xi^{(i)}_{\mu}$ Les signes Π se rapportent à toutes les valeurs 1, 2, $\ldots\ldots\nu-1$ de l'indice supérieur.

$$(87.)\quad \Omega(z) = \psi(x) = \int_{a_1}^{x} \frac{l_0 + l_1 x + \ldots\ldots + l_{\nu-2} x^{\nu-2}}{\sqrt{X}}\, dx\,,$$

$l_0, l_1, \ldots\ldots l_{\nu-2}$ représentant un troisième système de coëfficients arbitraires déterminés convenablement en fonction de $\lambda_0, \lambda_1, \ldots\ldots \lambda_{\nu-2}$.

Ces transformations **(15, 80, 87)** introduites dans les équations **(79, 80)** permettent de définir directement les quantités $\xi'_\mu, \xi''_\mu, \ldots\ldots \xi^{(\nu-1)}_\mu$ et les signes $e', e'' \ldots\ldots e^{(\nu-1)}$ par les équations transcendantes:

$$(88.)\qquad \mu\psi(\pm\infty) = \pm\psi(\xi'_\mu) \pm \psi(\xi''_\mu) \pm \ldots\ldots \pm \psi(\xi^{(\nu-1)}_\mu)\,,$$

$$(89.)\quad (2n+\nu)\psi(\pm\infty) = e'\psi(\xi'_{2n+\nu}) + e''\psi(\xi''_{2n+\nu}) + \ldots. + e^{(\nu-1)}\psi(\xi^{(\nu-1)}_{2n+\nu}),$$

l'infini étant positif ou négatif suivant que a_1 est la plus grande ou la plus petite des racines de l'équation

$$X = 0\,.$$

Les équations **(1, 2, 14)** et **(82)** jusqu'à **(89)** donnent la solution complète et générale du problème de développer en fraction continue la racine carrée d'une fonction entière de degré pair. Sans en restreindre aucunement la généralité et sans changer ni la valeur de la racine carrée ni celle du quotient complet de la fraction continue, on peut simplifier les formules en écrivant x au lieu de $x - a_1$.

Si, pour fixer les idées, l'on suppose que a_1 soit la plus petite des quantités $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{2\nu}$, on arrive par ce changement au même résultat que l'on obtiendrait en posant $a_1 = 0$, les quantités $a_2, a_3, \ldots\ldots a_{2\nu}$ étant toutes positives.

En introduisant dans les équations **(82)** jusqu'à **(89)** le changement mentionné de $x - a_1$ en x et en écrivant en même temps

$a_1, a_2, \ldots\ldots a_{2\nu-1}$ au lieu de $a_2 - a_1\,,\ a_3 - a_1\,,\ \ldots\ldots a_{2\nu} - a_1\,,$

$\xi'_\mu\,,\ \xi''_\mu \ldots\ldots \xi^{(\nu-1)}_\mu$ au lieu de $\xi'_\mu - a_1\,,\ \xi''_\mu - a_1\,,\ \ldots\ldots \xi^{(\nu-1)}_\mu - a_1\,,$

$e'_n\,,\ e''_n \ldots\ldots e^{(\nu-1)}_n$ au lieu de $e'\,,\ e''\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots e^{(\nu-1)}\,,$

on est conduit au théorème suivant que l'on peut considérer comme le résultat essentiel des recherches qui forment l'objet de ce mémoire:

Théorème. „*Soient* $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{2\nu-1}$ *des quantités positives, soit*

$$\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_{2\nu-1}),$$

$$\sqrt{x\varphi(x)} = r_0 + \cfrac{1}{2v_0 + \cfrac{1}{2v_1 + \ldots\ldots + \cfrac{1}{2v_{n-1} + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{x\varphi(x)}+r_n}{s_n}}}}},$$

le développement en fraction continue étant fait d'après la méthode du n^0 **1**, *soit*

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{l_0 + l_1 x + \ldots\ldots + l_{\nu-2}x^{\nu-2}}{\sqrt{x\varphi(x)}}\,dx,$$

et soient les quantités $\xi'_\mu, \xi''_\mu, \ldots\ldots \xi^{(\nu-1)}_\mu$ *et les signes* $e'_n, e''_n, \ldots\ldots e^{(\nu-1)}_n$ *définis par les équations:*

$$\mu\psi(-\infty) = \pm\psi(\xi'_\mu) \pm \psi(\xi''_\mu) \pm \ldots\ldots \pm \psi(\xi^{(\nu-1)}_\mu),$$

$$(2n+\nu)\psi(-\infty) = e'_n\psi(\xi'_{2n+\nu}) + e''_n\psi(\xi''_{2n+\nu}) + \ldots\ldots + e^{(\nu-1)}_n\psi(\xi^{(\nu-1)}_{2n+\nu}),$$

ayant lieu pour toutes les valeurs possibles de $l_0, l_1, \ldots\ldots l_{\nu-2}$: *cela posé, les fonctions* r_n, s_n *à la détermination desquelles se réduit celle du quotient complet de la fraction continue proposée, et la fonction auxiliaire* t_n *sont données par les équations suivantes:*

$$s_n = s_n(0)\,\Pi\left(1 - \frac{x}{\xi_{2n+\nu+1}}\right),$$

$$s_{2n-1}(0) = \left\{\Pi \frac{\xi_\nu\ \xi_{\nu+4}\ldots\ldots\xi_{\nu+4n-4}}{\xi_{\nu+2}\xi_{\nu+6}\ldots\ldots\xi_{\nu+4n-2}}\right\}^2,$$

$$s_{2n}(0) = -\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(0)\,\Pi \frac{\xi_{\nu+2}\xi_{\nu+6}\ldots\ldots\xi_{\nu+4n-2}}{\xi_\nu\ \xi_{\nu+4}\ldots\ldots\xi_{\nu+4n-4}\xi_{\nu+4n}}\right\}^2,$$

$$r_n = \tfrac{1}{2}\left\{x\,\Pi(x-\xi_{2n+\nu}) + \frac{\varphi(x) - xt_n^2}{\Pi(x-\xi_{2n+\nu})}\right\}$$

$$t_n = \sum_{i=1}^{i=\nu-1} e_n^{(i)} \sqrt{\frac{\varphi(\xi^{(i)}_{2n+\nu})}{\xi^{(i)}_{2n+\nu}}} \cdot \frac{(x-\xi'_{2n+\nu})\ldots\ldots(x-\xi^{(\nu-1)}_{2n+\nu})}{(\xi^{(i)}_{2n+\nu}-\xi'_{2n+\nu})\ldots\ldots(\xi^{(i)}_{2n+\nu}-\xi^{(\nu-1)}_{2n+\nu})},$$

les produits Π *se rapportant aux valeurs* $\mathbf{1}, \mathbf{2} \ldots\ldots \nu-\mathbf{1}$ *de l'indice supérieur* (i) *des quantités* $\xi^{(i)}_\mu$ (indice que pour plus de simplicité on s'est abstenu d'y écrire)

et celle des différences qui a $\xi^{(i)}_{2n+\nu}$ *pour terme soustractif devant être omise dans le numérateur comme dans le dénominateur du terme général de* t_n."

Ainsi, l'on est parvenu à faire dépendre le développement de

$$\sqrt{x(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_{2\nu-1})}$$

en fraction continue de la multiplication de la transcendante $\psi(-\infty)$, c. à. d. de la multiplication de l'intégrale abélienne:

$$\int \frac{l_0 + l_1 x + \ldots\ldots + l_{\nu-2} x^{\nu-2}}{\sqrt{x(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_{2\nu-1})}}\, dx\,,$$

prise entre les limites $-\infty$ et 0.

Berlin, Août 1853.

3.

Ueber die gegenseitigen Beziehungen zwischen irgend einer ebnen Curve und den ihr zugehörigen, einem gemeinschaftlichen Pole entsprechenden Directrix- und Fusspunctenlinien.

(Von dem Herrn Dr. *Raabe*, Professor der Math. an der Universität zu Zürich.)

Um im Voraus Missverständnissen über die Natur der in der Ueberschrift gemeinten Linien zu begegnen, setze ich das Nöthige über die Art ihrer Erzeugung hier her.

Es sei irgend eine ebene Curve A gegeben. In der gleichen Ebene nehme man einen festen Punct P an, welcher *Pol* heissen soll.

I. Wenn nun von den verschiedenen Peripheriepuncten der Curve A, einerseits nach dem Pole P grade Linien, anderseits nach einer zu suchenden Curve Normalen gezogen werden, so nenne ich die zu suchende Curve *Directrix zur Curve A*, sobald je zwei der eben beschriebenen in einem Peripheriepuncte von A zusammentreffenden Geraden einander *gleich* sind.

II. Wenn ferner durch die verschiedenen Peripheriepuncte der Curve A *Tangenten* an dieselbe gelegt, und von dem gemeinsamen Pole P aus Perpendikel auf diese Tangenten gezogen werden, so nenne ich die Curve, in welcher alle diese Begegnungspuncte liegen, *Fusspunctenlinie zur Curve A*.

Diese zwei aus der Curve A gebildeten neuen Curven stehen unter einander, so wie zur erstern in beachtenswerthen Beziehungen; die in den folgenden Blättern, mit Zuziehung singulärer Integral-Auflösungen, entwickelt werden sollen. Zu diesem Ende werde ich im folgenden Paragraph die geometrische Bedeutung einer singulären Integral-Auflösung in der Lehre der Curven angeben. Die nöthi-

gen Citate aus meiner Integralrechnung werde ich jedesmal durch (Ir. No.....) andeuten.

1.

Wenn die Erledigung irgend einer Frage auf eine *Differentialgleichung* zurückgeführt worden ist, so hat es keinen Zweifel, dass dann eine *Integralgleichung* derselben auf eine anschaulichere Weise als jene den Gegenstand darstellt. Wenn nun die Anforderungen an eine herzustellende Curve durch eine Differentialgleichung *erster* Ordnung ausdrückbar sind, (und nur mit solchen werden wir uns in der vorliegenden Abhandlung beschäftigen), so wird erst die vollständige Integralgleichung derselben die nähere Beschaffenheit der Curve klar zur Anschauung bringen. Da ferner eine solche Integralgleichung jedesmal eine willkührliche *Constante*, die in der Differentialgleichung nicht enthalten ist, mit sich führt, so entspricht ihr auch jede, durch Specialisirung dieser Constante, die man als allgemeinen *Parameter* der Curve ansehen kann, sich ergebende Curve; oder, in der Sprache der Analysis: jede *particuläre Integral-Auflösung* stellt noch immer eine Curve dar, welche der zum Grunde gelegten Differentialgleichung, als dem analytischen Ausdrucke des fraglichen Objects, genügt.

Derselben Differentialgleichung erster Ordnung entspricht zuweilen auch eine endliche Gleichung, in der Beziehung eines Integrals, die, obgleich sie in Folge bestimmter Verfügungen über die allgemeine Integrationsconstante aus der vollständigen Integralgleichung nicht abzunehmen ist, der erwähnten Beziehung wegen gleichwohl eine Curve repräsentirt, welche den Anforderungen der Frage völlig nachkommt. Diese Curve nun, deren Gleichung, nach *Lagrange*, die *singuläre Integral-Auflösung* der Differentialgleichung erster Ordnung genannt wird, steht in interessanten geometrischen Beziehungen zu den Curven, deren Gleichungen die oben erwähnten *particulären Integral-Auflösungen* sind; zu deren Mittheilung wir nun sofort übergehen.

Bekanntlich erhält man eine, hier in Rede stehende *singuläre* Integral-Auflösung, wenn man in der *vollständigen* Integralgleichung die Integrationsconstante als *Variable*, auf die Weise behandelt, dass die sich ergebende Gleichung (die singulaire Integral-Auflösung) noch immer in der Beziehung einer Integralgleichung zu der in Rede stehenden Differentialgleichung erster Ordnung, eben so wie die vollständige Integralgleichung, verbleibt.

Stellt man sich nun aus der vollständigen Integralgleichung y als Function von x (wo y und x die allgemein übliche Bezeichnung der Coordinaten irgend

eines Punctes sind) die allgemeine Integrationsconstante a ermittelt vor, und leitet hierauf den Differentialquotienten von y nach x ab, den wir durch $y_,$ ausdrücken werden; stellt man sich eben so aus der *singulären* Integral-Auflösung y als Function von x sammt dem betreffenden Differentialquotienten $y_,$ abgeleitet vor; schliesst man die Buchstaben y und $y_,$ um sie von jenen vorhin erwähnten zu unterscheiden, in Parenthesen, d. h. setzt man, während man in der *vollständigen* Integralgleichung einfach y und $y_,$ schreibt, für die analogen Ausdrücke bei der *singulären* Integral-Auflösung (y) und $(y)_,$: so werden sowohl die Functionen von x, welche y und $y_,$ wie die welche (y) und $(y)_,$ respective ausdrücken, (jedes dieser Functionenpaare für sich) die hier in Rede stehende Differentialgleichung erster Ordnung identisch erfüllen.

Giebt es, Dies vorausgesetzt, *reelle* Werthe von x, die $y = (y)$ herausstellen; bei welcher Annahme die Curve der *singulären* Integral-Auflösung mit derjenigen, welche der *vollständigen* Integralgleichung mit allgemeinem constanten Parameter (Integrationsconstante) angehört, Puncte gemein hat: so wird für dieselben reellen Werthe von x auch $y_, = (y)_,$ nothwendig eintreffen. Wenn überdiess noch jede dieser als *gleich* unter einander erkannten Grössen zu den *reellen* gehört; so ergiebt sich die weitere Folgerung, dass die eben erwähnten zwei Arten von Curven, je in den Puncten wo sie einander begegnen, *gemeinsame Tangenten* haben.

Hält man die Annahme der letztern Folgerung fest, und stellt sich aus der vollständigen Integralgleichung eine Reihe auf einander folgender Curven verzeichnet vor, die verschiedenen auf einander folgenden constanten Werthen des allgemeinen Parameters (der Integrationsconstante) entsprechen: so wird jede dieser Curven mit der Curve der singulären Integral-Auflösung, falls von den Vieldeutigkeiten der Functionen einstweilen abgesehen wird, einen Punct gemein haben; und da ferner an diesem gemeinsamen Puncte beide Curven jedesmal dieselbe *Tangente* haben: so zeigt sich die Curve der singulären Integral-Auflösung als eine *tangirende* sämmtlicher verschiedenen, durch die constanten Werthe des *Parameters* aus der vollständigen Integralgleichung erzeugten Curven. Diese Beziehung einer Linie zu einem *Systeme* von Linien, welche eine gemeinschaftliche Entstehungsquelle haben, nennen die Geometer eine *Einhüllung*. Demnach *hüllt* die Linie der singulären Integral-Auflösung sämmtliche Linien, die den particulären Integral-Auflösungen entsprechen, *ein*, und wird deswegen auch die *Einhüllungslinie* zu diesen letztern genannt.

Diese Benennung stützt sich aber auf die Annahme, dass sämmtliche

Linien, die einer Reihe auf einander folgender constanter Werthe des allgemeinen Parameters einer Curve zugehören, mit der Linie, die einer singulären Auflösung desselben Gegenstandes zugehört, *gemeinschaftliche Punctencoordinaten* haben. Dass diese Annahme unter allen Umständen Statt hat, ergiebt sich auf folgende Weise.

Wenn die *collständige* Integralgleichung einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y auf die Form

$$\text{(a.)} \qquad y = (fx, a)$$

gebracht ist, wo a die Integrationsconstante oder der allgemeine *Parameter* der durch die Gleichung vorgestellten Curve ist, so ergiebt sich die *singuläre* Integral-Auflösung der in Rede stehenden Differentialgleichung erster Ordnung, wenn man die Gleichung (a) mit $\frac{dy}{da} = 0$ (Ir. No. 594) durch Elimination von a verbindet. Stellt man den partiellen Differentialquotienten von $f(x,a)$, nach a, der Einfachheit wegen durch $f(x,a)$ dar, d. h., setzt man die Gleichung

$$\text{(b.)} \qquad \frac{dy}{da} = f'(x,a) = 0\,,$$

so gelangt man auf die *singuläre Integral-Auflösung*, wenn nun aus den Gleichungen (a und b) a eliminirt; wobei jedoch zu bemerken ist, dass das Eliminations-Ergebniss durch keinerlei constante Verfügung über a aus (1) zu ziehen möglich sei, weil es sonst nur eine *particuläre* Integral-Auflösung darstellen würde.

Bei der Untersuchung der Linie dieser *singulären* Integral-Auflösung in Beziehung auf gemeinsame Puncte mit der durch (a) vorgestellten Linie, in welcher noch der allgemeine, aber constante Parameter vorkommt, hat man nun das simultane Bestandhaben der betreffenden zwei Gleichungen in Beziehung auf x und y vorerst im Auge zu behalten. Statt dieser zwei Gleichungen kann man auch, wie aus dem eben Gesagten erhellet, die Gleichungen (a und b) unterlegen. Die letztere (b) giebt nothwendig x als Function von a; und wenn man dieses Ergebniss in (a) einführt, wird auch y als Function von a (wenn auch nur in der allgemeinsten Bedeutung einer Function (Ir. No. 1)) anzunehmen gestattet sein. Hieraus geht hervor, dass die Gleichung der *singulären* Integral-Auflösung und die der *collständigen* Integralgleichung jedesmal zusammengehörige Werthe von x und y geben, welche bestimmte Functionen von a sind. Diese *zusammengehörigen* Werthe von x und y deuten aber, falls sie als *reell* erkannt wer-

den, auf einen Begegnungspunct je einer der Linien der vollständigen Integralgleichung (die nämlich einem bestimmten und constanten Werthe von a zugehört) mit der der singulären Integral-Auflösung hin; daher wird die *Gesammtheit* aller dieser Puncte der oben erwähnten *Einhüllungslinie*, oder der *singulären* Integral-Auflösung angehören.

2.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über die geometrische Bedeutung der singulären Integral-Auflösung einer Differentialgleichung erster Ordnung gehe ich zum eigentlichen Gegenstande dieser Abhandlung über, und eröffne solchen mit einem Problem, mit welchem ich mich bereits in diesem Journale (2ter Band, Abh. 32) theilweise beschäftigte.

Problem. Zu einer ebnen Curve A und einem in ihrer Ebene angenommenen Puncte P, *Pol* genannt, wird eine Linie von der Art gesucht, dass die Normalen, die von den verschiedenen Peripheriepuncten der Curve A nach der gesuchten gezogen werden, respective den Abständen der gleichen Peripheriepuncte von dem Pole P gleich sind.

Die gesuchte Linie ist offenbar die in der Einleitung in (I) bezeichnete *Directrix*; die wir nun bisweilen auch, der Kürze wegen, *Linie D* nennen werden.

Sämmtliche geometrische Puncte, auf welche es in diesem Problem, so wie in den in der Folge aufzustellenden Problemen ankommt, beziehen wir auf ein *gemeinschaftliches rechtwinkliges Coordinatensystem.* Nach diesem Coordinatensystem sei α die Abscisse und β die Ordinate des *Pols* P; ferner sei ξ die Abscisse und υ die Ordinate irgend eines Puncts der *gegebenen Curve A*, so wie, analog, x die Abscisse und y die Ordinate irgend eines Puncts der *gesuchten Linie D.*

Dieses festgestellt, sei die Gleichung der Curve A folgende:

$$(1.) \qquad f(\xi, \upsilon) = 0 \ ;$$

wo f ein beliebiges Functionszeichen der Coordinaten ξ, υ ist. Zieht man durch irgend einen Punct ξ, υ dieser Curve (einen Punct, dessen Abscisse a und dessen Ordinate b ist, werden wir nemlich in der Folge durch a, b bezeichnen) eine *Normale* auf die gesuchte Directrix D, so hat man, wenn x und y die Coordinaten des Puncts sind, wo die Linie D von besagter Normale getroffen wird, die Gleichung:

$$(2.) \qquad \xi - x + (\upsilon - y)\, y_1 = 0\,;$$

wo y_1, wie im vorigen Paragraph, statt $\frac{dy}{dx}$ gesetzt worden ist. Da ferner der von den zwei Puncten ξ, υ und x, y begrenzte Theil dieser Normale der zweiten Wurzel aus $(\xi - x)^2 + (\upsilon - y)^2$ gleich ist, und da diese, der Anforderung des Problems gemäss, der Verbindungslinie des Puncts ξ, υ mit dem Pole gleich, und dieser durch die zweite Wurzel aus $(\xi - \alpha)^2 + (\upsilon - \beta)^2$ gegeben ist, so hat man noch die Gleichung

$$(\xi - \alpha)^2 + (\upsilon - \beta)^2 = (\xi - x)^2 + (\upsilon - y)^2,$$

welche auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$(3.) \qquad 2(x - \alpha)\xi + 2(y - \beta)\upsilon = x^2 + y^2 - \alpha^2 - \beta^2.$$

Stellt man sich nun aus den hier aufgestellten drei Gleichungen die Variabeln ξ und υ *eliminirt* vor, so gelangt man zu einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den Coordinaten irgend eines Puncts der gesuchten *Directrix*. Da aber der directen Integration dieser Differentialgleichung die Unbestimmtheit der Function f in der Gleichung (1) im Wege steht, so differentiire man die Gleichung (1) in der Voraussetzung, dass in derselben ξ und υ, gemäss (2 und 3), durch Functionen von x, y und y_1 ersetzt worden sind. Dadurch gelangt man zu folgender Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(4.) \qquad \left\{(y - \beta)\frac{df}{d\xi} - (x - \alpha)\frac{df}{dv}\right\}$$

$$\times\{[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]\, y_2 - 2[(x - \alpha)\, y_1 - (y - \beta)](1 + y_1^2)\} = 0\,;$$

wo zur Vereinfachung f statt $f(\xi, \upsilon)$ gesetzt und der zweite Differentialquotient von y nach x durch y_2 ausgedrückt ist.

Durch Nullsetzung des einen oder des andern der zwei Factoren dieser Gleichung gelangt man, wie bekannt, einerseits auf die *vollständige* Integralgleichung, andererseits auf die *singuläre* Integral-Auflösung des Problems; womit wir uns nun einzeln in den zwei folgenden Paragraphen beschäftigen werden.

3.

Zur *vollständigen* Integralgleichung gelangt man durch Nullsetzen des y_2 enthaltenden Factors obiger Gleichung (4), so dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\}y_1-2\{(x-\alpha)y_1-(y-\beta)\}(1+y_1^2)=0$$

vollständig zu integriren ist. Wird diese Gleichung wie folgt gestellt:

$$\frac{y_2}{1+y_1^2}=2.\frac{(x-\alpha)y_1-(y-\beta)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2},$$

so erhält man leicht folgende:

$$\frac{dy_1}{1+y_1^2}=2.\frac{d.\frac{y-\beta}{x-\alpha}}{1+\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)^2},$$

deren Integration vollzogen, auf die Gleichung

$$(5.)\qquad [(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2-2a(x-\alpha)(y-\beta)]y_1$$
$$=a[(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2]+2(x-\alpha)(y-\beta),$$

führt; wo a die Integrationsconstante ist.

Verbindet man diese Gleichung mit denen (1, 2 und 3), um ξ, υ und y, zu eliminiren, so ergiebt sich die verlangte vollständige und endliche Integralgleichung zwischen y und x, die der gesuchten *Directrix* angehört und einen allgemeinen Parameter a (die eingeführte Integrationsconstante) enthält.

Um die vorgedachte Elimination auszuführen, erwäge man dass die Gleichungen (2 und 3) im vorigen Paragraph Folgendes gaben:

$$(6.)\qquad \begin{cases} \xi=\alpha+\frac{1}{2}.\dfrac{[(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2]y_1-2(x-\alpha)(y-\beta)}{(x-\alpha)y_1-(y-\beta)}, \\ \upsilon=\beta+\frac{1}{2}.\dfrac{(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)y_1}{(x-\alpha)y_1-(y-\beta)}; \end{cases}$$

und da (5) die folgenden drei Gleichungen giebt:

$$[(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2]y_1-2(x-\alpha)(y-\beta)=\frac{a[(x-\alpha)^2+(y-\beta)]^2}{(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2-2a(x-\alpha)(y-\beta)},$$

$$(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)y_1=\frac{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]^2}{(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2-2a(x-\alpha)(y-\beta)},$$

$$(x-\alpha)y_1-(y-\beta)=\frac{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2][a(x-\alpha)+(y-\beta)]}{(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2-2a(x-\alpha)(y-\beta)},$$

so erhält man auch:

$$(6'.)\qquad \begin{cases} \xi = \alpha + \frac{1}{2}a.\dfrac{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}{y-\beta+a(x-\alpha)}\,, \\ \upsilon = \beta + \frac{1}{2}.\dfrac{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}{y-\beta+a(x-\alpha)}\,. \end{cases}$$

Führt man diese Werthe von ξ und υ in die Gleichung (1) der gegebenen Curve A ein, so gelangt man zu dem Schlusse, dass die Function

$$\frac{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}{y-\beta+a(x-\alpha)}$$

von x und y eine von der Beschaffenheit des Functionszeichens f, so wie von den Constanten α, β und a abhängige Constante sei: d. h. dass die für die *Directrix* jeder Curve A gefundene vollständige Integralgleichung die Form

$$(7.)\qquad (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = ab(x-\alpha)+b(y-\beta)$$

hat, wo b die so eben vorhin erwähnte Constante ist. Dieses Ergebniss giebt folgende Sätze:

a) Die Directrix ist eine *Kreislinie.*

b) Wenn α' und β' respective Abscisse und Ordinate des Mittelpuncts dieses Kreises sind, so ist:

$$\alpha' = \alpha + \tfrac{1}{2}a.b \quad , \quad \beta' = \beta + \tfrac{1}{2}b\,.$$

Erwägt man noch die Bedeutung von b, so ergiebt sich durch Vergleichung dieser Ergebnisse mit denen der Gleichungen (6′), dass der Mittelpunct des besagten Kreises jedesmal in der Peripherie der unterlegten Curve A liegt.

c) Wenn ferner ϱ der Radius des Kreises ist, so findet sich

$$\varrho^2 = \tfrac{1}{4}b^2(1+a^2) = (\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2\,;$$

woraus folgt, dass dieser Radius dem Abstande des *Pols* von dem jedesmal in Anspruch genommenen Peripheriepuncte der unterlegten Curve A gleich ist.

Aus den Sätzen (b und c) folgt, dass für die durch die vollständige Integralgleichung (7) dargestellte *Directrix* nicht eine Linie, sondern eine *unendliche Anzahl von Kreislinien* vorhanden sind, deren Mittelpuncte längs der

Peripherie der gegebenen Curve A zerstreut sind, und deren Radien, wie namentlich der Bestimmungs-Ausdruck für ϱ^2 zeigt, dieselbe Veränderlichkeit annehmen, wie die Abstände des festen Pols von denselben Peripheriepuncten sie erfahren.

Fasset man nun dieses System von Kreislinien, die sich sämmtlich in dem Pole begegnen und deren Mittelpuncte in der Peripherie der gegebenen Curve A liegen, zusammen ins Auge, so ist es leicht, die *Einhüllungslinie* aller dieser Kreise, die nun particuläre Integral-Auflösungen der vollständigen Integral-Gleichung sind, als die *eigentlich gesuchte Directrix* zu erkennen. Es zeigt sich Dies unmittelbar, wenn die gegebene Curve A ein *Kreis* ist, dessen Mittelpunct mit dem Pole zusammenfällt; wo man dann leicht einen concentrischen Kreis von doppeltem Halbmesser als die verlangte *Einhüllungslinie*, oder als die eigentliche *Directrix* erkennt.

Nicht so leicht ist die Einhüllungslinie unter complicirtern Daten unmittelbar ersichtlich. Dann tritt aber die Hülfe der Analysis hinzu, die in der Herstellung der singulären Integral-Auflösung besteht, wozu wir folgenden Paragraph bestimmen.

4.

Setzt man den ersten Factor der Gleichung (4 in §. 2) gleich Null, so giebt die entstehende Gleichnng

$$(8.) \qquad (y-\beta)\frac{df}{d\xi}-(x-\alpha)\frac{df}{dv}=0\,,$$

verbunden mit der Gleichung (1) eben daselbst, durch Elimination von γ, nachdem man vorerst in diesen zwei Gleichungen ξ und v nach den Gleichungen in (6) ersetzt hat, die *singuläre Integral-Auflösung*, welche nach (§. 1) die gegenwärtig verlangte *Einhüllungslinie* ist.

Erwägt man weiter, dass die Gleichungen (6) aus denen in (2 und 3) eben daselbst genommen worden sind, dass aber die Gleichung (3) von γ, unabhängig ist; so stellt sich zur Erlangung der in Rede stehenden singulären Integral-Auflösung, die einfache Elimination von ξ und v aus den Gleichungen (1 und 3) in (§. 2), so wie aus der oben aufgestellten Gleichung (8) heraus; wo dann die resultirende, bloss x und y enthaltende Gleichung die *Einhüllungslinie* sämmtlicher in (§. 3) gefundenen Kreislinien sein wird. Diese der Elimination zu unterwerfenden Gleichungen zusammengestellt, sind folgende:

$$(9.)\quad \begin{cases} f(\xi,\upsilon)=0 \quad , \quad (y-\beta)\frac{df(\xi,v)}{d\xi}-(x-\alpha)\frac{df(\xi,v)}{dv}=0\,, \\ 2(x-\alpha)\xi+2(y-\beta)\upsilon=x^2+y^2-\alpha^2-\beta^2\,, \end{cases}$$

aus denen nun, wie gesagt, ξ und υ zu eliminiren sind.

Die erste dieser Gleichungen repräsentirt die unterlegte Curve A; α und β sind die Coordinaten des festen *Pols*; und die Ergebnissgleichung der Elimination ist die *Einhüllungslinie* sämmtlicher durch die Gleichung (7 in §. 3) vorgestellten *Kreise*, die den verschiedenen constanten Annahmen des Parameters a entsprechen.

Da jeder dieser *Kreise* die im Problem gestellte Anforderung einer *Directrix* erfüllt, und besagte Einhüllungslinie alle diese Directrixen *umfasset* oder sie *umhüllt*, so habe ich diese in meiner Eingangs (§. 2) citirten früheren Arbeit die „*Linie der Directrixen*" genannt, werde sie aber in der vorliegenden Arbeit einfacher die *Directrixlinie*, oder auch die *Directrix* nennen.

Wendet man das hier erlangte Ergebniss auf den Fall an, wo die gegebene Linie A ein *Kegelschnitt* ist, dessen Gleichung folgendermassen gestellt werden kann:

$$\xi^2+\upsilon^2-(p+e\,\xi)^2=0\,,$$

wo also die Abscissen-Axe mit der grösscrn Haupt-Axe des Kegelschnitts zusammenfällt und der Anfangspunct der Coordinaten in einem der *Brennpuncte* liegt, wo ferner p der sogenannte *Parameter* des Kegelschnitts ist und e das *Excentricitätsverhältniss* bedeutet: so gelangt man, falls der Pol mit dem Anfangspuncte der Coordinaten zusammenfällt, zu folgender Gleichung der betreffenden *Directrix:*

$$\left(x-\frac{2pe}{1-e^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{2p}{1-e^2}\right)^2,$$

die einen *Kreis* ausdrückt, dessen Mittelpunct im zweiten Brennpuncte liegt und dessen Radius der ganzen grossen Axe des Kegelschnitts gleich ist.

5.

Wir unterbrechen die eigentliche Untersuchung, und werden in diesem Paragraph nachweisen, dass die Ausgangs vorigen Paragraphs bezeichnete Eigenschaft der Kegelschnitte als eine sie sämmtlich umfassende Begriffsbestimmung

(wie es bis jetzt für die *Parabel* gewöhnlich ist) beim elementaren Unterricht benutzt werden kann.

„Eine Linie, deren sämmtliche Puncte eben so weit von einem festen Kreise „wie von einem festen Puncte abstehen, ist ein *Kegelschnitt*, oder durch „eine allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen den orthogonalen „Coordinaten x und y irgend eines ihrer Puncte darstellbar."

Wenn α und β die Coordinaten des festen Puncts, a und b die Coordinaten des Mittelpuncts des festen Kreises vom Radius r, und x und y die Coordinaten irgend eines Peripheriepuncts der verlangten Linie sind, so ist, erstens, das Quadrat des Abstandes des festen Puncts von einem der gedachten Peripheriepuncte durch den Ausdruck

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$$

gegeben. Ferner ist der andere im Begriffe enthaltene Abstand dem Radius des festen Kreises gleich, vermindert oder vermehrt um den Theil desselben Radius, der zwischen dem Mittelpunct dieses Kreises und dem vorhin erwähnten Peripheriepuncte der gesuchten Linie enthalten ist, so dass das Quadrat dieses Abstandes durch

$$(r\mp\sqrt{[(x-a)^2+(y-b)^2]})^2$$

ausgedrückt wird. Diesemnach ist die gesuchte Linie durch folgende Gleichung gegeben:

$$(r=\sqrt{[(x-a)^2+(y-b)^2]})^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2,$$

welche mit der Gleichung

$$\sqrt{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]}\pm\sqrt{[(x-a)^2+(y-b)^2]}=r$$

einerlei ist. Schafft man durch successive Quadrirungen die zweiten Wurzeln weg, so erhält man zuletzt:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0\,,$$

wo

$$A=(a-\alpha)^2-r^2\quad,\quad B=2(a-\alpha)(b-\beta)\quad,\quad C=(b-\beta)^2-r\,,$$

$$D=-(a-\alpha)(a^2-\alpha^2+b^2-\beta^2)+(a+\alpha)r^2\,,$$

$$E=-(b-\beta)(a^2-\alpha^2+b^2-\beta^2)+(b+\beta)r^2\,,$$

$$4F=(a^2-\alpha^2+b^2-\beta^2)^2-2(a^2+\alpha^2+b^2+\beta^2)r^2+r^4\,,$$

ist.

Diese so eben gefundene Gleichung zweiten Grades zwischen den Coordinaten x und y ist wegen der fünf willkührlichen Grössen a, b, α, β und r von der allgemeinsten Form; daher aus derselben auf die bekannte Weise sämmtliche Kegelschnitte gefolgert werden können; was dann unsere Behauptung rechtfertigt.

6.

Die Auflösung des *umgekehrten* Problems der *Directrix* hat keine Schwierigkeit. Denn, gesetzt, die *Directrixlinie* sei durch die Gleichung

$$\varphi(x,y) = 0$$

gegeben, wo x und y die Coordinaten irgend eines ihrer Puncte sind; so suche man durch Differentiation dieser Gleichung den Differentialquotienten y, und führe ihn in die Gleichung (2, §. 2) ein. Dies giebt:

$$(v-y)\frac{d\varphi(x,y)}{dx} - (\xi - x)\frac{d\varphi(x,y)}{dy} = 0\,,$$

und wenn aus diesen zwei Gleichungen, wie aus (3), nämlich aus

$$2(x-\alpha)\xi + 2(y-\beta)v = x^2 + y^2 - \alpha^2 - \beta^2\,,$$

die beiden Coordinaten x und y eliminirt werden, so ist das Ergebniss die Gleichung der unterlegten Curve A, mit den Coordinaten ξ und v.

Erwägt man, dass die im Eingange unterlegte Gleichung $\varphi(x,y) = 0$ immer als das Eliminations-Ergebniss von ξ und v aus den Gleichungen (9, §. 4) anzusehen ist, so halten wir es, auch abgesehen von der sich ergebenden interessanten Folgerung, schon an und für sich von Interesse, zu zeigen, wie mittels dieser Gleichungen (9) (wobei jedoch von der Kenntniss der erstern abzusehen ist), also mit Unterlegung der Directrixgleichung $\varphi(x,y) = 0$, zur Kenntniss der unterlegten Curve A zu gelangen sei; welches sich dann im folgenden Paragraph wieder mit Hülfe singulärer Integral-Auflösungen zeigen wird.

7.

Es sei, wie im vorigen Paragraph, die *Directrix* durch die Gleichung:

(10.) $$\varphi(x,y) = 0$$

gegeben. Dann ist diese Gleichung mit der zweiten und dritten der Gleichungen (9) zu combiniren und aus denselben die Natur der unterlegten Curve A, d. h. ihre endliche Gleichung zu suchen.

Auch ohne die Kenntniss dieser endlichen Gleichung, d. h. auch ohne Kenntniss der Function f ihrer Gleichung $f(\xi, \upsilon) = 0$, kann man sich aber dieselbe gleichwohl nach ξ und υ differentiirt vorstellen, was

$$\frac{df(\xi,v)}{d\xi} + \frac{df(\xi,v)}{dv}\upsilon_1 = 0\,,$$

giebt; wo $\upsilon_1 = \frac{dv}{d\xi}$ ist. Vermöge dessen nimmt die zweite der Gleichungen (9) folgende Form an:

$$(11.) \qquad (y-\beta)\upsilon_1 + x - \alpha = 0\,.$$

Neben dieser Gleichung, (deren geometrische Bedeutung erst in folgendem Paragraph besprochen werden soll), haben wir noch die dritte Gleichung (9), nämlich:

$$(12.) \quad 2(x-\alpha)\xi + 2(y-\beta)\upsilon = x^2 + y^2 - \alpha^2 - \beta^2$$

zur Erlangung unseres Zieles zu berücksichtigen.

Zieht man aus diesen Gleichungen (11 und 12) x und y als Functionen von ξ, υ und υ_1, und führt die Ergebnisse in (10) ein, so erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung, durch deren Integration sich erst zu der hier verlangten Linie gelangen lässt. Wegen der unbestimmt gelassenen Function φ ist die Gleichung (10) zuerst einmal zu differentiiren, und dabei x und y, wie auch dx und dy, nach deu Gleichungen (11 und 12) zu ersetzen.

Man differentiire zu diesem Ende zuerst die Gleichungen (11 und 12). Dies giebt, da

$$d\upsilon = \upsilon_1 d\xi \quad , \quad d\upsilon_1 = \upsilon_2 d\xi \quad , \quad \text{wo } \upsilon_2 = \frac{d^2 v}{d\zeta^2}$$

ist, unmittelbar folgende Ausdrücke:

$$\upsilon_1 dy + dx = (\beta - y)\upsilon_2 d\xi\,,$$

$$2(\upsilon - y)dy + 2(\xi - x)dx = -2[x - \alpha + (y-\beta)\upsilon_1]d\xi\,,$$

welche vermöge der Gleichung (11) in folgende übergehen:

$$dx + \upsilon_1 dy = (\beta - y)\upsilon_2 d\xi \quad , \quad (x-\xi)dx + (\upsilon - y)dy = 0\,,$$

und aus welchen weiter folgende sich ergeben:

$$[\upsilon - y - (\xi - x)\upsilon_1]\,dx = (\beta - y)(\upsilon - y)\,d\xi\,,$$

$$[\upsilon - y - (\xi - x)\upsilon_1]\,dy = -(\beta - y)(\xi - x)\,d\xi\,.$$

Differentiirt man nunmehr die Gleichung (10), und ersetzt dx und dy den eben aufgestellten Gleichungen gemäss, so erhält man:

$$\left\{\frac{d\varphi(x,y)}{dx}(\upsilon - y) - \frac{d\varphi(x,y)}{dy}(\xi - x)\right\}\upsilon_2 = 0\,.$$

Den zweiten Factor $\upsilon_2 = 0$ gesetzt, giebt durch Integration $\upsilon_1 = a$; wo a eine allgemeine Constante ist. Verbindet man dieses Ergebniss mit den Gleichungen (10, 11, 12) durch Elimination von x, y und υ_1, so erhält man die vollständige Integralgleichung der gegenwärtig gesuchten Linie, die ohne Mühe als *Gerade* und deren geometrische Bedeutung aus dem Folgenden sehr bald erkannt wird.

Den *ersten* Factor gleich Null gesetzt, nämlich die Gleichung

$$(\upsilon - y)\frac{d\varphi(x,y)}{dx} - (\xi - x)\frac{d\varphi(x,y)}{dy} = 0\,,$$

giebt die *singuläre Integral-Auflösung*, oder führt auf die *Einhüllungscurve* aller den verschiedenen constanten Werthen von a entsprechenden *Graden* der vollständigen Integralgleichung; daher ist diese *Gerade* in allen ihren Lagen, die den eben erwähnten Werthen von a entsprechen, die *Tangente* an die im vorliegenden inversen Probleme gesuchten Curve.

Erwägt man, dass die eben gedachte singuläre Integral-Auflösung durch Verbindung der zuletzt aufgestellten Gleichung mit den drei Gleichungen (10, 11, 12) mittels Elimination von υ_1, x und y gefunden wird, berücksichtiget weiter, dass υ_1 nur in der Gleichung (11) vorkommt, so dass nur noch x und y aus den Gleichungen (10, 12) und der hier unmittelbar vorher aufgestellten Gleichung zu eliminiren ist; vergleicht man endlich diese zuletzt angeführten drei Gleichungen mit denen des vorigen Paragraphs, wo ihre völlige Identität unmittelbar in die Augen fällt: so zeigt sich der Ausgangs (§. 6) ausgesprochene Satz als erwiesen; nämlich, die Lösung des inversen von dem in (§. 2) gestellten Probleme, als Folge der hiebei erhaltenen Ergebnisse erzielbar.

Wird das hier Gefundene zusammengenommen betrachtet, so hat man aus folgenden drei Gleichungen:

$$(13.)\quad \begin{cases} \varphi(x,y)=0 \quad , \quad (\upsilon-y)\frac{d\varphi(x,y)}{dx}-(\xi-x)\frac{d\varphi(x,y)}{dy}=0\,, \\ 2(x-\alpha)\xi+2(y-\beta)\upsilon=x^2+y^2-\alpha^2-\beta^2\,, \end{cases}$$

x und y zu eliminiren. Die erste dieser Gleichungen stellt die Directrix vor, und das Eliminations-Ergebniss von x und y, welches eine Gleichung zwischen ξ und υ sein wird, stellt die Linie vor, zu welcher die Gleichung $\varphi(x,y)=0$ die *Directrix* ist.

8.

Die beiden bis jetzt betrachteten Linien, nemlich die Anfangs unterlegte Curve A und die ihr zugehörige *Directrix*, welche letztere nach der obigen Feststellung auch die Linie D genannt werden kann, stehen zu einander nicht nur in der durch die Angabe des Problems in (§. 2) festgestellten gegenseitigen Beziehung, sondern noch in einer nicht minder interessanten Verbindung, welche sich erst gegenwärtig, nachdem die Gleichung (11) gefunden ist, nachweisen lässt.

Wir haben die Coordinaten irgend eines Puncts der unterlegten Curve A durch ξ und υ, und die Coordinaten eines Puncts der Linie D durch x und y bezeichnet. Demnach werden wir einen Punct der erstern Linie durch ξ,υ und einen Punct der letztern durch x,y ausdrücken. Dergleichen zwei Puncte werden wir *entsprechende* nennen, wenn die grade Linie welche sie verbindet, zur Linie D in der Beziehung einer *Normale* steht, und wenn überdies der gegenseitige Abstand der zwei Puncte dem Abstande des *Pols*, oder des Puncts α,β, vom Puncte ξ,υ der unterlegten Curve *A gleich* ist.

Dieses vorausgesetzt, findet noch folgende, oben angedeutete Beziehung Statt:

Wenn der Pol mit dem Puncte x,y der ***Directrix*** *durch eine Gerade verbunden, und durch den entsprechenden Punct ξ,υ der Curve A an dieselbe eine Tangente gezogen wird: so schneiden sich diese zwei Geraden jedesmal unter einem rechten Winkel.*

Um Dies zu zeigen, lege man durch den Punct ξ,υ an die Curve A eine Tangente. Dann ist

$$v'-v=(\xi'-\xi)v_1$$

die Gleichung derselben. v_1 ist $= \frac{dv}{d\xi}$ und ξ', v' sind die Coordinaten eines beliebigen Puncts der tangirenden Geraden. Zieht man ferner durch den entsprechenden Punct x, y der Linie D einen Perpendikel auf die eben gedachte Tangente, so ist deren Gleichung:

$$y' - y = -(x' - x)\frac{1}{v_1},$$

oder auch

$$(y' - y)v_1 + x' - x = 0;$$

wo v_1 die obige Bedeutung hat, und x', y' die Coordinaten jedes Puncts dieses Perpendikels auf die vorige Tangente sind.

Da nun einer der Puncte dieses Perpendikels der *Pol* ist, von welchem in der ganzen gegenwärtigen Untersuchung stets die Rede war, indem die Gleichung des Perpendikels bei der Annahme $x' = \alpha$ und $y' = \beta$, welche die Coordinaten des Pols sind, vermöge der Gleichung (11) identisch erfüllt wird; und da durch zwei Puncte nur eine Gerade gelegt werden kann: so steht die Gerade, welche den *Pol* mit einem Puncte x, y der *Directrix* verbindet, auf der durch den betreffenden Punct ξ, v an die Curve A gelegten Tangente senkrecht, W. Z. Z. W.

9.

Ehe wir zur ferneren Untersuchung übergehen, wollen wir das für eine unterlegte Curve A und die ihr zugehörige Directrix bis jetzt Gefundene zusammenstellen und auch noch die hiebei sich ergebenden Nebenfolgerungen anzeigen.

Wenn die unterlegte Curve A durch die Gleichung:

$$\text{(A.)} \qquad f(\xi, v) = 0,$$

und die ihr zugehörige *Directrixlinie* durch die Gleichung

$$\text{(D.)} \qquad \varphi(x, y) = 0$$

gegeben ist, und wenn α, β die Coordinaten des *Pols* siud, wo sämmtliche Coordinaten auf ein gemeinsames rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen werden: so entsprechen die Gleichungen dieser Linien folgenden Relationen:

$$\text{(B.)}\quad \begin{cases} (y-\beta)v_1 + x - \alpha = 0\,, \\ (v-y)y_1 + \xi - x = 0\,, \\ (x-\alpha)\xi + (y-\beta)v = \frac{1}{2}(x^2+y^2-\alpha^2-\beta^2)\,; \end{cases}$$

wo $v_1 = \frac{dv}{d\xi}$ aus der Gleichung (A), und $y_1 = \frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung (D) zu nehmen sind.

Diese Relationen, welche die Linie A als Folge der Linie D, und umgekehrt, herausstellen, drücken geometrisch folgende Eigenthümlichkeiten und gegenseitige Beziehungen dieser Linien aus.

1) Zieht man vom *Pole*, oder vom Puncte α,β, nach irgend einem Puncte ξ,v der Linie A eine Gerade, und dann von diesem Puncte eine *Normale* nach der Linie D, die von derselben im Puncte x,y getroffen wird, so sind die zwei Verbindungslinien jedesmal einander *gleich*.
2) Die gerade Linie, welche die Puncte α,β und x,y verbindet, steht auf der durch den entsprechenden Punct ξ,v der Curve A an diese gelegten Tangente jedesmal *senkrecht*.

Hieraus folgt:

a) Die in (2) gedachte Verbindungslinie wird von der daselbst erwähnten Tangente *halbirt*.
b) Dieselbe Tangente schliesst mit den beiden in (1) erwähnten gleich grossen Geraden gleich grosse Winkel ein.

Wendet man den letztern Satz auf den Fall an, in welchem die Curve A ein *Kegelschnitt* ist, in dessen einem Brennpuncte der Pol sich befindet; so gelangt man, indem man die für diesen Fall in (§. 4) gefundene *Directrix* beachtet, welche eine *Kreislinie* ist, deren Centrum im zweiten Brennpuncte liegt und deren Radius der ganzen grossen Axe des Kegelschnitts gleich ist, zu derjenigen bekannten Eigenschaft der Kegelschnitte, durch welche die *Brennpuncte* von den Physikern ihre *Benennung* erhalten haben.

10.

Die im vorigen Paragraph in (2) ausgedrückte Beziehung zwischen irgend einer unterlegten Curve A, ihrer *Directrix* D und dem betreffenden *Pole* P, giebt ein einfaches Verfahren an die Hand, um die betreffende *Fusspunctenlinie* zur Curve A mit Hülfe ihrer *Directrix* zu *construiren*; desgleichen um ihre

Gleichung aus der der *Directrix* zu finden. Wenn man nämlich an die Curve *A* sämmtliche Tangenten, und dann von einem festen Puncte, ebenfalls *Pol* genannt, Perpendikel auf diese Tangenten zieht: so heisst, wie schon oben festgestellt ist, die Linie in welcher sämmtliche Fusspuncte dieser Perpendikel (die Schnittpuncte je einer Tangente mit dem ihr zugehörigen Perpendikel) zu liegen kommen, die *Fusspunctenlinie* zur Curve *A*. Nach dieser Erklärung kann man, wenn der *Pol* der nemliche wie bei der *Directrix* ist, sofort mit Hülfe der *Directrix* die *Fusspunctenlinie construiren.* Man ziehe nemlich vom Pole aus beliebige Strahlen oder Radien nach der *Directrixlinie*, so bilden die *Halbirungspuncte* dieser Radien die *Fusspunctenlinie* zur Curve *A*.

Bezeichnet man ferner die Coordinaten irgend eines Puncts dieser *Fusspunctenlinie*, die wir auch der Kürze wegen *Linie F* nennen werden, durch x' und y'; so erhält man, wenn der betreffende Punct in der *Directrix* die Coordinaten x und y hat, die Gleichungen

$$(14.) \qquad x' = \tfrac{1}{2}(x+\alpha) \quad , \quad y' = \tfrac{1}{2}(y+\beta) ,$$

woraus auch

$$(15.) \qquad x = 2x' - \alpha \quad , \quad y = 2y' - \beta$$

folgt. Demnach ergiebt sich, wenn, wie im vorigen Paragraph, die Gleichung der Directrix durch $\varphi(x,y) = 0$ dargestellt wird, folgende Gleichung:

$$(16.) \qquad \varphi(2x' - \alpha\,,\, 2y' - \beta) = 0 ,$$

als Repräsentant der *Fusspunctenlinie,* und in welcher das Functionszeichen φ die gleiche Bedeutung wie bei der Directrix hat.

So z. B. wurde Ausgangs (§. 4) für den allgemeinen *Kegelschnitt* mit der Gleichung:

$$\xi^2 + v^2 - (p + e\,\xi)^2 = 0 ,$$

(wo der Anfangspunct der Coordinaten in einem *Brennpuncte* angenommen ist) für die *Directrixlinie* die Gleichung

$$\left(x - \frac{2pe}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2p}{1-e^2}\right)^2$$

gefunden, wenn der *Pol,* in demselben Brennpuncte angenommen, der Anfangspunct der Coordinaten ist, d. h. wenn man $\alpha = \beta = 0$ setzt. Diesemnach geht

die Gleichung **(16)**, oder der Repräsentant der *Fusspunctenlinie* des Kegelschnitts mit demselben *Pole*, in

$$\left(x' - \frac{pe}{1-e^2}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{p}{1-e^2}\right)^2$$

über; welche Gleichung abermals einen *Kreis* ausdrückt, dessen Mittelpunct mit dem des Kegelschnitts zusammenfällt und dessen Radius der halben grossen Axe desselben gleich ist.

Ist der Kegelschnitt eine *Parabel*, so stelle man die letztere Gleichung folgendermassen auf:

$$(1-e^2)(x'^2+y'^2) - 2pex' = p^2 .$$

Da nun bei der Parabel das Excentricitätsverhältniss $e = 1$ ist, so ergiebt sich für die Gleichung der *Fusspunctenlinie*:

$$x' = -\tfrac{1}{2}p ,$$

d. h. die tangirende Gerade am Scheitel der Parabel ist die Fusspunctenlinie, wenn der Pol im *Brennpuncte* der Parabel liegt.

11.

Nach dem vorigen Paragraph lässt sich, wenn zu einer gegebenen Curve A die Gleichung der *Directrix* gegeben ist, aus dieser sofort die Gleichung der betreffenden *Fusspunctenlinie* finden, insofern der *Pol* unverändert bleibt. Erwägt man nun die Art wie der Uebergang bewirkt wird, namentlich die Gleichungen **(15)**, so lässt sich aus den in (§. 9) aufgestellten Gleichungen ein System neuer Gleichungen ableiten, die aus der vorgelegten Curve A direct zur Fusspunctenlinie und umgekehrt führen.

Die unterlegte Curve A habe, wie überall angenommen ward, die Gleichung

$$\text{(A.)} \qquad f(\xi, v) = 0 .$$

Setzt man die Gleichung der *Fusspunctenlinie* dieser Curve von folgender Form:

$$\text{(F.)} \qquad \varphi'(x', y') = 0 ,$$

wo x' und y' die Coordinaten irgend eines Puncts der Fusspunctenlinie sind

und φ' ein der Natur der Linie entsprechendes Functionszeichen ist: so genügen diese zwei Gleichungen, beachtend die Gleichungen (B) und die Gleichungen in (15), folgenden Relationen:

$$(C.)\quad \begin{cases} (y'-\beta)v_1 + x' - \alpha = 0\,, \\ (2y'-v-\beta)y'_1 + 2x' - \xi - \alpha = 0\,, \\ (x'-\xi)(x'-\alpha) + (y'-v)(y'-\beta) = 0\,; \end{cases}$$

wo $v_1 = \frac{dv}{d\xi}$ aus der Gleichung (A), und $y'_1 = \frac{dy'}{dx'}$ aus der Gleichung (F) zu nehmen ist. Die Grössen α und β sind, eben wie in den Gleichungen (B), die Coordinaten des *Pols*.

Ueber die geometrische Bedeutung dieser Relationen (C) bemerken wir, dass die erste und dritte nur die Natur des Verhaltens der Fusspunctenlinie zur unterlegten Curve A aussagen. In der That drückt die Relation

$$y' - v = (x' - \xi)v_1$$

aus, dass eine nach der unterlegten Curve A im Puncte ξ, v gezogene Tangente auch die Fusspunctenlinie im Puncte x', y' trifft. Ferner zeigt die Relation

$$(y'-\beta)v + x' - \alpha = 0\,,$$

dass die Gerade, welche den *Pol* mit dem vorhin erwähnten Puncte x', y' verbindet, auf der eben daselbst erwähnten Tangente *senkrecht* steht. Da nun diese letztere Relation mit der erstern in (C) einerlei ist, und das Eliminations-Ergebniss von v_1 aus den beiden eben aufgestellten Relationen genau die dritte der Gleichungen in (C) giebt, so ist die Behauptung, betreffend die geometrische Bedeutung der ersten und dritten der Gleichungen in (C), gerechtfertiget, und es kommt nur noch auf die geometrische Erklärung der zweiten Gleichung (C) an. Sie ergiebt sich wie folgt.

Stellt man die besagte dritte Gleichung folgendermaassen auf:

$$(y' - \tfrac{1}{2}(v+\beta))y'_1 + x'_2(\xi+\alpha) = 0\,,$$

und setzt die Gleichungen

$$(17.)\qquad \xi' = \tfrac{1}{2}(\xi+\alpha)\quad,\quad v' = \tfrac{1}{2}(v+\beta)\,,$$

so nimmt die zweite Gleichung in (C) folgende Form an:

$$(y'-v')y'_1+x'-\xi'=0\,;$$

aus welcher unmittelbar folgt, dass die nach der Fusspunctenlinie im Puncte x,y gezogene Normale auch noch durch einen Punct geht, dessen Abscisse gleich ξ' und dessen Ordinate gleich v' ist. Nach den Bestimmungsgleichuugen (17) dieser Coordinaten stellt ξ', v' den Mittelpunct der vom Pole nach dem Puncte ξ, v der Curve A gezogenen Geraden vor. Daher ergiebt sich folgende beachtenswerthe Beziehung zwischen der unterlegten Curve A und den ihr zugehörigen *Fusspunctenlinien.*

Wenn von dem Pole nach dem Puncte ξ, v der Curve A eine gerade Linie, und durch den entsprechenden Punct x', y' der Fusspunctenlinie eine Normale auf dieselbe gezogen wird, so halbirt dieselbe jene verbindende Gerade. Und umgekehrt: der Halbirungspunct besagter verbindenden Geraden, mit dem entsprechenden Puncte x', y' vereinigt, bildet eine Gerade, die für den gleichen Punct eine Normale auf die Fusspunctenlinie ist.

Die beiden Puncte ξ, v und x', y' werden entsprechend genannt, wenn durch erstern die Tangente an die Curve A gelegt ist, welche die von dem auf dieselbe vom Pole aus gezogenen Perpendikel in letzterem Puncte, d. h. in x', y' getroffen wird.

12.

Fasset man nach dem Vorausgeschickten die einer unterlegten Curve A, und die einem *Pole* entsprechende *Directrix*, so wie die *Fusspunctenlinien*, zusammen ins Auge, so ergiebt sich, dass diese Linien, ausser den Eigenthümlichkeiten, welche schon durch die Eingangs dieser Abhandlung festgestellten Erklärungen ausgedrückt worden, noch folgende andere, durch die vorigen Untersuchungen gefundene gegenseitige Beziehungen haben. Nemlich

a) Zieht man von dem Pole α, β nach einem Peripheriepuncte x', y' der Fusspunctenlinie eine Gerade; so erhält man, wenn man dieselbe in gleicher Richtung und Grösse verlängert, einen Peripheriepunct x, y der *Directrixlinie.* Und umgekehrt: verbindet man den *Pol* α, β mit dem Puncte x, y der *Directrixlinie*; so erhält man, wenn man die verbindende Gerade halbirt, den entsprechenden Punct x', y' der *Fusspunctenlinie.*

b) Zieht man durch den Halbirungspunct x', y' der die Puncte α, β und x, y verbindenden Geraden auf diese Gerade einen Perpendikel, so trifft der-

selbe, verlängert, die unterlegte Curve A im Puncte ξ, υ; und zwar in der Stellung einer *Tangente.*

c) Wird der Berührungspunct ξ, υ mit dem in (a) gedachten Puncte x, y der *Directrix*, durch eine Gerade verbunden, so hat diese Gerade die Stellung einer Normale zur Directrix an dem gleichen Puncte x, y.

d) Verbindet man den *Pol* α, β mit dem in (b) erwähnten Berührungspunct ξ, υ der unterlegten Curve A durch eine Gerade, halbirt dieselbe und bezeichnet den Halbirungspunct durch ξ', υ, wo ξ' und υ' durch die Gleichungen (17) gegeben sind, so steht die den Punct ξ', υ' mit dem Puncte x', y' der Fusspunctenlinie verbindende Gerade in der Beziehung einer *Normale* zu eben dieser *Fusspunctenlinie.*

Stellt man sich nun den *Pol*, oder den Punct α, β, als einen der so eben gedachten übrigen vier Puncte ξ, υ , x, y , x', y' , ξ', υ' verzeichnet vor, so sind die drei übrigen, den obigen Beziehungen zufolge, von selbst gegeben. Daher können die vier Puncte als *zusammengehörige* oder einander *entsprechende* angesehen und auch so benannt werden.

Diese so verzeichneten *fünf Puncte* (von welchen die drei $\alpha, \beta, x', y', x, y$ in einer Geraden liegen, eben wie die drei α, β , ξ', v' , ξ, v) bilden, wenn man noch die Puncte x', y' und ξ', v' durch eine Gerade (die Normale auf die *Fusspunctenlinie*), und die Puncte x, y und ξ, v ebenfalls durch eine Gerade (die Normale auf die *Directrix*) verbindet, zwei *ähnliche Dreiecke*; woraus nun weiter Nachstehendes folgt:

e) Die Normalen auf die *Fusspunctenlinie* und auf die *Directrix*, welche durch die einander entsprechenden Puncte x', y' und x, y dieser Curven gehen, sind mit einander *parallel.* Mithin sind auch die betreffenden Tangenten, die durch die gleichen Puncte an die respectiven Linien gezogen werden, mit einander *parallel.*

f) Da der Punct ξ, v zum *Pole* α, β und zu dem Puncte x', y' der *Fusspunctnnlinie* F dieselbe Stellung einnimmt, wie der Punct ξ, v zu demselben *Pole* und dem Puncte x, y der *Directrixlinie* D: so gehört der zuerst genannte Punct ξ', v' einer Curve A' an, welche der unterlegten Curve A *analog* ist und zu welcher die bisher besprochene Fusspunctenlinie F in der Beziehung einer *Directrixlinie* steht.

Die Gleichung dieser neu eingeführten Curve A', findet sich aus der Gleichung der Curve A, wenn man in der letzten ξ' und v' statt ξ und v, den Gleichungen (17) gemäss, nemlich:

(18.) $$\xi = 2\xi' - \alpha \quad , \quad v = 2v' - \beta$$

setzt. Die Gleichung dieser Curve A' ist also

(19.) $$f(2\xi' - \alpha\,,\, 2v' - \beta) = 0\,;$$

wo nun die *Directrix* dieser Curve (für denselben Pol α, β) die *Fusspunctenlinie* der Curve A ist und zufolge **(16)** folgende Gleichung hat:

(20.) $$\varphi(2x' - \alpha\,,\, 2y' - \beta) = 0\,.$$

13.

Diese Untersuchungen führen uns für einen festgestellten Pol und eine unterlegte Curve A auf *zwei Systeme* von Curven, deren jedes ein eigenes Bildungsgesetz hat, und bei welchem die Curven des einen Systems zu denen des andern in den abwechselnden Beziehungen von *Directrix*- und *Fusspunctenlinien* stehen; wie solches hier übersichtlich noch einmal zusammengefasst werden soll.

I. Für ein beliebig angenommenes orthogonales Coordinatensystem werde ein Punct *Pol* genannt, der durch die Coordinaten α und β, beziehungsweise Abscisse und Ordinate, bestimmt ist. Eben so sei in diesem Coordinatensystem eine Curve A durch die Gleichung:

(A.) $$f(\xi, v) = 0$$

gegeben, wo ξ und v beziehungsweise Abscisse und Ordinate irgend eines Puncts derselben sind, und f ein gegebenes, die Natur der Curve ausdrückendes Functionszeichen ist.

Diese Curve bilde nun das Anfangsglied eines der oben gedachten *zwei Systeme,* und die Curve der übrigen Glieder dieses Systems werde beziehlich durch die Gleichungen

$$f'(\xi, v) = 0 \quad , \quad f''(\xi, v) = 0 \quad , \quad f'''(\xi, v) = 0 \quad , \quad f^{(n)}(\xi, v) = 0$$

vorgestellt. Dann haben die Functionen, welche die Beschaffenheit dieser Linien andeuten, zufolge der Gleichung **(19)**, folgendes gegenseitiges Bildungsgesetz:

$$f^{(k)}(\xi, v) = f^{(k-1)}(2\xi - \alpha\,,\, 2v - \beta)\,.$$

Wird hier für k ein Strich gesetzt, so giebt diese allgemeine Gleichung:

$$f'(\xi,v) = f(2\xi - \alpha\,,\, 2v - \beta)\,;$$

und wenn für k zwei Striche gesetzt werden:

$$f''(\xi\ v) = f(2\xi - \alpha\,,\, 2v - \beta)\,.$$

Da nun, nach der vorhergehenden Gleichung,

$$f'(2\xi - \alpha\,,\, 2v - \beta) = f(4\xi - 3\alpha\,,\, 4v - 3\beta)$$

ist, so erhält man:

$$f''(\xi,v) = f(4\xi - 3\alpha\,,\, 4v - 3\beta)\,.$$

Allgemein ergiebt sich auf diese Weise:

$$f^{(k)}(\xi,v) = f\{2^k\xi - (2^k-1)\alpha\,,\, 2^k v - (2^k-1)\beta\}\,;$$

wo die Gleichung

$$(\mathrm{A}^{(k)}.)\quad f\{2^k\xi - (2^k-1)\alpha\,,\, 2^k v - (2^k-1)\beta\} = 0$$

das $k$te Glied in dem einen Systeme von Curven ausmacht, dessen Anfangsglied die Curve A ist, welche hier beständig als die unterlegte Curve A auftrat, und deren Gleichung die in (A) ist.

Die Curven welche diese Gleichung, bei den successiven Annahmen $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, ... vorstellt, nennen wir, in derselben Ordnung, A', A'', A''', ... und die Gesammtheit aller dieser Curven das aus der unterlegten Curve A successive gebildete *Curvensystem*.

II. Wenn zur Curve A, nach (Nr. 4, Gl. 9), die betreffende Directrix hergestellt und (wie bis jetzt immer, deren Gleichung auf dasselbe Coordinatensystem bezogen) durch

$$(\mathrm{D}.)\qquad \varphi(x,y) = 0$$

vorgestellt wird, wo x und y die Coordinaten irgend eines Puncts derselben sind, und das Functionszeichen φ die Art der gegenseitigen Verbindung dieser Coordinaten andeutet, so stellt sie das Anfangsglied des *zweiten Systems* von Curven vor.

Bildet man, nach (§. 10, Gl. 16), aus der Gleiehung (D) folgende:

$$\varphi(2x-\alpha\,,\,2y-\beta)=0\,,$$

wo das Functionszeichen φ dasselbe wie unmittelbar vorhin ist, so stellt die dieser Gleichung entsprechende Linie, nach der eben citirten No., die *Fusspunctenlinie* zur unterlegten Curve A in (I) vor. Dann stellt auch dieselbe Gleichung, nach dem Satze (f, §. 12), die *Directrix* zur Curve A' dar, die nach dem Obigen aus der Gleichung ($A^{(k)}$) hervorgeht, wenn $k=1$ gesetzt wird.

Leitet man aus der zuletzt aufgestellten Gleichung eine neue auf gleiche Weise ab, wie sie aus (D) abgeleitet wurde, so erhält man:

$$\varphi(4x-3\alpha\,,\,4y-3\beta)=0\,;$$

und diese Gleichung stellt, *erstens*, die *Fusspunctenlinie* zur Curve A' und, *zweitens*, die *Directrixlinie* zur Curve A'' dar.

Leitet man aus dieser auf dieselbe Weise eine neue Gleichung ab, und fährt so ins Unbestimmte fort, so gelangt man zu einer Gleichung von folgender allgemeinen Form:

$$(D^{(k)}.)\quad \varphi[2^kx-(2^k-1)\alpha\,,\,2^ky-(2^k-1)\beta]=0\,;$$

und diese Gleichung stellt sowohl die *Fusspunctenlinie* zur Curve $A^{(k-1)}$, als die *Directrixlinie* zur Curve $A^{(k)}$ vor.

Setzt man für k nach und nach 1, 2, 3, ... so erhält man das System von Linien, welche nach der Reihe die *Directrixen* zu den Curven A', A'', A'''.... sind, und in gleicher Ordnung auch die *Fusspunctenlinien* zu den Curven A', A'', A'''..... Diese aus ($D^{(k)}$) entspringenden Gleichungen stellen das zweite System von Curven dar, deren Eingangs dieses Paragraphs gedacht wurde, und bei welchen das Anfangsglied die durch die Gleichung (D) vorgestellte Directrix zur Curve A ist.

Zürich, im Februar 1852.

4.

Werthung der Factorielle

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3).....(m-k+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4.....k},$$

beim unendlichen Zunehmen der reellen, ganzen und positiven Zahl k, wenn m irgend eine reelle oder imaginäre Zahl ist.

(Von dem Herrn Dr. *Raabe*, Professor der Math. an der Universität zu Zürich.)

1.

Der einfachste Fall, wenn nemlich die Zahlengrösse m reell und positiv ist, hat gar keine Schwierigkeiten, so lange m noch eine *ganze* Zahl ist. Daher fangen wir mit dem etwas complicirteren Falle an, wenn die *reelle* und *positive* Zahl m *nicht* eine ganze Zahl ist.

Ist n die ganze Zahl, zunächst an m, und kleiner als m, d. h. setzt man $m = n + \alpha$, wo α innerhalb 0 und 1 liegt und reell und positiv ist, so kann die Factorielle $\binom{m}{k}$ auch folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2).....(m-n)}{1\ .\ 2\ .\ 3.....(n-1)} \cdot \frac{(m-n-1)(m-n-2).....(m-k+1)}{n\qquad (n+1).....k},$$

oder, mit Beachtung des Zusammenhanges zwischen m, n und α, auch folgendermaassen:

$$\binom{m}{k} = (-1)^{k-n-1} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).....(\alpha+n).(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha).....(k-n-1-\alpha)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5.....k},$$

oder endlich auch, wenn man

$$\alpha + \beta = 1$$

setzt, wie folgt:

$$\binom{m}{k} = (-1)^{k-n-1} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).....(\alpha+n).\beta(\beta+1)(\beta+2).....(\beta+k-n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5.....k}\ .$$

Einer bekannten Eigenschaft der Function *Gamma* gemäss, ist

(a.) $\Gamma(r+\alpha) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2).....(\alpha+r-1)\Gamma(\alpha)$,

wo r eine ganze, reelle und positive Zahl ist und α irgend eine Zahlengrösse bedeutet. Ferner ist:

(b.) $\Gamma(1) = 1$, und $\Gamma(r+1) = 1.2.3.4.....r$,

wo r die eben erwähnte Bedeutung hat. Dieses vorausgesetzt, hat man auch folgende Bestimmungsgleichung für $\binom{m}{k}$:

$$\binom{m}{k} = (-1)^{k-n-1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta-n-1+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(k+1)},$$

die, wenn man den Zusammenhang zwischen α und β, so wie den zwischen m, n und α beachtet, auch wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\binom{m}{k} = \frac{(-1)^{k-n-1}\Gamma(1+m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(k-m)}{\Gamma(k+1)}.$$

Dieselbe Function *Gamma* giebt ferner für jedes reelle α zwischen 0 und 1 folgende Gleichheit:

(c.) $$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}\ ;$$

daher hat man auch:

(1.) $$\binom{m}{k} = (-1)^{k-n-1}\Gamma(1+m) \cdot \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(k-m)}{\Gamma(k+1)},$$

wo $n+\alpha = m$ gesetzt ist.

Aus diesem Ausdruck (1) lässt sich der Werth von $\binom{m}{k}$ beim unendlichen Zunehmen von k entnehmen, wenn m irgend eine endliche, reelle und positive Zahlengrösse ist. Aus den Schriften von *Laplace*, so wie auch aus einer Abhandlung im 28. Bande dieses Journals, sind folgende Grenzgleichungen (wo das Grenzzeichen Lim. auf das unendliche Zunehmen von k Bezug hat) bekannt:

$$\text{(d.)} \quad \begin{cases} \text{Lim. } \Gamma(k+1) = k^k \sqrt{(2k\pi)} \,.\, e^{-k}, \\ \text{Lim. } \Gamma(k-m) = (k-m-1)^{k-m-1} \sqrt{[2(k-m-1)\pi]} \,.\, e^{-k+m+1}; \end{cases}$$

daher erhält man:

$$\text{Lim.} \frac{\Gamma(k-m)}{\Gamma(k+1)} = e^{m+1} \text{Lim.} \frac{\left(1-\frac{m+1}{k}\right)^k}{k^{m+1}\left(1-\frac{m+1}{k}\right)^{m+\frac{1}{2}}} = \text{Lim.} \frac{1}{k^{m+1}} = 0.$$

Mit Hülfe dieses Ergebnisses folgt aus der obigen Gleichung (1) die Grenzbestimmung

$$\text{(I.)} \qquad \text{Lim.} \binom{m}{k} = 0 \,,$$

die für alle reelle und positive Werthe von m gilt.

2.

Wenn m noch *reell,* aber *negativ* ist, ergiebt sich die Grenzbestimmung der obigen Factorielle wie folgt.

Es ist nemlich:

$$\binom{-m}{k} = \frac{-m(-m-1)(-m-2)(-m-3)\ldots\ldots(-m-k+1)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4\ldots\ldots\ldots\ldots k},$$

oder auch:

$$\binom{-m}{k} = (-1)^k \cdot \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+k-1)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4\ldots\ldots\ldots\ldots k};$$

welches Resultat, mit Beachtung der Hülfssätze (a und b), in folgendes übergeht:

$$\text{(2.)} \qquad \binom{-m}{k} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(m)} \cdot \frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k+1)};$$

wo m jede reelle positive Zahl sein kann, und k eine beliebige ganze und positive Zahl ist.

Lässt man nun k beständig wachsen, so hat man, mit Zuziehung der Hülfsgleichungen (d):

$$\text{Lim.} \binom{-m}{k} = \pm \frac{e^{-(m-1)}}{\Gamma(m)} \left(1+\frac{m-1}{k}\right)^{m-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{m-1}{k}\right)^k \,.\, k^{m-1},$$

oder auch

$$\text{Lim.}\binom{-m}{k} = \pm\frac{1}{\Gamma(m)}\text{Lim.}\,k^{m-1}.$$

Also ergeben sich, je nachdem m grösser, gleich, oder kleiner ist, als die reelle positive Einheit, folgende drei Grenzbestimmungen:

$$\text{(II.)}\qquad \begin{cases} \text{Lim.}\binom{-m}{k} = \pm\infty \quad , \quad (m>1)\,, \\ \text{Lim.}\binom{-m}{k} = \pm 1 \quad , \quad (m=1)\,, \\ \text{Lim.}\binom{-m}{k} = \quad 0 \quad , \quad (m<1)\,. \end{cases}$$

3.

Interessanter ist die Untersuchung der Fälle, wenn m eine *complexe* Zahl von der Form $p+qi$ ist, in welcher i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bedeutet, p und q aber reelle Zahlengrössen sind, d. h. wo

$$\binom{m}{k} = \binom{p+qi}{k} = \frac{(p+qi)(p-1+qi)(p-2+qi)\ldots\ldots(p-k+1+qi)}{1\quad .\quad 2\quad .\quad 3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}$$

ist.

Zunächst ziehen wir den Fall in Betracht, wenn die reelle Zahl p, den Nullwerth mitbegriffen, nur *positive* Werthe hat. Unter dieser Annahme setze man $p = n+\alpha$, wo α jeden positiven reellen Zahlenwerth <1, Null mitbegriffen, und n eine ganze, positive Zahl bedeutet, die auch Null sein kann. Dann hat man:

$$\binom{p+qi}{k} = \frac{(n+\alpha+qi)(n-1+\alpha+qi)\ldots(\alpha+qi)\cdot(\alpha-1+qi)(\alpha-2+qi)\ldots(\alpha+n-k+1+qi)}{1\quad .\quad 2\quad .\quad 3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}\,,$$

oder auch:

$$\binom{p+qi}{k} = \frac{(-1)^{k-n-1}}{\Gamma(k+1)}(\alpha+qi)(\alpha+1+qi)\ldots\ldots(\alpha+n+qi)$$
$$\times(\beta-qi)(\beta+1-qi)\ldots\ldots(\beta+k-n-2-qi)\,,$$

wo, in dem analogen Falle in (§. 1), $\alpha+\beta=1$ gesetzt ist. Nimmt man noch die Hülfsgleichung (a) hinzu, so erhält man auch:

$$\binom{p+qi}{k} = \frac{(-1)^{k-n-1}}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{\Gamma(p+1+\nu i)\,\Gamma(k-p-qi)}{\Gamma(\alpha+qi)\,\Gamma(\beta-qi)} ;$$

wo, wie schon erwähnt,

$$(3.) \qquad n+\alpha = p \quad \text{und} \quad \alpha+\beta = 1$$

gesetzt ist.

Zur weiteren Reduction des letztern Ergebnisses nehme ich noch folgende Gleichung zu Hülfe:

$$(e.) \qquad \frac{\Gamma(a+bi)}{c^{a+bi}} = \int_0^\infty x^{a+1-bi}\, e^{-cx}\, dx ,$$

wo a und b reelle Zahlenwerthe sind, und wo überdies α oder a eine angebbare positive Zahl, c aber irgend eine positive und angebbare reelle Zahl ist.

Diese Gleichung zu Grunde gelegt, erhält man, wenn $c = 1$ gesetzt wird:

$$\binom{p+qi}{k} = \frac{(-1)^{k-n-1}}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{\int_0^\infty x^{p+qi} e^{-x} dx \cdot \int_0^\infty k^{k-p-1-qi} e^{-x} dx}{\int_0^\infty x^{\alpha+1+qi} e^{-x} dx \cdot \int_0^\infty x^{\beta-1-qi} e^{-x} dx} ;$$

wo nothwendig $k > p$ ist.

Um die Producte der hier vorkommenden *bestimmten Integrale* auf ihre einfachsten Formen zu bringen, nehme ich einen im ersten Bande der „Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Zürich" in Nr. 16. daselbst mitgetheilten Satz zu Hülfe, der durch folgende Gleichung ausgedrückt wird:

$$(f.) \quad \int_0^a \varphi(x)\,dx \cdot \int_0^a \varphi'(x)\,dx = \int_0^1 \int_0^a [\varphi(x)\,\varphi'(xy) + \varphi(xy)\,\varphi'(x)]\,x\,dx\,dy ,$$

wo $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ beliebige Functionen von x sind, die innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und a der allerersten Anforderung bestimmter Integrale entsprechen, nämlich, dass z. B. $\varphi(x)\,dx$ für jeden Werth von $x = 0$ bis $x = \alpha$ beständig unendlich klein wird, wenn dx den Uebergang des einen Werths von x zu seinem nächstfolgenden ausdrückt.

Mit Hülfe dieser Gleichung gelangt man, die Gleichung (e), so wie die Annahme $\alpha + \beta = 1$ beachtend, auf folgendes Endresultat:

$$(4.) \qquad \binom{p+qi}{k} = (-1)^{k-n-1} \cdot \frac{\int_0^1 \frac{y^{p+qi} + y^{k-p-1-qi}}{(1+y)^{k+1}} dy}{\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1+qi} + y^{\beta-1-qi}}{1+y} dy} .$$

Diese, schon an sich bemerkenswerthe Gleichung, in welcher n und p, so wie α und β, durch die Gleichungen (3.) zusammenhangen, und wo $k > p$ ist, führt sehr leicht zu der Grenzbestimmung der Factorielle $\binom{p+qi}{k}$, wenn k ohne Ende zunimmt. Während nemlich das im Nenner vorkommende bestimmte Integral nur einen endlichen Werth haben kann, sieht man, dass der Werth des bestimmten Integrals im Zähler, wegen des in demselben vorkommenden Nenners $(1+q)^{k+1}$, beim unendlichen Zunehmen von k, ohne Ende der Null sich nähert; folglich erhält man die Grenzbestimmung

$$\text{(III.)} \qquad \text{Lim.} \binom{p+qi}{k} = 0\,;$$

wo das Grenzzeichen auf das unendliche Zunehmen von k sich bezieht, und wo q eine *beliebige* reelle Zahl, p aber nur eine reelle *positive* Zahl ist, Null mitbegriffen.

4.

Wir gehen endlich zur letzten, noch möglichen Annahme über, nemlich, dass in dem vorigen Paragraph die Zahlengrösse p *reell* und *negativ* ist. Für diese Annahme ergiebt sich unmittelbar:

$$\binom{m}{k} = \binom{-p+qi}{k} = (-1)^k \frac{(p-qi)(p+1-qi)(p+2-qi)\ldots\ldots(p+k-1-qi)}{1 \quad . \quad 2 \quad . \quad 3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}\,;$$

was, mit Zuziehung der Function Gamma, wie leicht zu sehen, mit

$$\binom{-p+qi}{k} = (-1)^k \frac{\Gamma(k+p-qi)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(p-qi)}$$

identisch ist.

Ist nun α irgend eine angebbare positive und reelle Zahl, und multiplicirt man Zähler und Nenner des letzten Bruches mit $\Gamma(\alpha+qi)$, ersetzt dann diesen Ausdruck sowohl, wie die Functionen $\Gamma(k+p-qi)$, $\Gamma(p-qi)$, mittels der Hülfsgleichung (e), in derselben $c=1$ angenommen, so erhält man:

$$\binom{-p+qi}{k} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{\int_0^\infty x^{k+p-1-qi} e^{-x} dx \cdot \int_0^\infty x^{\alpha-1+qi} e^{-x} dx}{\int_0^1 x^{p-1-qi} e^{-x} dx \cdot \int_0^\infty x^{\alpha-1+qi} e^{-x} dx}\,.$$

Hieraus ergiebt sich, mit Zuziehung des Hülfssatzes in (f.), der Ausdruck

$$\binom{-p+qi}{k} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{\Gamma(k+p+\alpha)}{\Gamma(p+\alpha)} \cdot \frac{\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1+qi}+y^{k+p-1-qi}}{(1+y)^{k+p+\alpha}} dy}{\int_0^1 \frac{y^{\alpha+1+qi}+y^{p-1-qi}}{(1+y)^{p+\alpha}} dy} ,$$

und daraus endlich, mit Zuziehung des Hülfssatzes in (a), die Gleichung

$$(5.) \quad \binom{-p+qi}{k} = \binom{-(p+\alpha)}{k} \cdot \frac{\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1+qi}+y^{k+p-1-qi}}{(1+y)^{k+p+\alpha}} dy}{\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1+qi}+y^{p-1-qi}}{(1+y)^{p+\alpha}} dy} .$$

Diese Gleichung, welche einen bemerkenswerthen Zusammenhaug zwischen zwei bestimmten Integralen darstellt, bietet auch die Mittel dar, den *Grenzwerth* von $\binom{-p+qi}{k}$ beim unendlichen Zunehmen von k zu beurtheilen, wenn p um eine unendliche Grösse kleiner als die Einheit ist. Bei dieser Beschaffenheit von k nähert sich nämlich das bestimmte Integral im Zähler des Bruchs ohne Ende der Null, während das bestimmte Integral im Nenner desselben Bruchs einen endlichen Werth hat. Ferner hat der Factor $\binom{-(p+\alpha)}{k}$ desselben Bruchs, nach den Zusammenstellungen in (II.), den Werth ± 1, oder 0, je nachdem $p+\alpha = 1$ oder < 1 ist: folglich ist, wie behauptet wurde:

$$(IV.) \qquad \text{Lim.} \binom{-p+qi}{k} = 0 \quad , \quad (p<1) .$$

Ist aber $p = 1$, oder > 1, so ist nach (II.) der Werth der Factorielle $\binom{-(p+\alpha)}{k}$ gleich $\pm\infty$. Es nimmt in Folge Dessen der Werth von $\binom{-p+qi}{k}$ die unbestimmte Form $\infty . 0$ an, welche durch das bis jetzt bekannte Verfahren nicht so leicht zu heben sein dürfte, und worauf ich auch gegenwärtig verzichte.

Zürich, Ende October 1853.

5.

Ueber Producte und Potenzen bestimmter einfacher Integral-Ausdrücke, durch mehrfache dargestellt.

(Von Herrn Dr. *Raabe*, Prof. an der Universität zu Zürich.)

(Aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Zürich.)

1.

Jedes bestimmte einfache Integral $\int_a^b \varphi(x)dx$ kann folgendermaassen ausgedrückt werden:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \omega \sum_{p=0}^{p=n-1} \varphi(a+p\omega)\,,$$

wo ω unendlich klein werdend, $b = a+n\omega$ ist und das Summenzeichen sich nur auf die ganzen und positiven Werthe von p, die Grenzwerthe mit einbegriffen, bezieht. Die Function $\varphi(x)$ muss jedoch von der Art sein, dass irgend ein Glied der angedeuteten Summe eine unendlich kleinwerdende Grösse ist.

Entsprechen nun zwei Functionen von x, wie $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$, der zuletzt gedachten Anforderung, so gelangt man durch Multiplication auf folgende Gleichung:

$$(1.)\quad \int_a^b \varphi x\,dx \cdot \int_a^b \varphi'(x)\,dx = \int_a^b \int_{x_1}^b [x_1, x_2]\,dx_2\,dx_1\,.$$

wo $[x_1, x_2]$ eine durch die Gleichung

$$(1'.)\qquad [x_1, x_2] = \varphi(x_1)\varphi'(x_2) + \varphi(x_2)\varphi'(x_1)$$

dargestellte symmetrische Function der Variabeln x_1 und x_2 ist. Wird ferner das Product

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi'(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi''(x)\,dx$$

durch P_3 vorgestellt, so gelangt man, mit Zuziehung des Ergebnisses in (1), zu

$$(2.) \qquad P_3 = \int_a^b \int_{x_1}^b \int_{x_2}^b [x_1, x_2, x_3]\, dx_3 dx_2 dx_1 ;$$

wo die symmetrische Function $[x_1, x_2, x_3]$ der Variabeln x_1, x_2, x_3 durch die Gleichung

$$(2'.) \quad [x_1, x_2, x_3] = [x_1, x_2]\varphi''(x_3) + [x_1, x_3]\varphi''(x_2) + [x_2, x_3]\varphi''(x_1)$$

gegeben ist.

Stellt man allgemein das Product von n derartigen bestimmten Integralausdrücken durch P_n vor, d. h. setzt man

$$(I.) \quad P_n = \int_a^b \varphi(x)\, dx . \int_a^b \varphi'(x)\, dx \ldots . \int_a^b \varphi^{(n-1)}(x)\, dx ,$$

so findet sich

$$(II.) \quad P_n = \int_a^b \int_{x_1}^b \int_{x_2}^b \ldots\ldots \int_{x_{n-1}}^b [x_1, x_2, x_3, \ldots x_n]\, dx_n \ldots dx_3 dx_2 dx_1 ;$$

wo der Ausdruck $[x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n]$ eine symmetrische Function der Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ ist, die durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} (III.) \; [x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n] &= [x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n-1}]\varphi^{(n-1)}(x_n) \\ &+ [x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n-2}, x_n]\varphi^{(n-1)}(x_{n-1}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ [x_1, x_3, x_4, \ldots\ldots x_n]\varphi^{(n-1)}(x_2) \\ &+ [x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots x_n]\varphi^{(n-1)}(x_3) \end{aligned}$$

gegeben wird, und wobei die Functionen

$$(IV.) \qquad \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x) \ldots\ldots \varphi^{(n-1)}(x)$$

der im Eingange erwähnten Anforderung nachkommen.

2.

Werden die in (IV) zusammengestellten Functionen untereinander gleich, und zwar gleich $\varphi(x)$ gesetzt, so giebt die Gleichung (1′) folgende:

$$[x_1, x_2] = 1.2\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,,$$

die Gleichung (2′) folgende:

$$[x_1, x_2, x_3] = 1.2.3\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,\varphi(x_3)\,,$$

und die allgemeine Gleichung (III) folgende:

$$[x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n] = 1.2.3\ldots\ldots n\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,\varphi(x_3)\ldots\ldots\varphi(x_n)\,.$$

Dies vorausgesetzt, geben die Gleichungen (I) und (II) folgenden Ausdruck:

$$(\text{V.})\left(\int_a^b \varphi(x)\,dx\right)^n = 1.2.3\ldots\ldots n \int_a^b\int_{x_1}^b\int_{x_2}^b \ldots\ldots \int_{x_{n-1}}^b \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\,dx_n\ldots dx_2\,dx_1,$$

von welchem in der folgenden Nummer, für $n = 2$, ein Paar Anwendungen gemacht werden sollen.

3.

Aus dem allgemeinen Ergebnisse in (V) ergiebt sich unmittelbar die Gleichung

$$\left(\int_0^a \varphi(x)\,dx\right)^2 = 2\int_0^a\int_x^a \varphi(x)\,\varphi(y)\,dy\,dx\,.$$

Nun ist:

$$\int_x^a \varphi(y)\,dy = \int_0^a \varphi(y)\,dy - \int_0^x \varphi(y)\,dy,$$

also auch:

$$\left(\int_0^a \varphi(x)\,dx\right)^2 = 2\int_0^a\int_0^x \varphi(x)\,\varphi y\,dy\,dx\,,$$

woraus

$$(\text{A.})\quad \left(\int_0^a \varphi(x)\,dx\right)^2 = 2\int_0^1\int_0^a \varphi(x)\,\varphi(xy)\,x\,dx\,dy\,.$$

folgt.

I. Mittels dieses allgemeinen Ergebnisses gelangt man zu

$$\left(\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}\right)^2 = \int_0^1\int_0^{a^2} \frac{dx\,dy}{(1+x)(1+y^2x)}\,.$$

Vollzieht man rechts die Integration nach x, so erhält man:

$$\left(\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}\right)^2 = -\int_0^1 \log.\left\{1-\frac{a^2}{1+a^2}(1-y^2)\right\}\frac{dy}{1-y^2},$$

woraus sich folgende Ausdrücke ergeben:

$$(3.)\quad (\text{Arc tang. } a)^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2\,.\,4\,.\,6\,.....(2n+2)}{1\,.\,3\,.\,5\,.....(2n+1)}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^{n+1},$$

$$(4.)\quad (\text{Arc sin. } a)^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2\,.\,4\,.\,6\,.....(2n+2)}{1\,.\,3\,.\,5\,.....(2n+1)}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}a^{2n+2};$$

wo die Summenzeichen über die ganzen und positiven Werthe von n, die Grenzwerthe mit einbegriffen, sich erstrecken. Die Reihe (3.)convergirt für alle reellen Werthe von a, die Reihe (4.) aber nur für die Werthe von a, welche die Einheit nicht übertreffen.

II. Dieselbe allgemeine Gleichung (A.) führt zu:

$$\left(\int_0^1 e^{a-x^2}dx\right)^2 = \int_0^1\int_0^1 e^{-a(1+y^2)x}\,dx\,dy;$$

was, wenn rechterhand die Integration nach x ausgeführt wird, Folgendes giebt:

$$(5.)\qquad \left(\int_0^1 e^{-ax^2}dx\right)^2 = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{1-e^{-a(1+y^2)}}{1+y^2}dy;$$

wo a eine beliebige Constante ist. Setzt man einstweilen

$$u = \int_0^1 \frac{1-e^{-a(1+y^2)}}{1+y^2}dy,$$

so erhält man auch:

$$u = e^{-a}\int_0^1 \frac{e^a - e^{-ay^2}}{1+y^2}dy,$$

woraus

$$u = e^{-a}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\int_0^1 \frac{1-(-1)^n y^{2n}}{1+y^2}dy\right)\frac{a^n}{1\,.\,2\,.\,3\,.....n}$$

folgt. Vollzieht man die angedeutete Division hinter dem Integralzeichen und integrirt darauf innerhalb der angezeigten Integrationsgrenzen, so erhält man:

$$u = e^{-a}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+.....\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\frac{a^n}{1\,.\,2\,.\,3\,.....n}.$$

Führt man folgende, durch $f(x)$ darzustellende Function von x ein:

$$(6.)\quad f(x) = x + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\frac{x^2}{1\,.\,2} + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)\frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \cdots\cdots,$$

so liefert das Ergebniss in (5.) folgende Integrale:

$$(7.)\quad \int_0^1 \frac{e^{-ax^2}}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi e^a - f(a),$$

$$(8.)\quad \left(\int_0^1 e^{-ax^2}\,dx\right)^2 = \frac{e^{-a}}{a} f(a),$$

in welchen a eine beliebige Constante ist. Aus dem letztern Ergebniss ergiebt sich auch folgendes allgemeinere:

$$(8'.)\quad \left(\int_0^b e^{-ax^2}\,dx\right)^2 = \frac{e^{-ab^2}}{a} f(ab^2);$$

wo a und b beliebige Constanten sind.

Aus der Gleichung (7.) kann ferner entnommen werden, dass der Grenzwerth von $e^{-x}f(x)$ beim unendlichen Wachsen der reellen Grösse x, gleich $\frac{1}{4}\pi$ ist. Daher folgt aus (8'.), wenn a und b reell sind, und letzteres unendlich grosswerdend angenommen wird, der bekannte Integral-Ausdruck:

$$(9.)\quad \int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}};$$

wo a eine positive, reelle Constante ist.

Beachtet man endlich den Umstand, dass

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

kleiner als 1, und dass die ohne Ende fortlaufende Reihe

$$x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \cdots\cdots$$

für jeden endlichen Werth von x convergent ist, so kann das Gleiche um so mehr auch von der Reihe in (6.), die $f(x)$ darstellt, ausgesagt werden.

4.

Nimmt man mit der Gleichung (1.) die Specialisirung und Umstellung der vorigen Nr. vor, so erhält man:

$$\text{(B.)}\quad \int_0^a \varphi(x)\,dx \cdot \int_0^a \varphi'(x)\,dx = \int_0^1 \int_0^a [\varphi(x)\varphi'(xy) + \varphi(xy)\varphi'(x)]\,x\,dx\,dy.$$

Dieses allgemeine Ergebniss giebt folgendes specielle:

$$2\int_0^1 e^{-ax^2}\,dx \cdot \int_0^1 e^{-bx^2}\,dx = \int_0^1 \int_0^1 \{e^{-(a+by^2)x} + e^{-(b+ay^2)x}\}\,dx\,dy\,,$$

und es folgt daraus:

$$\text{(10.)}\quad 2\int_0^1 e^{-ax^2}\,dx \cdot \int_0^1 e^{-bx^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-(a+by^2)}}{a+by^2}\,dy + \int_0^1 \frac{1-e^{+(b+ay^2)}}{b+ay^2}\,dy\,,$$

wo noch a und b beliebige Constanten sein können. Werden a und b positiv und reell gesetzt, so besteht auch folgende Gleichung:

$$2\sqrt{ab}\int_0^1 e^{-ax^2}\,dx \cdot \int_0^1 e^{-bx^2}\,dx = \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \frac{1-e^{-a(1+y^2)}}{1+y^2}\,dy + \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \frac{1-e^{-b(1+y^2)}}{1+y^2}\,dy\,,$$

aus der auch

$$\text{(11.)}\quad 2\int_0^a e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^b e^{-x^2}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi - e^{-a^2}\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{e^{-a^2y^2}}{1+y^2}\,dy - e^{-b^2}\int_0^{\frac{a}{b}} \frac{e^{-b^2y^2}}{1+y^2}\,dy$$

folgt. Wird hier $b = \infty$ gesetzt, so gelangt man, mit Zuziehung der Ergebnisse in voriger Nr., auch zu folgendem Integral-Ausdruck:

$$\text{(7'.)}\quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x^2}\,dx = e^{\frac{1}{2}a}\sqrt{\pi}\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot e^{\frac{1}{2}a} - \sqrt{(f(a))}\right\}\,,$$

welcher als eine Ergänzung zu demjenigen (7) angesehen werden kann, in welchem jedoch a eine reelle positive Constante ist.

Zürich, den 11. October 1847.

6.

Ueber die Darstellung einer Function zweier Variabeln z, z' nach aufsteigenden Potenzen zwei anderer Variabeln y, y', deren gegenseitige Abhängigkeit die Gleichungen

$$z = x + yf(z) \quad , \quad z' = x' + y'f(z')$$

ausdrücken, wo $f(z)$ dieselbe Function von z ist, wie $f(z')$ von z'.

(Von Herrn Dr. *Raabe*, Professor an der Universität zn Zürich.)

(Aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich.)

Zur Auflösung der Mittelpunctsgleichung in der Astronomie bedient sich *Lagrange* einer der in der Ueberschrift angegebenen Gleichungen. Einen ähnlichen Zweck für die *Theorie der Störungen* habe ich bei der Behandlung des hier vorgelegten zusammengesetzteren Problems, wie solches am Schlusse angedeutet und bei einer nächsten Gelegenheit bestimmter gezeigt werden wird.

I.

Sind zwei Gleichungen wie

$$(1.) \qquad z = x + yf(z) \quad , \quad z' = x' + y'f(z') \, ,$$

gegeben, wo f ein bestimmtes Functionszeichen je der Variablen z oder z' ist, und setzt man die Gleichung

$$(2.) \qquad u = \varphi(z \, , \, z') \, ,$$

wo der Ausdruck rechts ebenfalls eine bestimmte Function von z und z' ist, so ist der Zweck des Folgenden: u durch eine Gliederreihe nach aufsteigenden Potenzen von y und y' darzustellen.

Legt man zu diesem Ende die *Maclaurin*sche Reihe für zwei Variabeln zu Grunde, so ist das nächste Problem die Angabe der verschiedenen partiellen Differentialquotienten von u nach y und y', zu dessen Lösung wir nun schreiten.

Zuerst ist:

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} \quad , \quad \frac{du}{dy'} = \frac{du}{dz'}\cdot\frac{dz'}{dy'}.$$

Aus den vorgelegten Gleichungen in (1) folgt:

$$(3.) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1-yf_1(z)} \quad , \quad \frac{dz}{dy} = \frac{f(z)}{1-yf_1(z)}, \\ \frac{dz'}{dx'} = \frac{1}{1-y'f_1(z')} \quad , \quad \frac{dz'}{dy'} = \frac{f(z')}{1-y'f_1(z')}, \end{cases}$$

wo $f_1(z)$ den Differentialquotienten von $f(z)$ nach z und $f_1(z')$ denselben von $f(z')$ nach z' vorstellt, und woraus

$$(4.) \qquad \frac{dz}{dy} = f(z)\frac{dz}{dx} \quad , \quad \frac{dz'}{dy'} = f(z,)\frac{dz'}{dx'}$$

folgt. Also ergiebt sich

$$(5.) \quad \frac{du}{dy} = f(z)\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = f(z)\frac{du}{dx} \quad , \quad \frac{du}{dy'} = f(z')\frac{du}{dz'}\cdot\frac{dz'}{dx'} = f(z')\frac{du}{dx'};$$

was die verlangten *ersten* partiellen Differentialquotienten darstellt.

Zu dem *zweiten* partiellen Differentialquotienten übergehend, ziehen wir aus der ersten der so eben gefundenen Gleichungen (5) folgenden Ausdruck:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = f_1(z)\frac{dz}{dy}\cdot\frac{du}{dx} + f(z)\frac{du^2}{dxdy},$$

der (beachtend (4 und 5)) folgendermassen aufgestellt werden kann:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = f(z)f_1(z)\frac{dz}{dx}\cdot\frac{du}{dx} + f(z)\frac{d\cdot\left[f(z)\frac{du}{dx}\right]}{dx},$$

und da dieser Ausdruck auch mit folgendem gleichbedeutend ist:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = f(z)\frac{du}{dx}\cdot\frac{d\cdot f(z)}{dx} + f(z)\frac{d\cdot\left[f(z)\frac{du}{dx}\right]}{dx},$$

so hat man:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d\cdot\left[f(z)^2\frac{du}{dx}\right]}{dx},$$

und durch ganz ähnliche Betrachtungen auch:

$$\frac{d^2u}{dy'^2} = \frac{d\cdot\left[f(z')^2\frac{du}{dx'}\right]}{dx'}.$$

Ferner folgt aus der ersten Gleichung in (5), wenn man beachtet dass z von y' unabhängig ist:

$$\frac{d^2u}{dy\,dy'} = f(z)\frac{d^2u}{dx\,dy'};$$

was mit Zuziehung der zweiten Gleichung (5) in

$$\frac{d^2u}{dy\,dy'} = f(z)\frac{d\cdot\left[f(z')\frac{du}{dx'}\right]}{dx},$$

oder, weil auch z' von x unabhängig ist, in

$$\frac{d^2u}{dy\,dy'} = f(z)f(z)\,\frac{d^2u}{dx\,dx'}.$$

übergeht. Dieses vorausgeschickt, ergeben sich folgende Bestimmungen für den *zweiten* partiellen Differentialquotienten:

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dy^2} = \dfrac{d\cdot\left[f(z)^2\frac{du}{dx}\right]}{dx}\,, \qquad \dfrac{d^2u}{dy'^2} = \dfrac{d\cdot\left[f(z')^2\frac{du}{dx'}\right]}{dx}, \\ \dfrac{d^2u}{dy\,dy'} = f(z)f(z')\dfrac{d^2u}{dx\,dx'}, \end{cases}$$

wo $$(7.)\quad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\,, \quad \frac{du}{dx'} = \frac{du}{dz'}\cdot\frac{dz'}{dx'}\,, \quad \frac{d^2u}{dx\,dx'} = \frac{d^2u}{dz\,dz'}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz'}{dx'}$$ ist.

Die *dritten* partiellen Differentialquotienten von u nach y und y' nehmen wir aus den Ergebnissen in (6), auf ähnliche Weise, wie diese aus (5) genommen wurden. Man erhält nämlich aus den ersten in (6) folgende:

$$\frac{d^3u}{dy^3} = \frac{d^2\lambda}{dx\,dy}\,, \qquad \text{wo } \lambda = f(z^2)\frac{du}{dx} \text{ gesetzt ist.}$$

Nun ergiebt sich:

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{d\cdot[f(z)^2]}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{du}{dx} + f(z)^2\frac{d\cdot\left[\frac{du}{dy}\right]}{dx},$$

oder auch, wegen (4 und 5):

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{d\cdot[f(z)^2]}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}f(z)\frac{du}{dx} + f(z)^2\frac{d\cdot\left[f(z)\frac{du}{dx}\right]}{dx}$$

$$= \frac{d\cdot[f(z)^2]}{dx}f(z)\frac{du}{dx} + f(z)^2\frac{d\cdot\left[f(z)\frac{du}{dx}\right]}{dx};$$

daher hat man:

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{d\cdot\left[f(z)^3\frac{du}{dx}\right]}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d^3u}{dy^3} = \frac{d^2\cdot\left[f(z)^3\frac{du}{dx}\right]}{dx^2}.$$

Behält ferner λ dieselbe Bedeutung, so ist zunächst:

$$\frac{d^3u}{dy^2dy'} = \frac{d^2\lambda}{dxdy'}.$$

Nun ist aus den schon oben geltend gemachten Gründen:

$$\frac{d\lambda}{dy'} = f(z)^2\frac{d\cdot\left[\frac{du}{dy'}\right]}{dx} = f(z)^2\frac{d\cdot\left[f(z')\frac{du}{dx'}\right]}{dx} = f(z)^2f(z')\frac{d^2u}{dxdx'};$$

also ergiebt sich auch folgende Bestimmungsgleichung:

$$\frac{d^3u}{dy^2dy'} = \frac{d\cdot\left[f(z)^2f(z')\frac{d^2u}{dxdx'}\right]}{dx}.$$

Auf gleiche Weise gelangt man zu ähnlichen Bestimmungen der beiden noch übrigen partiellen Differentialquotienten *dritter* Ordnung, so dass man gegenwärtig folgende Ergebnisse hat:

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^3u}{dy^3} = \dfrac{d^2\cdot\left[f(z)^3\frac{du}{dx}\right]}{dx^2}, & \dfrac{d^3u}{dy'^3} = \dfrac{d^2\cdot\left[f(z')^3\frac{du}{dx'}\right]}{dx'^2}, \\ \dfrac{d^3u}{dy^2dy'} = \dfrac{d\cdot\left[f(z)^2f(z')\frac{d^2u}{dxdx'}\right]}{dx}, & \dfrac{d^3u}{dydy'^2} = \dfrac{d\cdot\left[f(z)f(z')^2\frac{d^2u}{dxdx'}\right]}{dx'}. \end{cases}$$

Wird weiter, zur Aufstellung des *vierten* partiellen Differentialquotienten $\mu = f(z)^3 \frac{du}{dx}$ gesetzt, was

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{d \cdot \left[f(z)^4 \frac{du}{dx} \right]}{dx} \text{ und } \frac{d\mu}{dy'} = f(z)^3 f(z') \frac{d^2u}{dx\,dx'}$$

giebt, so erhält man aus der ersten Gleichung in (8) folgende:

$$\frac{d^4u}{dy^4} = \frac{d^3 \cdot \left[f(z)^4 \frac{du}{dx} \right]}{dx^3}, \quad \frac{d^4u}{dy^3\,dy'} = \frac{d^2 \cdot \left[f(z)^3 f(z) \frac{d^2u}{dx\,dx'} \right]}{dx^2}.$$

Durch Vertauschung von x, y, z in x', y', z' liefern diese noch zwei andere partielle Differentialquotienten *vierter* Ordnung

Wird weiter, zur Aufstellung des *fünften* dieser Differentialquotienten, $\mu' = f(z)^2 f(z) \frac{d^2u}{dx\,dx'}$ gesetzt, was

$$\frac{d\mu'}{dy'} = f(z)^2 \frac{d \cdot \left[f(z')^2 \frac{d^2u}{dx\,dx'} \right]}{dx'} = \frac{d \cdot \left[f(z)^2 f(z')^2 \frac{d^2u}{dx\,dx'} \right]}{dx'}$$

giebt, so erhält man auch:

$$\frac{d^4u}{dy^2\,dy'^2} = \frac{d^2 \left[f(z)^2 f(z')^2 \frac{d^2u}{dx\,dx'} \right]}{dx\,dx'}.$$

Man hat also, durch Zusammenstellung, Folgendes:

$$(9.) \quad \begin{cases} \frac{d^4u}{dy^4} = \frac{d^3 \left[f(z)^4 \frac{du}{dx} \right]}{dx^3}, \quad \frac{d^4u}{dy'^4} = \frac{d^3 \cdot \left[f(z')^4 \frac{du}{dx'} \right]}{dx'^3}, \\ \frac{d^3u}{dy^3\,dy'} = \frac{d^2 \cdot \left[f(z)^3 f(z') \frac{d^2u}{dx\,dx'} \right]}{dx}, \quad \frac{d^4u}{dy^3\,dy'} = \frac{d^3 \cdot \left[f(z) f(z)'^3 \frac{d^2u}{dx\,dx'} \right]}{dx'^2}, \\ \frac{d^4u}{dy^2\,dy'^2} = \frac{d^2 \left[f(z)^2 f(z')^2 \frac{d^2u}{dx\,dx'} \right]}{dx\,dx'}. \end{cases}$$

Fährt man auf diese Weise fort, so ergeben sich allgemein folgende Ausdrücke:

$$(10.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^k u}{dy^k} = \dfrac{d^{k-1}\cdot\left[f(z)^k \dfrac{du}{dx}\right]}{dx^{k-1}} \quad , \quad \dfrac{d^k u}{dy'^k} = \dfrac{d^{k-1}\cdot f(z')^k \dfrac{du}{dx'}\Big]}{dx'^{k-1}} , \\ \dfrac{d^k u}{dy^a dy'^b} = \dfrac{d^{k-1}\cdot\left[f(z)^a f(z)^b \dfrac{d^2 u}{dx\,dx'}\right]}{dx^{a-1} dx'^{b-1}} \end{cases}$$

wo $a+b=k$ ist, und wo $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dx'}$, $\frac{d^2u}{dx\,dx'}$ durch die Gleichungen (7) gegeben sind.

II.

Nachdem man sämmtliche partielle Differentialquotienten von u nach y y' aufgestellt hat, sind dieselben, der *Maclaurin*'schen Reihe gemäss, für die speciellen Fälle $y=y'=0$ zu suchen. Bezeichnet man den Werth irgend einer im Obigen gebrauchten Grösse, für diese speciellen Fälle dadurch, dass man der Grösse rechts oben eine 0 in Parenthesen beifügt, so erhält man aus den Gleichungen (1):

$$z^{(0)} = x \quad , \quad z'^{(0)} = x' ,$$

insofern $f(x)$ und $f(x')$ nicht ohne Ende wachsende Werthe haben. Sind ferner die Werthe von x und x' von der Art, dass auch die Differentialquotienten der letztern Function nicht ohne Ende zunehmen, so geben die Gleichungen (3):

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^{(0)} = 1 \quad , \quad \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^{(0)} = 1 .$$

Berücksichtigt man weiter die Bedeutung von u aus der Gleichung (2), so ist:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^{(0)} = \frac{d\varphi(x,x')}{dx} \quad , \quad \left(\frac{du}{dz'}\right)^{(0)} = \frac{d\varphi(x,x')}{dx'} \quad , \quad \left(\frac{d^2u}{dz\,dz'}\right)^{(0)} = \frac{d^2\varphi(x,x')}{dx\,dx'} ;$$

also erhält man, wegen der vorigen Ergebnisse und der Gleichungen (7):

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^{(0)} = \frac{d\varphi(x,x')}{dx} \quad , \quad \left(\frac{du}{dx'}\right)^{(0)} = \frac{d\varphi(x,x')}{dx'} \quad , \quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dx'}\right)^{(0)} = \frac{d^2\varphi(x,x')}{dx\,dx'} .$$

Dieses Alles vorausgeschickt, gehen die Gleichungen (10) für $y=y'=0$ in folgende über:

$$\left(\frac{d^k u}{dy^k}\right)^{(0)} = \frac{d^{k-1}\cdot\left[f(x)^k \frac{d\varphi(x,x')}{dx}\right]}{dx^{k-1}},$$

$$\left(\frac{d^k u}{dy^a dy'^b}\right)^{(0)} = \frac{d^{k-2}\cdot\left[f(x)^a f(x')^b \frac{^2\varphi(x,x')}{dx\,dx'}\right]}{dx^{a-1}dx'^{b-1}},$$

$$\left(\frac{d^k u}{dy'^k}\right)^{(0)} = \frac{d^{k-1}\cdot\left[f(x')^k \frac{d\varphi(x,x')}{dx'}\right]}{dx'^{k-1}};$$

wo $a+b=k$ ist.

Benutzt man nun die *Maclaurin*'sche Reihe für zwei Variabeln, so geht aus den vorgelegten Gleichungen (1), bei Feststellung der Vereinfachungsgleichungen

$$v = f(x)\frac{d\varphi(x,x')}{dx}\quad,\quad v' = f(x')\frac{d\varphi(x,x')}{dx}\quad,\quad w = f(x)f(x')\frac{d^2\varphi(x,x')}{dx\,dx'},$$

folgende Bestimmungsgleichung für die Function $\varphi(z,z')$ hervor:

(11.) $\varphi(z,z') =$

$$= \varphi(x,x) + vy + v'y'$$

$$+\frac{1}{1.2}\left\{\frac{d\cdot[vf(x)}{dx}\cdot y^2 + 2wyy' + \frac{d\cdot[v'f(x')]}{dx'}y'^2\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{1.2.3}\left\{\frac{d^3\cdot[vf(x)^2]}{dx^3}y^3 + 3\frac{d\cdot[wf(x)]}{dx}y^2y' + 3\frac{d\cdot[wf(x')]}{dx'}yy'^2 + \frac{d^2\cdot[v'f(x')^2]}{dx'^2}y'^3\right\}\right.$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4}\left\{\frac{d^3\cdot[vf(x)^3]}{dx^3}\cdot y^4 + 4\frac{d^2\cdot[wf(x)^2]}{dx^2}y^3y'\right.$$

$$\left.+6\frac{d^2\cdot[wf(x)f(x')]}{dx\,dx'}y^2y'^2 + 4\frac{d^2\cdot[wf(x')^2]}{dx'^2}yy'^3 + \frac{d^3\cdot[v'f(x')^3]}{dx'^3}y'^4\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4.5}\left\{\frac{d^4\cdot[vf(x)^4]}{dx^4}y^5 + 5\frac{d^3\cdot[wf(x)^3]}{dx^3}y^4y'\right.$$

$$+10\frac{d^3\cdot[wf(x)^2f(x')]}{dx^2dx'}y^3y'^2 + 10\frac{d^3\cdot[wf(x)f(x')^2]}{dx\,dx'^2}y^2y'$$

$$\left.+5\frac{d^3\cdot[wf(x')^3]}{dx'^3}yy'^4 + \frac{d^4\cdot[v'f(x')^4]}{dx'^4}y'^5\right\}$$

+ u. s. w.,

deren Fortsetzung nunmehr leicht ist.

Anmerkung. Um die Benutzbarkeit dieses Ergebnisses in der Theorie der Störungen, wie im Eingange erwähnt, wenigstens anzudeuten, ersetzen wir die allgemeinen Gleichungen (1) durch folgende:

$$(1.)\quad u - e\,\mathrm{Sin}.u = n(t+h)\ ,\ u' - e'\,\mathrm{Sin}.u' = n'(t+h')\,,$$

wo u und u' die excentrischen Anomalieen zweier Planeten m und m' zu einer bestimmten Zeit t, welche von einer gewissen Epoche an gezählt wird, darstellen; wo ferner e und e' die Excentricitätsverhältnisse der ungestörten Ellipsenbahnen derselben *zwei* Planeten sind, welche, wie bekannt, nur kleine Bruchzahlen sind; wo endlich n und h zwei constante Elemente der einen, und n' und h' analoge Elemente der andern Ellipsenbahn besagter Planeten sind.

Die elliptischen Coordinaten des Schwerpuncts eines Planeten m sind durch die einfachsten Functionen von $\mathrm{Sin}.u$ und $\mathrm{Cos}.u$ angebbar (Nr. **630.** meiner Integralr.). Stellt man aber die wirklichen Coordinaten desselben Planeten m nach steigenden Potenzen der Massen m' , m'' , m''', ... der übrigen Planeten dar, so sind die verschiedenen Coefficienten dieser Massen Functionen der elliptischen Coordinaten des gestörten m und des jedesmal in Betracht gezogenen störenden Planeten m', oder m'', oder m''' u. s. w. Diese Functionen sind durch einfache, noch zu vollziehende Quadraturen darstellbar, in denen die oben erwähnte Zeit t, welche für alle Planeten eine gemeinschaftliche Epoche hat, die Integrationsvariable ist; d. h., wenn x, y, z die elliptischen Coordinaten von m und x', y', z' die analogen Coordinaten von m' sind, so sind Quadraturen von der Form

$$\int_0^1 F(x\,,y\,,z\,,x'\,,y'\,,z')\,\mathrm{d}\,\mathrm{t}$$

zu vollziehen. Die erstern dieser Coordinaten sind aber, wie schon gesagt, durch die excentrische Anomalie u, und die letzteren auf ähnliche Weise durch u' darstellbar; wodurch Quadraturen von folgender Form:

$$\int_1^1 \varphi(u\,,u')\,dt$$

zur Vollziehung kommen. Demnach besteht die Aufgabe darin: die Function $\varphi(u\,,u')$ mit Hülfe der simultanen Gleichungen (I.) zunächst durch t auszudrükken; was durch das oben gefundene allgemeine Ergebniss in (**11.**) *immer* geschehen kann.

Zürich, am **20.** Decbr. **1847.**

7.

Ueber die singulären Integral-Auflösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Variabeln.

(Von dem Herrn Dr. *Raabe*, Professor an der Universität zu Zürich.)

(Aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Zürich.)

Im 31ten Heft des Journals de l'École polytechnique macht Herr *Catalan* eine Bemerkung über die Ermittelung *singulärer* Integral-Auflösungen, die der Gegenstand der gegenwärtigen Mittheilung sein soll.

1.

Wenn eine endliche Gleichung zwischen zwei Variabeln x, y und einer allgemeinen Constante a, von der Form

$$F(x\,,\,y\,,\,a) = 0\,, \tag{1.}$$

gegeben ist, wo F ein beliebiges Functionszeichen ist: wenn ferner die dieser entsprechende Differentialgleichung erster Ordnung, die nicht mehr a enthält, durch

$$F'(x\,,\,y\,,\,y_1) = 0 \tag{2.}$$

vorgestellt wird, wo F' ein neues Functionszeichen und $y_1 = \frac{dy}{dx}$ ist: so sind nicht nur alle, durch specielle und constante Verfügungen über a aus (1) hervorgehende Gleichungen Integral-Auflösungen (particuläre) dieser Differentialgleichung in (2), sondern sämmtliche Eliminations-Ergebnisse von a, welche Verbindungen von (1) mit der Gleichung

$$\frac{dF(x\,,\,y\,,\,a)}{da} = 0\,, \tag{3.}$$

so wie auch mit der Gleichung

$$(4.) \qquad \frac{dF(x\,,\,y\,,\,a)}{dy} = \frac{1}{0}$$

herbeiführen, liefern ebenfalls Integral-Auflösungen. Diese werden nach *Lagrange singuläre* Integral-Auflösungen genannt, falls sie nicht auch durch bestimmte Verfügungen über a aus (1) zu entnehmen sind.

Auf dieses Ergebniss gelangen die meisten Schriftsteller, die sich mit diesem Gegenstande seit *Lagrange* beschäftigten, und welches auch ich im dritten Bande meiner Differential- und Integralrechnung (No. 595) mitgetheilt habe.

2.

Der Zweck der im Eingange gedachten Bemerkung des Herrn *Catalan* ist nun, zu zeigen, dass es sein richtiges Bewenden mit dem Eliminations-Ergebnisse von a aus den Gleichungen (1 und 3), nicht aber im Allgemeinen mit demjenigen haben könne, welches aus den Gleichungen (1 und 4), gleichfalls durch Elimination von a, entnommen wird. Zu diesem Ende wird ein besonderer Fall durch die Gleichung

$$x + a - \sqrt{[3\,a(2\,y - a)]} = 0$$

aufgestellt, aus welcher folgender, zu (4) analoge Ausdruck:

$$\frac{-3\,a}{\sqrt{[3a(2y-a)]}} = \frac{1}{0}$$

gezogen wird; welche Gleichung $a = 2y$ giebt. Setzt man diesen Werth von a in die vorgelegte Gleichung, wodurch das Ergebniss der Elimination von a folgendermassen sich darstellt:

$$x + 2y = 0\,,$$

so thut diese Gleichung der betreffenden Differentialgleichung erster Ordnung

$$3\,x\,y_1^2 - 6\,y\,y_1 + x + 2y = 0$$

weder als *singuläre*, noch als *particuläre* Integral-Auflösung ein Genüge, und ist dem in Rede stehenden Falle ganz fremd.

3.

So richtig die vorausgeschickte Bemerkung *Catalan's* über das Eliminations-Ergebniss von a aus den Gleichungen (1 und 4) ist, so erschöpft sie doch

den hier in Rede stehenden Gegenstand nicht ganz, indem auch ein Eliminations-Ergebniss von a aus den Gleichungen (1 und 3) bisweilen Relationen unter den Variabeln geben kann, die ebenfalls weder von *singulärer* noch von *particulärer* Beschaffenheit, und folglich dem fraglichen Falle gleichfalls ganz fremd sind.

Man sieht nämlich leicht, dass folgende Gleichung:

$$a(x-y)+\sqrt{(1-y^2)}-\sqrt{(1-x^2)}=0$$

in der Beziehung einer vollständigen Integralgleichung zu der Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}=0$$

steht. Stellt man nun die der erstern entsprechende, analoge zu (3) her, so findet sich:

$$x-y=0\,;$$

welche Relation zwischen den Variabeln x und y der vorhergehenden Differentialgleichung nicht genügt, und folglich derselben ebenfalls fremd ist.

4.

Die Unzuverlässigkeit der in No. 1 gegebenen Vorschriften, aus einer Gleichung wie (1) singuläre Integral-Auflösungen abzuleiten, ist also eine unzweideutige Thatsache. Anderseits geben dieselben Vorschriften in den meisten Fällen ganz brauchbare Resultate; so dass die aufgestellten zwei Fälle mehr als Ausnahmen, denn als Regel angesehen werden dürfen. Deshalb werde ich im Folgenden die Quelle dieser Vorschriften auseinandersetzen; woraus sich sowohl eine genügende Erklärung für die Ausnahmefälle, als auch eine neue Fassung der dann zu befolgenden Vorschriften ergeben wird.

Wie schon seit *Lagrange* bekannt, und wie auch aus (Nr. 594) meines oben citirten Werks deutlich folgt, findet man aus einer Gleichung zwischen zwei Variabeln x, y und einer allgemeinen Constante a, von der Form

$$(1')\qquad y=f(x\,,\,a)\,,$$

die ihr entsprechenden singulären Integral-Auflösungen, wenn man die Gleichung (1') mit der aus ihr gefolgerten Gleichung

$$(5.) \qquad \frac{dy}{da} = 0$$

durch Elimination von a verbindet. Die so gefundenen Ergebnisse werden beim Statthaben dieser Gleichung (5) immer den Charakter von Integral-Auflösungen behalten, d. h. der aus (1') gezogenen Differentialgleichung erster Ordnung genügen; sie sind jedoch nur dann von *singulärer* Beschaffenheit, wenn sie durch keinen *constanten* Werth von a aus (1') zu erlangen sind.

Wenn nun der endliche Zusammenhang der Variabeln x, y mit der allgemeinen Constante a nicht unter der Form (1'), sondern durch eine Gleichung wie (1) aus (Nr. 1) gegeben ist, so hat man, dem Vorausgeschickten zufolge, auch aus dieser den partiellen Differentialquotienten $\frac{dy}{da}$ herzustellen, denselben gleich Null zu setzen und die dadurch gefundene Gleichung mit der vorgelegten (1) durch Elimination von a zu verbinden.

Besagter Differentialquotient ist durch die Gleichung

$$(6.) \qquad \frac{dy}{da} = -\frac{\frac{dF(x,y,a)}{da}}{\frac{dF(x,y.a)}{dy}}$$

gegeben; daher hat man nur diejenigen Relationen zwischen x, y und a, Behufs Elimination von a, mit der Gleichung (1) zu verbinden, welche den in *gebrochener Form* erscheinenden Ausdruck rechts in dieser Gleichung (6) auf Null bringen. In den meisten Fällen wird Dies nach den in (Nr, 1.) gegebenen Vorschriften erreicht; d. h. wenn der Zähler des eben erwähnten Ausdrucks gleich 0 [die Gleichung (3)], wie auch der Nenner desselben Ausdrucks gleich $\frac{1}{0}$ [die Gleichung (4)] gesetzt und jedes dieser Ergebnisse mit der Gleichung (1) durch Elimination von a verbunden wird. Da aber *ein Bruch* durch das Nullwerden des Zählers odes Unendlichgrosswerden des Nenners *nicht immer* den Nullwerth bekommt, welche Anforderung dem Vorausgeschickten zufolge unerlässlich ist: so hat die Anwendung der Vorschriften in (Nr. 1) bisweilen auch *Ausnahmefälle;* d. h. man gelangt bei Befolgung der Vorschriften bisweilen auf Relationen, die den Werth von $\frac{dy}{da}$ *nicht* gleich Null machen; welche dann aus diesem Grunde dem fraglichen Falle fremd und folglich zu verwerfen sind. Zugleich zeigt sich folgende allgemeine Vorschrift, welche *keinen* Ausnahmefall mehr zulässt:

„Aus der Gleichung (1) stelle man den Ausdruck rechts in der Gleichung „(6) her und verbinde die Gleichung durch Elimination von a mit jeder Re„lation, die dem Ausdrucke den Nullwerth giebt. Die so gefundenen Relatio„nen unter den Variabeln sind entschieden Integral-Auflösungen der betref„fenden Differentialgleichung erster Ordnung; und zwar *singulärer* Art, „wenn sie sich durch keine *constanten* Werthe von a aus (1) ergeben."

Da man auch x als die *relative* Variable der Gleichung (1) ansehen kann, wenn y für die *absolute* erklärt wird, so ist eine coordinirte Regel zu der obigen auch folgende: Aus der Gleichung (1) stelle man den Ausdruck

$$\frac{dF(x,y,a)}{da} : \frac{dF(x,y,a)}{dx}$$

her, und verbinde jene durch Elimination von a mit jeder Relation die den Quotienten zu Null macht, u. s. w.

Dass es mit der hier aufgestellten Erklärung der Ausnahmefälle sein richtiges Bewenden habe, wird das Folgende noch näher zeigen.

5.

Nimmt man, erstens, den besondern Fall des Herrn *Catalan* an, nämlich die Gleichung

$$x + a - \sqrt{[3a(2y-a)]} = 0,$$

wo der Ausdruck links die Function $F(x,y,a)$ aus (1) und

$$\frac{dF(x,y,a)}{da} = 1 - \frac{3(y-a)}{\sqrt{[3a(2y-a)]}}, \quad \frac{dF(x,y,a)}{dy} = -\frac{3a}{\sqrt{[3a(2y-a)]}}$$

ist, so giebt die Relation, welche den *Nenner* des Ausdrucks rechts in (6) unendlichgross macht, die Gleichung $2y-a=0$. Diese Relation macht aber auch den *Zähler* unendlichgross: also zeigt sich der Werth des partiellen Differentialquotienten $\frac{dy}{da}$ unter der unbestimmten Form $\frac{\infty}{\infty}$, d. h. es ist

$$\frac{dy}{da} = -\frac{1 - \frac{3(y-a)}{\sqrt{[3a(2y-a)]}}}{\frac{3a}{\sqrt{[3a(2y-a)]}}} = \frac{\infty}{\infty}, \text{ für } 2y-a=0.$$

Multiplicirt man hier Zähler und Nenner mit $\sqrt{[3a(2y-a)]}$, welches

$$\frac{dy}{da} = -\frac{1}{3a}[\sqrt{\{3a(2y-a)\}} - 3(y-a)]$$

giebt, so stellt sich, bei derselben Relation $2y-a=0$, die von Null verschiedene Bestimmung $\frac{dy}{da} = -\frac{1}{2}$ dar; folglich ist das durch Verbindung der Gleichung $2y-a=0$ mit der vorgelegten sich herausstellende Eliminations-Ergebniss von a, nämlich die Gleichung $x+2y=0$, weder eine *singuläre* noch eine *particuläre* Integral-Auflösung, sondern eine dem vorliegenden Gegenstande *fremde* Relation.

Man findet hingegen *singuläre* Integral-Auflösungen, wenn man sämmtliche Relationen, welche $\frac{dy}{da}=0$ geben, nämlich die, welche in der Gleichung

$$\sqrt{[3a(2y-a)]} - 3(y-a) = 0$$

enthalten sind, mit der vorgelegten Gleichung durch Elimination von a verbindet. Die Relationen, die im vorliegenden Falle $\frac{dx}{da}=0$ geben, führen auf dieselbe Gleichung. Um Dieses, mit Umgehung der fremdartigen Auflösungen, welche gewöhnlich Quadrirungen zur Wegschaffung von Wurzelgrössen erfordern, zu zeigen, addire ich die zuletzt aufgestellte Gleichung mit der vorgelegten, und finde:

$$x+a-3(y-a)=0, \text{ oder } a=\frac{1}{4}(3y-x).$$

Setzt man diesen Werth von a in je eine der so eben addirten zwei Gleichungen, so ergiebt sich:

$$3(x+y)-\sqrt{[3(3y-x)(5y+x)]}\ , \quad \text{oder} \quad x^2+2xy-3y^2=0\ ,$$

woraus die Gleichungen

$$y-x=0 \quad \text{und} \quad 3y+x=0$$

folgen, welche auch Herr *Catalan* für die *singulären* Integral-Auflösungen der in Rede stehenden Differentialgleichung erster Ordnung erkannt hat.

Nimmt man, zweitens, den in (§. 3) vorgelegten besondern Fall vor, nämlich die Gleichung

$$a(x-y)+\sqrt{(1-y^2)}-\sqrt{(1-x^2)}=0\ ,$$

wo der Ausdruck links die Function $F(x,y,a)$ der Gleichung (1) vorstellt und wo demnach

$$\frac{dF(x,y,a)}{da} = x - y \quad , \quad \frac{dF(x,y,a)}{dy} = -a - \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}},$$

ist, so ergiebt sich $x - y = 0$ oder $x = y$ als die Relation, welche den *Zähler* des allgemeinen Ausdrucks in der Gleichung (6) auf Null bringt. Es macht aber auch dieselbe Beziehung zwischen y und x den *Nenner* besagten Ausdrucks zu Null. Denn aus der vorgelegten Gleichung erhält man:

$$a = \frac{\sqrt{(1-x^2)} - \sqrt{(1-y^2)}}{x-y}.$$

Für $x = y$ ergiebt sich hieraus, nach bekannten Vorschriften:

$$a = -\frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}} \text{ oder } a + \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}} = 0,$$

woraus, wie behauptet ward, auch $\frac{dF(x,y,a)}{dy} = 0$ folgt. Dieses vorausgesetzt, erhält man

$$\frac{dy}{da} = -\frac{x-y}{a + \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}}} = \frac{0}{0}, \text{ bei } x = y;$$

wo noch zu zeigen ist, dass bei derselben Relation $x = y$ der Werth von $\frac{dy}{da}$ von Null verschieden sei. Ersetzt man hier rechterhand a, der vorgelegten Gleichung gemäss, so ergiebt sich:

$$\frac{dy}{da} = -\frac{(x-y)^2}{\sqrt{(1-x^2)} - \sqrt{(1-y^2)} + \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}}(x-y)}.$$

Da der Ausdruck rechts für $x = y$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, so differentiire man Zähler und Nenner rechts nach x, was

$$\left(\frac{dy}{da}\right)_{(x=y)} = \frac{2(x-y)}{\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}}}$$

giebt, und wo abermals der Ausdruck rechts für $x = y$ in $\frac{0}{0}$ übergeht. Differentiirt man abermals Zähler und Nenner nach x, so ergiebt sich zuletzt:

$$\left(\frac{dy}{da}\right)_{(x=y)} = \frac{2}{\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}}} = 2(1-y^2)\sqrt{(1-y^2)};$$

welches, wie behauptet, von Null verschieden ist. Daher ist auch die Relation $y = x$ keine Integral-Auflösung der in Rede stehenden Differentialgleichung erster Ordnung.

Wird hingegen die obige Bestimmungsgleichung für $\frac{dy}{dx}$ folgendermaassen aufgestellt:

$$\frac{dy}{da} = -\frac{(x-y)\sqrt{(1-y^2)}}{a\sqrt{(1-y^2)}+y},$$

so zeigt sich leicht das Nullwerden des Differentialquotienten $\frac{dy}{da}$ für $y^2 = 1$; und da dies nur einen *variabeln* Werth von a giebt, so ist auch die Gleichung $y^2 = 1$ eine *singuläre* Integral-Auflösung der in Rede stehenden Differentialgleichung erster Ordnung. Stellt man noch die Werthform für $\frac{dx}{da}$ her, so zeigt sich auf ähnliche Weise, dass auch $x^2 = 1$ eine *singuläre* Integral-Auflösung für den vorliegenden Fall ist.

Anmerkung. Der in (Nr. 6) angenommene besondere Fall, mit welchem ich mich auch im zweiten Theile der vorigen Nr. beschäftigte, giebt für $\frac{df(x,y,a)}{da}$ den von der allgemeinen Constante a unabhängigen Ausdruck $x-y$. Es sagt aber Herr *Catalan* in der erwähnten Note, dass, nur insofern $\frac{dF(x,y,a)}{da}$ keinen von a unabhängigen Ausdruck giebt, die durch Elimination von a aus den Gleichungen (1 und 3) hervorgehenden Resultate richtig (exacts) sein werden. Da nun, wie schon bemerkt, der von mir gebrauchte Fall in der That kein a enthält, so scheint die, diesem hochgeschätzten Geometer gegenüber, Eingangs (Nr. 6) hingestellte Aeusserung nicht ganz gerechtfertiget zu sein. Hierauf ist aber zu erwidern, dass Herr *Catalan* die erwähnte Behauptung unbegründet gelassen hat. Dass auch solche nicht zu begründen möglich sei, will ich zum Beschlusse an einem besondern Falle zeigen. Es sei die Gleichung

$$(\alpha) \qquad (a-x+y)^3 - 3(x+y)(a-x+y)^2 + 1 = 0$$

gegeben, wo der Ausdruck links die Function $F(x, y, a)$ vorstellt, und aus welchem

$$(\beta) \qquad \frac{dF(x,\,y.\,a)}{da} = 3(a-x+y)\,(a-3x-y)$$

folgt: so enthält der Ausdruck rechts, wie man sieht, die allgemeine Constante a. Der Ausdruck nimmt den Nullwerth auch für

$$a-x+y=0$$

an; und wenn Dies in die vorgelegte Gleichung gesetzt wird, so gelangt man auf das widersprechende Ergebniss $1=0$. Der Grund hievon ist, dass auch die Differentialquotienten von $F(x,\,y,\,a)$, nach x sowohl, als nach y, denselben Factor $a-x+y$ enthalten. Es ist nämlich:

$$\frac{dF(x,\,y,\,a)}{dx} = -6(a-x+y)(a-2x),$$

$$\frac{dF(x,\,y,\,a)}{dy} = -6(a-x+y)(x+y),$$

so dass sich nach (Nr. 7)

$$\frac{dy}{da} = \frac{3(a-x+y)\,(a-3x-y)}{6(a-x+y)(x+y)} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{da} = \frac{3(a-x+y)\,(a-3x-y)}{6(a-x+y)\,(a-2x)}$$

findet; wo also, bei der Annahme $a-x+y=0$, weder $\frac{dy}{da}$ noch $\frac{dx}{da}$ gleich Null wird. Scheidet man den gemeinsamen Factor aus Zähler und Nenner der Brüche aus, was

$$\frac{dy}{da} = \frac{a-3x-y}{2(x+y)}\,, \quad \frac{dx}{da} = \frac{a-3x-y}{a-2x}$$

giebt, so zeigt sich, dass, der zweite Factor in obiger Gleichung (β) gleich Null gesetzt, oder die Gleichung $a-3x-y=0$, die Differentialquotienten $\frac{dy}{da}$ und $\frac{dx}{da}$ zu Null macht; weshalb denn auch die vorgelegte Gleichung (α), nach Einführung dieser letztern Relation zwischen x, y und a, eine Integral-Auflösung liefert, nämlich die Gleichung:

$$4(x+y)^3-1=0,$$

von welcher man sieht, dass sie zur Classe der *singulären* Auflösungen gehört.

Zürich, im November 1848.

8.

Ueber einen Hülfssatz zur Ausmittelung der Werthe bestimmter Integrale.

(Von Herrn Dr. *Raabe*, Professor an der Universität zu Zürich.)

(Aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich.)

In den „*Comptes rendus*" vom 16. Oct. d. J. theilt Herr *Cauchy* in einer Note folgenden Satz mit.

„Das Integral $\int_0^\infty e^{pi} f(re^{pi})\,dr$, wo f ein Functionszeichen und i die „imaginäre Einheit ist, ändert seinen Werth nicht, wenn das Argument p „der imaginären Variable $z = re^{pi}$ alle Werthe durchläuft, innerhalb wel„cher die Function $f(z)$ endlich und continuirlich bleibt. Ueberdies muss „diese Function von der Art sein, dass das Product $zf(z)$ für $r = 0$, wie für „$r = \infty$, gleich Null ist."

Dieser Satz leuchtet unmittelbar ein, wenn man statt der imaginären e^{pi} eine *reelle*, *positive* Constante a setzt. Wenn nämlich das bestimmte Integral $\int_0^\infty f(r)\,dr$ den Anforderungen einer mathematischen Grösse nach (Nr. 105 u. 106) meiner Integralrechnung entspricht, so gelangt man beim Uebergange von r in ar auf die Gleichheit

$$\int_0^\infty af(ar)\,dr = \int_0^\infty f(r)\,dr;$$

wo die positiv angenommene reelle Grösse a willkürlich ist. Setzt man aber a imaginär und von der Form e^{pi}, d. h. ersetzt man r in demselben bestimmten Integrale durch re^{pi}, so zeigt sich zwar **0** als *unterer*, nicht aber ∞ als *oberer* Grenzwerth des umgebildeten bestimmten Integrals. Hierin besteht das eigentliche Wesen des obigen Satzes, dessen Begründung und Brauchbarkeit in der Theorie bestimmter Integrale Folgendes zeigen wird.

1.

Bei Feststellung der Gleichung

$$y = \int_0^\infty af(ar)\,dr,$$

werde die allgemeine reelle, oder imaginäre Constante a von der Art angenommen, dass die Function $f(ar)$ für keinen innerhalb 0 und ∞ fallenden Werth von r unendlich gross wird.

Zieht man hieraus den Differentialquotienten von y nach a, so erhält man

$$\frac{dy}{da} = \int_0^\infty f(ar)\,dr + \int_0^\infty af_1(ar)\,r\,dr\,.$$

Durch theilweise Integration ergiebt sich, beachtend die unmittelbar vorher getroffene Feststellung für a:

$$\int_0^\infty af_1(ar)\,r\,dr = [rf(ar)]_{(r=\infty)} - \int_0^\infty f(ar)\,dr.$$

Wenn man daher die zweite Voraussetzung macht, $rf(ar)$ gehe für $r = \infty$ in Null über, so ergiebt sich $\frac{dy}{da} = 0$; woraus folgt, dass y von a unabhängig ist, und dass der am Eingange aufgestellte Satz folgende abweichende und einfachere Form bekommt:

Das bestimmte Integral $\int_0^\infty af(ar)\,dr$, *wo* f *ein Functionszeichen ist, ändert seinen Werth nicht, während die reelle, oder imaginäre Constante* a *der Variable* $z = ar$ *alle Werthe durchläuft, innerhalb welcher die Function* $f(z)$ *nicht unendlich gross wird. Ueberdiess muss diese Function von der Art sein, dass das Product* $rf(z)$ *für* $r = \infty$ *Null ist.*

Erste Anmerkung. Ist unter den zusammenhangenden Werthen von a, die der ersten Anforderung dieses Satzes entsprechen, die reelle positive Einheit, so hat man für alle diese Werthe von a, sie mögen reell oder imaginär sein, die Gleichheit:

$$\text{(1.)} \qquad \int_0^\infty af(ar)\,dr = \int_0^\infty f(r)\,dr,$$

falls noch die andere Bedingung des vorausgesetzten Satzes, dass $rf(ar)$ bei $r = \infty$ in Null übergeht, ebenfalls erfüllt wird.

Zweite Anmerkung. Zum richtigen Gebrauche des obigen Satzes ist auch noch Folgendes zu beachten.

Wenn die Bedingungen des vorausgeschickten Satzes nur für die innerhalb a_1 und a_2 fallenden Werthe von a, nicht aber für diese Grenzen selbst, Statt finden, so hat man, wenn α einer dieser Zwischenwerthe ist, zu (1) folgende coordinirte Gleichheit:

$$\int_0^\infty \alpha f(\alpha r)\,dr = \int_0^\infty \alpha f(\alpha r)\,dr\,,$$

wo nunmehr für a bloss sämmtliche innerhalb a_1 und a_2 fallenden Werthe angenommmen werden dürfen. Aehnlich verhält es sich, wenn die Bedingungen des Satzes für sämmtliche innerhalb a_2 und a_3 fallenden Werthe von a, diese Grenzwerthe ausgenommen, erfüllt werden; u. s. w.

2.

Als erste Anwendung setze ich das bestimmte Integral

$$y = \int_0^\infty \frac{e^{(m+1)pi} r^m}{1 + e^{npi} r^n} dr,$$

wo m und n reell und positiv, und $m+1<n$ sein sollen. Hier ist

$$a = e^{pi}\,, \quad z = re^{pi} \quad \text{und} \quad f(z) = \frac{z^m}{1+z^n};$$

also treffen die Bedingungen des Satzes für alle Werthe von a ein, die nicht $a^n = -1$ geben, d. h. für alle Werthe von p, die nicht np ungerade Vielfache von π sind.

Sieht man nun auf den Fall, wo np zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, so kann im vorgelegten bestimmten Integrale $np = 0$ gesetzt werden, und es ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \frac{e^{(m+1)pi} r^m}{1 + e^{npi} r^n} dr = \int_0^\infty \frac{r^m}{1+r^n} dr\,; \quad (-\pi < np < \pi)\,.$$

Führt man hier für das bestimmte Integral rechts dessen bekannten Werth ein, so ist:

$$\int_0^\infty \frac{r^m dr}{1+e^{npi}r^n} = e^{-(m\pm1)pi}\frac{r}{n\,\mathrm{Sin.}(m+1)\frac{\pi}{n}}.$$

Hieraus ergeben sich, durch Absonderung der reellen von den imaginären Theilen, wenn noch np durch Θ ersetzt wird, folgende Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{r^m dr}{1+2r^p\,\mathrm{Cos.}\,\Theta+r^{2p}} = \frac{\mathrm{Sin.}\frac{n-m-1}{n}\Theta}{\mathrm{Sin.}\,\Theta}\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{\mathrm{Sin.}\frac{n-m-1}{n}\pi},$$

$$\int_0^\infty \frac{r^{m+n} dr}{1+2r^n\,\mathrm{Cos.}\,\Theta+r^{2n}} = \frac{\mathrm{Sin.}\frac{m+1}{n}\Theta}{\mathrm{Sin.}\,\Theta}\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{\mathrm{Sin.}\frac{m+1}{n}\pi};$$

wo Θ alle innerhalb $-\pi$ und $+\pi$ liegenden Werthe haben kann.

Erwägt man, dass diese Ergebnisse, ihrer Deduction nach, für alle reelle positive Werthe von m und n, die $m+1<n$ geben, Bestand haben, und ferner, dass die erste dieser Gleichheiten durch Erhöhung von m um n genau die zweite giebt, so zeigt sich die erste allein, d. h. das Integral

$$(1.)\quad \int_0^\infty \frac{r^m dr}{1+2r^n\,\mathrm{Cos.}\,\Theta+r^{2n}} = \frac{\mathrm{Sin.}\frac{n-m-1}{n}\Theta}{\mathrm{Sin.}\,\Theta}\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{\mathrm{Sin.}\frac{n-m-1}{n}\pi},$$

für alle zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegenden Werthe von Θ, so wie für alle reellen, positiven Zahlenwerthe von m und n, die der Ungleichheit $m+1<2n$ genügen, als begründet.

3.

Zur zweiten Anwendung nehme ich die von Herrn *Cauchy* in einer zweiten, neben der am Eingang erwähnten Note mitgetheilten zwei bestimmten Integrale.

Wenn

$$(2.)\quad \begin{cases} A = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha)^m(1+\alpha)^n+(1+\alpha)^m(1-\alpha)^n}{(\mathrm{Cos.}\,\Theta+i\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\Theta)^{m+n}}\cdot\frac{d\alpha}{1-\alpha^2}, \\ B = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha)^m(1+\alpha)^n-(1+\alpha)^m(1-\alpha)^n}{i(\mathrm{Cos.}\,\Theta+i\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\Theta)^{m+n}}\cdot\frac{d\alpha}{1-\alpha^2} \end{cases}$$

gesetzt wird, so gelangt man zu

$$A \pm Bi = 2\int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{m-1}(1+\alpha)^{n-1}}{(\mathrm{Cos.}\,\Theta \pm i\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\Theta)^{m+n}}\,d\alpha + 2\int_0^1 \frac{(1+\alpha)^{m-1}(1-\alpha)^{n-1}}{(\mathrm{Cos.}\,\Theta \mp i\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\Theta)^{m-n}}\,d\alpha\ ;$$

wo die obern oder untern Zeichen zusammengehören. Ersetzt man im ersten dieser Integrale die Integrationsvariable α durch $\frac{r-1}{r+1}$ und im zweiten durch $\frac{1-r}{1+r}$, so ergiebt sich folgende Bestimmungsgleichung:

$$A \pm Bi = 2^{m+n} e^{\pm(m+n)\Theta i}\int_0^\infty \frac{r^{n-1}\,dr}{(1+re^{\pm 2\Theta i})^{m+n}}\ ,$$

die, wenn der Einfachheit wegen einstweilen $p = \pm 2\Theta$ gesetzt wird, mit folgender gleichbedeutend ist:

$$A \pm Bi = 2^{m+n} e^{\pm(m-n)\Theta i}\int_0^\infty \frac{e^{npi}\,r^{n-1}\,dr}{(1+re^{pi})^{m+n}}\ ,$$

Dieses bestimmte Integral entspricht, wenn m und n positive reelle Grössen sind, allen Anforderungen des aufgestellten Theorems, falls nur $a = e^{pi}$ von -1 verschieden angenommen wird. Erklärt man nun p für innerhalb $-\pi$ und $+\pi$ liegend, so darf man auch $p = 0$ setzen, und erhält:

$$A \pm Bi = 2^{m+n} e^{\pm(m-n)\Theta i}\int_0^\infty \frac{r^{n-1}\,dr}{(1+r)^{m+n}}\ ,$$

oder, nach (Nr. 217) meiner Integralrechnung:

$$A \pm Bi = 2^{m+n} e^{\pm(m-n)\Theta i}\,\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\ ;$$

woraus die von Herrn *Cauchy* aufgestellten Ergebnisse:

$$(2.') \qquad \begin{cases} A = 2^{m+n}\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\,\mathrm{Cos.}\,(m-n)\Theta\ , \\ B = 2^{m+n}\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\,\mathrm{Sin.}\,(m-n)\Theta \end{cases}$$

folgen, in denen nach den obigen Feststellungen Θ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu liegen kommt.

4.

Wird, um noch ein von Herrn *Cauchy* ohne Beweis gegebenes Resultat nachzuweisen, in dem vorhin durch A ausgedrückten bestimmten Integrale m durch $\frac{1}{2}(m+1)$ und n durch $\frac{1}{2}(m-1)$ ersetzt, so ist:

$$\int_0^{+1} \frac{(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}(m-3)}\,d\alpha}{(\mathrm{Cos.}\,\Theta+i\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\Theta)^m} = 2^{m-1}\frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(m-1)\,\Gamma^{\frac{1}{2}}(m+1)}{\Gamma(m)}\mathrm{Cos.}\,\Theta\,.$$

Da Θ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ fällt, so kann Tang.Θ alle reellen, nicht unendlich gross werdenden Werthe bekommen. Wird demnach Tang.Θ durch $\frac{b}{a}$ ersetzt, so erhält man

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}(m-3)}\,d\alpha}{(a+b\alpha i)^m} = 2^{m-1}\frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(m-1)\,\Gamma^{\frac{1}{2}}(m+1)}{\Gamma(m)}\cdot\frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}\,,$$

wo a nothwendig von Null verschieden ist. Berücksichtigt man noch eine Eigenschaft der Function Γ (Gl. (ϑ) in Nr. 222 meiner Ir.), so erhält man auch:

$$(3.)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}(m-3)}}{(a+b\alpha i)^m}\,d\alpha = \pi\,\frac{\frac{1}{2}\Gamma^{\frac{1}{2}}(m-1)}{\Gamma\frac{1}{2}m}\cdot\frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}\,;$$

wo m eine beliebige reelle positive Zahl und grösser als 1 ist. Eben so sind a und b beliebige reelle Zahlen; bloss mit der Beschränkung, dass a von Null verschieden sein muss.

5.

Sehr brauchbar ist das obige Theorem, wenn Ergebnisse des Integrirens, welche allgemeine, reelle Constanten enthalten, auf imaginäre oder gar complexe Werthe derselben zu übertragen sind; wovon hier schliesslich ein Beispiel folgen soll.

Wie bekannt, ist

$$(4.)\qquad \int_0^{\infty} r^{a-1}e^{-mr}\,dr = m^{-a}\Gamma(a)\,;$$

wo a und m reelle positive Zahlen sind. Geht in dem bestimmten Integrale r in re^{pi} über, wodurch solches zu

$$\int_0^\infty e^{api} r^{a-1} e^{-mre^{pi}} dr$$

wird, so entspricht dieser Ausdruck, mit der für m getroffenen Feststellung, allen Anforderungen des Theorems, wenn man p bloss der Werthe von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ fähig erklärt. Es liefert demnach dieses bestimmte Integral für die eben erwähnten Werthe von p denselben Werth, wie bei der Annahme $p = 0$; folglich ist

$$\int_0^\infty e^{api} r^{a-1} e^{-mre^{pi}} dr = m^{-a} \Gamma(a) ,$$

oder auch

$$\int_0^\infty r^{a-1} e^{-mre^{pi}} dr = e^{-api} m^{-a} \Gamma(a) .$$

Wird nun $m \operatorname{Cos}.p = \alpha$ und $m \operatorname{Sin}.p = \beta$ gesetzt, so ist

$$\int_0^\infty r^{a-1} e^{-(\alpha+\beta i)r} dr = (\alpha + \beta i)^{-a} \Gamma(a);$$

woraus folgt, dass die Integralbestimmung in (4) noch Bestand hat, wenn auch m eine *complexe* Zahl $\alpha + \beta i$ ist; wobei jedoch der reelle Theil α *nicht negativ* sein darf.

Anmerkung. Streng genommen darf a nur insofern gleich 0 gesetzt werden, als man dem Ausdrucke $r^a e^{-mri}$, beim unendlichen Wachsen von r (wo a reell und positiv ist), den Grenzwerth 0 anweiset.

Zürich, den 13. Novbr. 1848.

9.

Zurückführung der Wurzelform einer algebraischen Gleichung

auf die Integration linearer partieller, oder auch eines Systems simultaner gemeiner Differentialgleichungen erster Ordnung.

(Von dem Herrn Dr. *Raabe*, Professor der Math. an der Universität zu Zürich.)

(Aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich.)

1.

In dem allgemeinen Ausdruck

$$(1.)\quad x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots\ldots a_{m-1} x + a_m = 0$$

einer algebraischen rationalen Gleichung $m$ten Grades, stellen wir uns unter den Coefficienten $a_1, a_2, \ldots\ldots a_m$ beliebige, von x unabhängige Zahlengrössen vor, die unter einander in keiner gegenseitigen Beziehung stehen.

Werden die m Wurzeln der Gleichung (1) durch $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_m$ bezeichnet, so ist bekanntlich irgend einer der Coefficienten in (1), etwa a_k, wenn derselbe noch mit $(-1)^k$ multiplicirt wird, der Summe aller Combinationen besagter m Wurzeln zur $k$ten Classe, ohne Wiederholungen, gleich, wo die in jeder Combinationsgruppe vorkommenden k Wurzeln als gegenseitige Factoren auftreten.

Dieses vorausgeschickt, stellen wir die Gleichung $(m-1)$ten Grades, welche, mit Ausnahme der einen Wurzel x_p (wo p alle Werthe von 1 bis m haben kann), alle übrigen Wurzeln mit der Gleichung (1) gemein hat, durch

$$(2.)\quad x^{m-1} + (p)_1 x^{m-2} + (p)_2 x^{m-3} + \ldots\ldots (p)_{m-2} x + (p)_{m-1} = 0$$

dar. Alsdann finden unter den Coefficienten $(p)_1, (p)_2, (p)_3, \ldots\ldots (p)_{m-1}$ dieser, und denen $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_m$ der vorgelegten Gleichung (1), folgende einfache Relationen Statt:

$$(3.)\qquad \begin{cases} a_1 = (p)_1 - x_p\ , \\ a_2 = (p)_2 - x_p(p)_1\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k = (p)_k - x_p(p)_{k-1}\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m = -x_p(p)_{m-1}\ ; \end{cases}$$

wo die ganze positive Zahl k alle Werthe von **2** bis $m-1$ haben kann, und wo irgend ein Symbol $(p)_r$ die Wurzel x_p nicht enthält.

Aus diesen Relationen ergeben sich nach und nach, von der ersten ausgegangen, folgende andere:

$$(4.)\qquad \begin{cases} (p)_1 = a_1 + x_p\ , \\ (p)_2 = a_2 + a_1 x_p + x_p^2\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p)_{m-1} = a_{m-1} + a_{m-2}x_p + a_{m-3}x_p^2 + \ldots\ldots a_1 x_p^{m-2} + x_p^{m-1}\ . \end{cases}$$

Geht man hingegen von der letzten Relation in (3) aus, so gelangt man zu den Gleichungen

$$(p)_{m-1} = -\frac{a_m}{x_p}\ , \quad (p)_{m-2} = -\frac{a_m}{x_p^2} - \frac{a_{m-1}}{x_p}\ , \quad (p)_{m-3} = -\frac{a_m}{x_p^3} - \frac{a_{m-1}}{x_p^2} - \frac{a_{m-2}}{x_p}\ ,$$

u. s. w.

von welchen wir jedoch im Folgenden keinen Gebrauch machen werden.

Die hier aufgestellten Ergebnisse setzen stillschweigend voraus, dass der Grad der Gleichung (1), also die Zahl m, mindestens gleich **2** sei.

2.

Irgend eine Wurzel der Gleichung (1), z. B die Wurzel x_1, kann als Function der Coefficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_m$ angesehen werden. Stellt man sich in dieser (zwar unbekannten) Function, eben die Coefficienten durch die bekannten symmetrischen Functionen der Wurzeln (wie etwa die Gleichungen (3) sie angeben) ersetzt vor, so darf die zuerst erwähnte Darstellungsgleichung von x_1 nach jeder der m Wurzeln für sich, oder partiell *differentiirt* werden.

Wird die partielle Differentiation zuerst nach x_1 ausgeführt, so gelangt man zunächst zu:

$$1 = \frac{dx_1}{da_1}\cdot\frac{da_1}{dx_1} + \frac{dx_1}{da_2}\cdot\frac{da_2}{dx_1} + \frac{dx_1}{da_3}\cdot\frac{da_3}{dx_1} + \ldots\ldots \frac{dx_1}{da_m}\cdot\frac{da_m}{dx_1}.$$

Wird in den Gleichungen (3) $p = 1$ gesetzt, so folgt aus denselben:

$$\frac{da_1}{dx_1} = -1\ ,\ \frac{da_2}{dx_1} = -(1)_1\ ,\ \frac{da_3}{dx_1} = -(1)_2, \ldots\ldots \frac{da_m}{dx_1} = -(1)_{m-1};$$

mithin geht das vorige partielle Differentiations-Ergebniss in

$$(5.)\qquad \frac{dx_1}{da_1} + (1)_1\frac{dx_1}{da_2} + (1)_2\frac{dx_1}{da_3} + \ldots\ldots (1)_{m-1}\frac{dx_1}{da_m} = -1$$

über. Wird ferner dieselbe, im Eingange gedachte Bestimmungsgleichung für x_1 nach x_2 partiell differentiirt, so gelangt man, da x_1 von x_2 unabhängig ist, zunächst zu:

$$0 = \frac{dx_1}{da_1}\cdot\frac{da_1}{dx_2} + \frac{dx_1}{da_2}\cdot\frac{da_2}{dx_2} + \frac{dx_1}{da_3}\cdot\frac{da_3}{dx_2} + \ldots\ldots \frac{dx_1}{da_m}\cdot\frac{da_3}{dx_2}.$$

Setzt man in den Relationen (3) $p = 2$, so ergiebt sich aus denselben:

$$\frac{da_1}{dx_2} = -(1)\ ,\ \frac{da_2}{dx_2} = -(2)_1\ ,\ \frac{da_3}{dx_2} = -(2)_2 \ldots\ldots\ ,\ \frac{da_m}{dx_2} = -(2)_{m-1};$$

folglich geht das obige partielle Differentiations-Ergebniss in

$$(6.)\qquad \frac{dx_1}{da_1} + (2)_1\frac{dx_1}{da_2} + (2)_2\frac{dx_1}{da_3} + \ldots\ldots (2)_{m-1}\frac{dx_1}{da_m} = 0$$

über. Wird weiter dieselbe gedachte Bestimmungegleichung nach x_3 partiell differentiirt, so gelangt man, ähnlich wie zu den eben aufgestellten, zu der folgenden Gleichung:

$$(7.)\qquad \frac{dx_1}{da_1} + (3)_1\frac{dx_1}{da_2} + (3)_2\frac{dx_1}{da_3} + \ldots\ldots (3)_{m-1}\frac{dx_1}{da_m} = 0.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man zuletzt zu einem partiellen Differential-Ergebniss nach x_m von folgender Form:

$$(8.)\qquad \frac{dx_1}{da_1} + (m)_1\frac{dx_1}{da_2} + (m)_2\frac{dx_1}{da_3} + \ldots\ldots (m)_{m-1}\frac{dx_1}{da_m} = 0.$$

Multiplicirt man diese, durch partielle Differentiationen nach x_1, x_2, x_3, ... x_m in (5, 6, 7, ..., 8) erlangten Ergebnisse nach der Ordnung ihrer Folge mit

$x_1^h, x_2^h, x_3^h \ldots\ldots x_m^h$, und nimmt die Summe, so erhält man folgendes Summen-Ergebniss:

$$\frac{dx_1}{da_1}\cdot\sum_{p=1}^{p=m}\cdot x_p^h + \frac{dx_1}{da_2}\cdot\sum_{p=1}^{p=m}\cdot(p)_1 x_p^h + \ldots\ldots \frac{dx_1}{da_m}\cdot\sum_{p=1}^{p=m}\cdot(p)_{m-1}x_p^h = -x_1^h\,;$$

wo die Summenzeichen über alle ganzen Zahlenwerthe von **1** bis m sich erstrecken, und wo wir unter h irgend eine ganze Zahl, Null mitbegriffen, verstehen.

Ersetzt man hier die Symbole $(p)_1, (p)_2, \ldots\ldots (p)_{m-1}$ gemäss den Gleichungen (4), und bedient sich folgender abkürzender Bezeichnung:

$$(9.)\qquad S_\lambda = x_1^\lambda + x_2^\lambda + x_3^\lambda + \ldots\ldots x_m^\lambda,$$

so stellt sich das zuletzt erlangte Summen-Ergebniss folgendermaassen dar:

$$(I.)\quad \begin{cases} S_h\cdot\dfrac{dx_1}{da_1} + (S_{h+1} + a_1.S_h)\dfrac{dx_1}{da_2} + (S_{h+2} + a_1.S_{h+1} + a_2.S_h)\dfrac{dx_1}{da_3} \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + (S_{h+m-1} + a_1.S_{h+m-2} + \ldots\ldots a_{m-2}.S_{h+1} + a_{m-1}.S_h)\dfrac{dx_1}{da_m} = -x_1^h\,; \end{cases}$$

wo der geringste Werth von m, wie schon gedacht, **2** ist, wo aber h alle ganzen positiven, so wie negativen Werthe, und auch den Werth Null haben kann.

Bekanntlich ist S_λ (wo λ irgend eine ganze Zahl, Null mitbegriffen, ist) durch die Coefficienten und durch die Gradzahl m der Gleichung (1.) darstellbar; also haben wir in (I) eine lineare partielle Differentialgleichung zwischen der Wurzel x_1, als der relativen Variable, und den Coefficienten $a_1, a_2, \ldots\ldots a_m$ der Gleichung (1.), als den absoluten Variabeln, die von nicht unbedeutendem Werthe bei der Bestimmung der Wurzelform einer Gleichung vom $m$ten Grade ist. Wird ferner die oben angedeutete Willkürlichkeit der Zahl h in Betracht gezogen, so zeigt sich weiter die unendliche Mannigfaltigkeit dieser aus (I.) zu ziehenden linearen partiellen Differentialgleichungen; von denen jedoch, wie sich von selbst versteht, blos m unter einander wesentlich verschieden sind.

3.

Ehe wir zu einer nähern Discussion der partiellen Differentialgleichung (I.) übergehen, stellen wir die bekannten Relationen auf, welche zur Bestimmung von S_λ aus Gleichung (9.) führen.

Erstens hat man, wie aus der Gleichung (9.) unmittelbar folgt:

$$(10.) \qquad S_0 = m.$$

Zweitens findet für alle ganzen und positiven Werthe von $r=1$ bis $r=m$, die Recursion:

$$(11.) \quad S_r + a_1 . S_{r-1} + a_2 . S_{r-2} + \ldots . a_{r-1} . S_1 + r a_r = 0$$

Statt.

Drittens hat man für alle ganzen Werthe von r die Recursion:

$$(12.) \quad S_{m+r} + a_1 . S_{m+r-1} + a_2 . S_{m+r-2} + \ldots . a_m . S_r = 0,$$

die, wenn r positiv gesetzt wird, als Ergänzung von (11.) zur Bestimmung von S_λ anzusehen ist, wenn λ ganz und positiv ist.

Viertens folgt aus (12.), wenn r negativ und ganz, aber numerisch kleiner, oder höchstens gleich m ist, mit Zuziehung der Gleichungen (10 u. 11), folgende Recursion:

$$(13.) \quad a_m . S_{-r} + a_{m-1} . S_{-r+1} + \ldots . a_{m-r+1} . S_{-1} + r a_{m-r} = 0.$$

Fünftens ergiebt sich, ebenfalls aus (12.), wenn r durch $-m-r$ ersetzt wird, folgende Recursion:

$$(14.) \quad a_m . S_{-m-r} + a_{m-1} . S_{-m-r+1} + a_{m-2} . S_{-m-r+2} + \ldots . a_1 . S_{-r-1} + S_{-r} = 0,$$

die, mit der vorhergehenden vereint, zur Bestimmung von $S_{-\lambda}$ für alle ganzen und positiven Werthe von λ benutzt werden kann.

4.

Setzt man nun in der allgemeinen linearen partiellen Differentialgleichung (I.) $h=0$, so nimmt solche, die Gleichungen (10 u. 11) beachtend, folgende sehr einfache Form an:

$$(15.) \quad m \frac{dx_1}{da_1} + (m-1) a_1 \frac{dx_1}{da_2} + (m-2) a_2 \frac{dx_1}{da_3} + \ldots . 1 . a_{m-1} \frac{dx_1}{da_m} = -1.$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach der *Lagrange*'schen Verfahrungsweise, welche ich in (Nr. 567.) meiner Integralrechnung ebenfalls mitgetheilt habe, so

gelangt man, mit Uebergehung aller Zwischenrechnungen, zu folgender Integralgleichung:

$$(16.) \qquad x_1 = -\frac{a_1}{m} + \varphi(b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots b_{m-1}),$$

wo das zweite Glied rechts eine willkürliche Function der $m-1$ Grössen b_1, b_2, b_3, ... b_{m-1} ist, die wir in der Folge einfach durch φ darstellen werden. Die Grössen b_1, b_2, b_3, ... b_{m-1}, hangen von den Coefficienten der vorgelegten Gleichung (1.) in der Weise ab, dass, wenn k einer der Zeiger $1, 2, 3, \ldots\ldots m-1$ ist, die Grösse b_k durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$(17.) \quad b_k = a_{k+1} - a_k\binom{m-k}{1}\frac{a_1}{m} + a_{k-1}\binom{m-k+1}{2}\left(\frac{a_1}{m}\right)^2$$
$$- \ldots\ldots (-1)^{k-1} a_2\binom{m-2}{k-1}\left(\frac{a_1}{m}\right)^{k-1} + (-1)^k . k\binom{m}{k+1}\left(\frac{a_1}{m}\right)^{k+1};$$

wo ein Symbol wie $\binom{p}{k}$ den Coefficienten von x^k in der Entwickelung des Binoms $(1+x)^p$ ausdrückt.

Dieses Ergebniss (16) erledigt zum Theil die im Eingange, in (Nr. 2) angeregte Aufgabe, welche die Darstellung einer Wurzel x_1 der in Rede stehenden algebraischen Gleichung als Function ihrer m Coefficienten a_1, a_2, ... a_m verlangt. Man sieht nämlich aus diesem Ergebnisse, dass besagte Wurzel noch von einer Function φ abhängig ist, die bloss die $m-1$ Argumente $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ einschliesst, deren allgemeiner Repräsentant durch b_k in der Gleichung (17) gegeben ist. Ueberdies nehmen wir aus demselben Ergebnisse in (16) ab, dass das bei den Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades übliche Verfahren, das zweite Glied, ehe zu deren Lösung geschritten wird, wegzuschaffen, allgemein bei jeder Gleichung zu befolgen sei; worauf namentlich das Glied $\frac{a_1}{m}$ in der Gleichung (16.) hinweiset. Ersetzt man nämlich in der vorgelegten m-gradigen Gleichung (1.) die Unbekannte x durch $-\frac{a_1}{m} + \varphi$, so erhält man in Bezug auf φ abermals eine Gleichung $m$ten Grades, in welcher das zweite Glied fehlt und in welcher die Coefficienten der übrigen Glieder genau die durch b_1, b_2, ... b_{m-1} vorgestellten Grössen sind; daher auch der Werth von φ eine Function dieser $m-1$ Argumente sein muss.

5.

Die allgemeine partielle Differentialgleichung (I.) sind wir nun mittels des Ergebnisses (16.) in eine analoge umzubilden im Stande, in welcher φ die relative Variable ist und die $m-1$ Argumente $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ die absoluten Variabeln vorstellen.

Man kann zu diesem Ende die partiellen Differentialquotienten von x_1, nach $a_1, a_2, \ldots a_m$, aus (16.) entnehmen. So z. B. wird man

$$\frac{dx_1}{da_3} = \frac{d\varphi}{db_2} - \binom{m-3}{1} \alpha \frac{d\varphi}{db_3} + \binom{m-3}{2} \alpha^2 \frac{d\varphi}{db_4} - \ldots (-1)^{m-3} \alpha^{m-3} \cdot \frac{d\varphi}{db_{m-1}}$$

finden, wo der Kürze wegen α statt $\frac{a_1}{m}$ gesetzt ist. Diese Bestimmung, so wie die der übrigen partiellen Differentialquotienten, die sich auf ähnliche Weise aus (16.) entnehmen lassen, wird man in die allgemeine partielle Differentialgleichung (I.) einführen, und hierauf die Grössen $a_2, a_3, \ldots a_m$, der allgemeinen Gleichung (17.) gemäss, als Functionen von $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ und α ersetzen.

So gelangt man zu der partiellen Differentialgleichung, welche φ als Function von $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ enthält. Da aber in dieser Endgleichung die Grösse α oder $\frac{a_1}{m}$ nicht mehr vorkommen darf, so kann die Umbildung um ein Bedeutendes vereinfacht werden, wenn, nachdem ähnlich wie vorhin, sämmtliche partielle Differentialquotienten von x_1 aufgestellt worden sind, die in denselben explicite noch vorkommende Grösse α durch irgend einen constanten, jetzt durch den Nullwerth, ersetzt wird. Diesemnach hat man statt $\frac{dx_1}{da_1}$ den Ausdruck:

$$-\frac{1}{m}\left[1 + \binom{m-2}{1} a_2 \frac{d\varphi}{db_2} + \ldots \binom{m-k}{1} a_k \frac{d\varphi}{db_k} + \ldots a_{m-1} \cdot \frac{d\varphi}{db_{m-1}}\right],$$

und statt der partiellen Differentialquotienten

$$\frac{dx_1}{da_2}, \quad \frac{dx_1}{da_3}, \quad \ldots \quad \frac{dx_1}{da_m},$$

beziehlich folgende:

$$\frac{d\varphi}{db_1}, \quad \frac{d\varphi}{db_2}, \quad \ldots \quad \frac{d\varphi}{db_{m-1}}$$

in die allgemeine partielle Differentialgleichung (I.) einzuführen und, nachdem

solches geschehen, die Grössen $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots . a_m$ bezüglich durch $0 , b_1 , b_2 , \ldots . b_{m-1}$ zu ersetzen.

Dieses Alles ausgeführt, gelangt man zu folgender linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(II.)\quad \left\{\begin{array}{l} S'_{h+1}\frac{d\varphi}{db_1}+\left(S'_{h+2}+\frac{2}{m}b_1 S'_h\right)\frac{d\varphi}{db_2}+\left(S'_{h+3}+b_1 S'_{h+1}+\frac{3}{m}b_2 S'_h\right)\frac{d\varphi}{db_3} \\ \qquad +\left(S'_{h+4}+b_1 S'_{h+2}+b_2 S'_{h+1}+\frac{4}{m}b_1 S'_h\right)\frac{d\varphi}{db_4}+\ldots\ldots\ldots \\ +\left(S'_{h+m-1}+b_1 S'_{h+m-3}+\ldots . b_{m-3} S'_{h+1}+\frac{m-1}{m}b_{m-2}S'_h\right)\frac{d\varphi}{db_{m-1}} \\ \qquad =\frac{1}{m}S'_h-\varphi^h , \end{array}\right.$$

wo unter S'_λ der Werth von S_λ zu verstehen ist, wenn man $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots . a_m$ beziehlich durch $0, b_1 , b_2 , \ldots . b_{m-1}$ ersetzt.

Der kleinste Werth von m ist hier noch immer 2; die Zahl h ist hier nur angebbarer ganzer Werthe fähig, weil bei der Annahme $h = 0$ die eben gefundene partielle Differentialgleichung in die Identität $0 = 0$ übergeht.

6.

Erwägt man, dass gegenwärtig folgende Gleichungen bestehen:

$$S'_0 = m \quad , \quad S'_1 = 0 \quad , \quad S'_2 + 2b_2 = 0 \quad , \quad S'_3 + 3b_2 = 0 ,$$

so wie, dass für alle Werthe von $r = 4$ bis $r = m$ folgende Gleichung Statt findet:

$$S'_r + b_1 S'_{r-2} + b_2 S'_{r-3} + \ldots . b_{r-3} S'_2 + r b_{r-1} = 0 ,$$

so zeigt sich, dass die allgemeine partielle Differentialgleichung (II) für $h = 0$ in folgende übergeht:

$$(18.)\quad 2b_1\frac{d\varphi}{db_1}+3b_2\frac{d\varphi}{db_2}+4b_3\frac{d\varphi}{db_3}+\ldots . . m b_{m-1}\frac{d\varphi}{db_{m-1}}=\varphi$$

Diese lineare partielle Differentialgleichung integrirt, giebt

$$(19.)\quad \varphi = \sqrt{b_1}.\varphi'(c_1 , c_2 , c_3 , \ldots . . c_{m-2}) ,$$

wo φ' eine auf die Grössen c_1 , c_2 , ... c_{m-2} sich beziehende willkürliche Function ist, die wir in der Folge einfach durch φ' andeuten werden. Für die neu eingeführten Grössen c_1 , c_2 , ... c_{m-2} hat man, wenn k einen der Werthe 1 , 2 , 3 , ... $m-2$ vorstellt, die allgemeine Gleichung

$$c_k = \frac{b_{k+1}^2}{b_1^{k+2}} . \tag{20.}$$

Dieses Ergebniss (19) führt die Eingangs (Nr. 2) angeregte Frage um einen neuen Schritt der Erledigung zu. Mittels desselben geht nämlich die Gleichung (16) in folgende über:

$$x_1 = -\frac{a_1}{m} + \sqrt{b_1}.\varphi'(c_1 , c_2 , c_3 , ... c_{m-2}) , \tag{16'.}$$

aus welcher folgt, dass die Bestimmung von x_1 nur noch von der Ermittelung einer Function φ' abhangt, die lediglich noch die $m-2$ Argumente c_1 , c_2 , ... c_{m-2} enthält.

Anmerkung. In dem besondern Falle $m = 2$, stellt die hier eingeführte Function φ' nur noch eine Zahlenconstante vor; d. h. wenn x_1 eine Wurzel der Gleichung zweiten Grades $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ ist, so hat man nach (16):

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}a_1 + c\sqrt{b_1} = -\tfrac{1}{2}a_1 + c\sqrt{(a_2 - \tfrac{1}{4}a_1^2)} ;$$

wo c die besagte Zahlenconstante ist. Führt man diesen Ausdruck der Wurzel in die Gleichung zweiten Grades ein, so gelangt man zu $c^2 + 1 = 0$; und wenn diese Gleichung aufgelöset und das Ergebniss von c in den vorigen Werth von x_1 eingeführt wird, so gelangt man auf die bekannten Wurzelformen einer Gleichung zweiten Grades.

7.

Nach der unmittelbar vorhin gemachten Bemerkung dürfen wir nunmehr die Annahme $m = 2$ ausschliessen; so dass in der noch übrigen Umbildung der partiellen Differentialgleichung (II) der kleinste Zahlenwerth von m gleich 3 ist.

Zu dieser Umbildung, die zur Bestimmung von φ' abermals eine lineare partielle Differentialgleichung geben wird, entnehmen wir aus (19) die partiellen Differentialquotienten von φ nach b_1 , b_2 , ... b_{m-1}; was auf folgende Gleichungen führt:

$$(21.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{db_1} = \dfrac{1}{\sqrt{b_1}}\left[\dfrac{1}{2}\varphi - 3c_1\dfrac{d\varphi'}{dc_1} - 4c_2\dfrac{d\varphi'}{dc_2} \ldots\ldots - mc_{m-2}\dfrac{d\varphi'}{dc_{m-2}}\right] \\ \dfrac{d\varphi}{db_k} = 2\sqrt{\dfrac{c_{k-1}}{b^1}}\cdot\dfrac{d\varphi'}{dc_{k-1}} \quad ; \end{cases}$$

wo k die Zahlen $2, 3, 4, \ldots\ldots m-1$ sein kann.

Führt man diese Bestimmungen, wie die von φ aus (19), in (II) ein, so gelangt man zu einer Bestimmungsgleichung der Function φ'. Diese hangt lediglich von den neu eingeführten Argumenten $c_1, c_2, \ldots c_{m-2}$ ab; also darf die in der besagten Bestimmungsgleichung explicite noch vorkommende Grösse b_1 durch jeden constanten Zahlenwerth, im vorliegenden Fall am bequemsten durch die reelle positive Einheit, ersetzt werden. Diesemnach wird man statt $\frac{d\varphi}{db_1}$ den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\varphi' - 3c_1\frac{d\varphi'}{dc_1} - 4c_2\frac{d\varphi'}{dc_2} \ldots\ldots mc_{m-2}\frac{d\varphi'}{dc_{m-2}},$$

zu setzen und darauf

$$\frac{d\varphi}{db_k} \text{ durch } 2\sqrt{c_{k-1}}\frac{d\varphi'}{dc_{k-1}}, \text{ (von } k = 2 \text{ bis } k = m-1)$$

und die Argumente $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots b_{m-1}$ beziehlich durch $1, \sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \ldots\sqrt{c_{m-2}}$ zu ersetzen haben.

Nimmt man alle diese Aenderungen mit der partiellen Differentialgleichung (II) vor, so gelangt man, zur Bestimmung von φ', auf folgende lineare partielle Differentialgleichung:

$$(III.)\quad A_1\sqrt{c_1}\frac{d\varphi'}{dc_1} + A_2\sqrt{c_2}\frac{d\varphi'}{dc_2} + A_3\sqrt{c_2}\frac{d\varphi'}{dc_3} + \ldots\ldots A_{m-2}\sqrt{c_{m-2}}\frac{d\varphi'}{dc_{m-2}}$$

$$= \frac{1}{2m}S''_h - \frac{1}{4}S''_h + 1^{\varphi'} - \frac{1}{2}\varphi''^h \quad ;$$

wo zur Vereinfachung der Darstellung die Gleichungen

$$A_1 = S''_{h+2} - \frac{3}{2}\sqrt{c_1}S''_{h+1} + \frac{2}{m}S''_h,$$

$$A_2 = S''_{h+3} + (1 - 2\sqrt{c_2})S''_{h+1} + \frac{3}{m}\sqrt{c_1}S''_h$$

festgestellt worden sind. Für alle ganzen Werthe, von $k = 3$ bis $k = m-2$, besteht folgende Gleichung:

$$A_k = S''_{h+k+1} + S''_{h+k-1} + \sqrt{c_1}.S''_{h+k-2} + \ldots\ldots$$

$$\sqrt{c_{k-3}}.S''_{h+2} + (\sqrt{c_{k-2}} - \tfrac{1}{2}(k+2)\sqrt{c_k})\,S''_{h+1} + \frac{k+1}{m}\sqrt{c_{k-1}}.S''_h.$$

In allen diesen Gleichungen stellt S''_λ den Werth von S'_λ vor, wenn in diesem die Argumente $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots b_{m-1}$ bezüglich durch $1, \sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \ldots\ldots \sqrt{c_{m-2}}$ ersetzt werden. Der kleinste Werth der hier auftretenden ganzen Zahl m ist 3; die Zahl h endlich kann, mit Ausnahme des Nullwerths, so wie der positiven Einheit, für welche Werthe die Gleichung (III) auf Identitäten führt, alle übrigen ganzen Zahlenwerthe haben. Schliesslich bemerke ich noch, dass da, wo man bei einer speciellen Verfügung über m oder h auf c_0 geführt wird, dieses durch die reelle positive Einheit, so wie jedes c_{-k} durch die Null zu ersetzen ist.

Anmerkung. Die partielle Differentialgleichung (III) ist es, auf die ich bis jetzt gelangen konnte; ihre Integration erfordert, wie bekannt, die vollständige Integration eines Systems von $m - 2$ simultanen gemeinen Differentialgleichungen; welches Endziel ich jedoch bis jetzt vergebens anstrebte.

Zürich, am 2. Decbr. 1850.

10.
Ueber den gegenseitigen Zusammenhang einiger Functionen.

(Von Herrn Dr. *Raabe*, Prof. an der Universität zu Zürich.)

(Aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Zürich.)

1.

Die Integralrechnung, die Quelle neuer Functionen, giebt auch die Hülfsmittel ihrer nähern Erforschung und zeigt die Wege zur Kenntniss ihrer gegenseitigen Beziehungen. Ein kleines Beispiel davon wird die vorliegende Mittheilung geben, wo folgende drei Functionen von z:

$$(1.)\quad \varphi(z) = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{z^2}{1.3} + \frac{1}{7}\cdot\frac{z^3}{1.3.5} + \frac{1}{9}\cdot\frac{z^4}{1.3.5.7} + \ldots\ldots,$$

$$(2.)\quad \psi(z) = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{z^2}{2.4} - \frac{1}{7}\cdot\frac{z^3}{2.4.6} + \frac{1}{9}\cdot\frac{z^4}{2.4.6.8} - \ldots\ldots,$$

$$(3.)\quad f(z) = 1 + \left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{z}{1.2} + \left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{z^2}{1.2.3} + \left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\frac{z^3}{1.2.3.4} + \ldots,$$

in denen die Reihen rechts für alle Werthe von z convergent sind, in gegenseitige Beziehungen werden gebracht werden.

I. Für jeden positiven Werth von α ist

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(1+\alpha x^2)y}\,dy\right) e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(1+\alpha y)x^2}\,dx\right) e^{-y}\,dy,$$

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Vollzieht man die in den Klammern enthaltenen Quadraturen, so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{1+\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{(1+\alpha y)}}\,dy\,.$$

Ersetzt man x durch $x\sqrt{a}$, $1+\alpha y$ durch y, und α durch $\frac{1}{a}$ so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}e^a\sqrt{a\pi}\int_1^\infty \frac{e^{-ay}}{\sqrt{y}}dy\,;$$

wo nunmehr a reell und positiv sein soll.

Nun ist nach Nr. 200 meiner Integralrechnung:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay}}{\sqrt{y}}dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} - 2\psi(2a);$$

und eben so habe ich in Nr. 16 der Züricher Mittheilungen:

$$(4.)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x^2}dx = \tfrac{1}{2}\pi e^a - e^{\frac{1}{4}a}\sqrt{\pi}\sqrt{(af(a))}$$

gefunden; daher findet die Gleichheit

$$(5.)\quad \psi(2z) = e^{-\frac{1}{4}z}\sqrt{f(z)}\,,\quad \text{oder}\quad \psi(2z)^2 = e^{-z}f(z)$$

Statt; welche eine der angekündigten Beziehungen ausdrückt.

II. Auf eine zweite Beziehung führt folgender Ausdruck:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}\mathrm{Cos}\,xy\,dy\right)\frac{dx}{1+\beta x^2} = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\,xy}{1+\beta x^2}dx\right)e^{-\alpha y^2}dy\,,$$

wo α und β reelle positive Constanten sind. Vollzieht man die bestimmten Integrationen innerhalb der Parenthesen nach (Nr. 162 und 164) meiner Integralrechnung, so gelangt man zu der Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}}{1+\beta x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\int_0^\infty e^{-\left(\alpha y^2+\frac{1}{\sqrt{\beta}}y\right)}dy,$$

die, wenn β durch $\frac{1}{\beta^2}$ ersetzt wird, in folgende übergeht:

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha y^2+\beta y)}dy = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}}{\beta^2+x^2}dx\,,$$

in welcher β reell, α aber reell und positiv ist.

Ersetzt man die Integrationsvariable y durch $\gamma - \gamma$, nimmt dann $\alpha = a$, $\beta = b + 2ac$, $\gamma = c$ an, und ersetzt hierauf die Integrationsvariable x durch $(b+2ac)x$, so hat man auch:

$$\int_c^\infty e^{-(ay^2+by)}\,dy = \frac{e^{-(bc+ac^2)}}{\sqrt{(a\pi)}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(b+2ac)^2x^2}{4a}}}{1+x^2}\,dx\ ,$$

wo b und c reell sind, a aber ausserdem noch positiv sein muss. Berücksichtiget man die oben in (4 und 5) aufgestellten Ergebnisse, so geht die Gleichung in folgende über:

$$(6.)\quad \int_c^\infty e^{-(ay^2+by)}\,dy = e^{\frac{b^2}{4a}}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} - \frac{b+2ae}{2a}\psi\left(\frac{(b+2ac)^2}{2a}\right)\right],$$

aus welcher auch leicht folgende gefunden wird:

$$(7.)\quad \int_0^c e^{-(ay^2+by)}\,dy = \frac{e^{\frac{b^2}{4a}}}{2a}\left[(b+2ac)\psi\left(\frac{(b+2ac)^2}{2a}\right) - b\psi\left(\frac{b^2}{2a}\right)\right],$$

wo, wie oben, b und c reell, a aber auch noch positiv sein muss.

Um nun zu der angekündigten zweiten Beziehung zu gelangen, vollziehe man das bestimmte Integral links in der letztern Gleichung, unter der Annahme $c = \infty$, indem man den Factor e^{-by} in eine nach aufsteigenden Potenzen von y geordnete Reihe auflöset. Werden hiebei folgende Hülfsgleichungen zugezogen:

$$\frac{b^{2p}}{1.2.3.4.....2p}\int_0^\infty e^{-ay^2}y^{2p}\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2.3.4.....p}\cdot\left(\frac{b^2}{4a}\right)^p\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\text{und}\quad \int_0^\infty e^{-ay}y^p\,dy = 1.2.3.4....p\cdot\frac{1}{a^{p+1}}\ ,$$

so gelangt man leicht zu:

$$(7'.)\quad \int_0^\infty e^{-(ay^2+by)}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}} - \frac{1}{2}\frac{b}{a}\varphi\left(\frac{b^2}{2a}\right).$$

Das Ergebniss in (6) führt aber, $c = 0$ gesetzt, zu:

$$(6'.)\quad \int_0^\infty e^{-(ay^2+by)}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}} - \frac{b}{2a}\,e^{\frac{b^2}{4a}}\psi\left(\frac{b^2}{2a}\right);$$

und so gelangt man durch die Annahme $\frac{b^2}{4a} = z$ zu folgender zweiten Beziehung:

$$(8.) \qquad e^z \psi(2z) = \varphi(2z) .$$

Stellt man dieses Ergebniss mit dem in (5) dargestellten zusammen, so ergeben sich für die drei aufgestellten Functionen folgende gegenseitige Beziehungen:

$$(A.) \qquad \varphi(z)^2 = e^{\frac{1}{2}z} f(\tfrac{1}{2}z) \quad , \quad \psi(z)^2 = e^{-\frac{1}{2}z} f(\tfrac{1}{2}z) ,$$

die mit den folgenden zugleich bestehen:

$$(B.) \quad \varphi(z) = e^{\frac{1}{4}z} \sqrt{f(\tfrac{1}{2}z)} \quad , \quad \psi(z) = e^{-\frac{1}{4}z} \sqrt{f(\tfrac{1}{2}z)} \quad , \quad \varphi(z)\psi(z) = f(\tfrac{1}{2}z) ,$$

wo in den beiden erstern die zweite Radix nur die positive Bedeutung hat.

2.

Wir gehen nun von einem allgemeineren Doppel-Integrale als dem in (1) voriger Nr. aus, nämlich von folgendem:

$$\int_0^\beta \left(\int_0^\infty e^{-(1+\alpha x^2)y} dy \right) e^{-x^2} dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\beta e^{-(1+\alpha y)x^2} dx \right) e^{-y} dy ,$$

wo β reell, α aber reell und positiv ist.

Berücksichtiget man eines der Ergebnisse der in der vorigen Nr. citirten Mittheilung (16), so hat man den Ausdruck

$$\int_0^\beta e^{-(1+\alpha y)x^2} dx = \beta e^{-\frac{1}{2}(1+\alpha y)\beta^2} \sqrt{\{f[(1+\alpha y)\beta^2]\}} ,$$

welcher, beachtend die zweite der Gleichheiten (B) in voriger Nr., mit folgendem gleichbedeutend ist:

$$\int_2^\beta e^{-(1+\alpha y)x^2} dx = \beta \psi(2\beta^2(1+\alpha y)).$$

Diesemnach geht die hier vorgelelegte Gleichung in folgende über:

$$\int_0^\beta \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1+\alpha x^2}} dx = \int^\infty \psi(2\beta^2(1+\alpha y)) e^{-y} dy ,$$

welche, wenn α durch α^2 ersetzt wird, weiter folgende giebt:

$$\int_0^{\beta} \frac{e^{-x^2}}{1+\alpha^2 x^2}\, dx = \beta \int_0^{\infty} \psi(2\beta^2(1+\alpha^2 y))\, e^{-y}\, dy\ ,$$

wo α und β reelle Grössen sind.

Ersetzt man in dem bestimmten Integrale links x durch $\frac{x}{\alpha}$, so wie dann in dem ganzen Ausdruck α durch $\frac{1}{a}$ und β durch b, so gelangt man zu:

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{e^{-a^2x^2}}{1+x^2}\, dx = \frac{b}{a} \int_0^{\infty} \psi\left[2b^2\left(1+\frac{y}{a^2}\right)\right] e^{-y} dy,$$

was durch gegenseitige Vertauschung von a und b auch Folgendes giebt:

$$\int_0^{\frac{a}{b}} \frac{e^{-b^2x^2}}{1+x^2}\, dx = \frac{a}{b} \int_0^{\infty} \psi\left[2a^2\left(1+\frac{y}{b^2}\right)\right] e^{-y} dy.$$

Nach der Gleichung (12) der oben erwähnten Mittheilung ist aber:

$$e^{-a^2} \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{e^{-a^2x^2}}{1+x^2}\, dx + e^{-b^2} \int_0^{\frac{a}{b}} \frac{e^{-b^2x^2}}{1+x^3}\, dx = \tfrac{1}{2}\pi - 2 \int_0^{a} e^{-x^2} dx . \int_0^{b} e^{-x^2} dx\ ;$$

so wie nach der Gleichung (8′) derselben Mittheilung:

$$\int_0^{a} e^{-x^2} dx . \int_0^{b} e^{-x^2} dx = ab\, e^{-\frac{1}{2}(a^2+b^2)} \sqrt{[f(a^2) f(b^2)]}\ ;$$

oder auch, beachtend die zweite der Gleichheiten (B) in der vorigen Nr.:

$$\int_0^{a} e^{-x^2} dx . \int_0^{b} e^{-x^2} dx = ab\psi(2a^2)\psi(2b^2)\ .$$

Daher führen die vorhin aufgestellten zwei Gleichheiten zu folgender:

$$\frac{a}{b} e^{-b^2} \int_0^{\infty} \psi\left[2a^2\left(1+\frac{y}{b^2}\right)\right] e^{-y} dy + \frac{b}{a} e^{-a^2} \int_0^{\infty} \psi\left[2b^2\left(1+\frac{y}{a^2}\right)\right] e^{-y} dy$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi - 2ab\psi(2a^2)\psi(2b^2)\ .$$

Wird noch im erstern dieser zwei bestimmten Integrale die Integrationsvariable y durch $b^2(x-1)$, und im zweiten dureh $a^2(x-1)$ ersetzt, so gelangt man zu:

$$\int_1^\infty \psi(2a^2x)e^{-b^2x}\,dx + \int_1^\infty \psi(2b^2x)e^{-a^2x}\,dx = \frac{\pi}{2ab} - 2\psi(2a^2)\psi(2b^2)\,,$$

oder auch zu

$$\int_1^\infty \psi(2ax)e^{-bx}\,dx + \int_1^\infty \psi(2bx)e^{-ax}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} - 2\psi(2a)\psi(2b)\,;$$

wo a und b angebbare, reelle und positive Grössen sind.

Geht hier die Integrationsvariable x in $\frac{x}{c}$ über, und ersetzt man hierauf a durch ca, so wie b durch cb, so gelangt man zu:

$$\int_c^\infty \psi(2ax)e^{-bx}\,dx + \int_c^\infty \psi(2bx)e^{-ax}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} - 2c\psi(2ca)\psi(2cb)\,;$$

wo c alle, nicht negative, reelle Werthe haben kann.

Wird hier c immer kleiner und kleiner angenommen, so wird auch der Subtrahendus rechts vom Gleichheitszeichen immerfort kleiner, so dass man zuletzt zu folgendem Resultat gelangt:

$$(9.)\quad \int_0^\infty \psi(2ax)e^{-bx}\,dx + \int_0^\infty \psi(2bx)e^{-ax}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}\,.$$

Subtrahirt man von diesem das vorige Ergebniss, so erhält man:

$$(10.)\quad \int_0^c \psi(2ax)e^{-bx}\,dx + \int_0^c \psi(2bx)e^{-ax}\,dx = 2c\psi(2ca)\psi(2cb)\,;$$

wo a, b und e reelle positive Grössen sind.

Nimmt man die beiden erstern Gleichheiten in (B) zu Hülfe, welche $\psi(z) = e^{-\frac{1}{2}z}\varphi(z)$ geben, so hat man auch:

$$(9'.)\quad \int_0^\infty [\varphi(2ax) + \varphi(2bx)]e^{-(a+b)x}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}\,,$$

$$(10'.)\quad \int_0^c [\varphi(2ax) + \varphi(2bx)]e^{-(a+b)x}\,dx = 2ce^{-(a+b)c}\varphi(2ca)\varphi(2cb);$$

was für dieselben Werthe von a, b, c wie die obigen bestehet.

3.

Aus den zuletzt erlangten Ergebnissen lassen sich leicht Differentialgleichungen erster Ordnung für jede der hier vorgelegten Functionen herleiten. Wird in der Gleichheit (10) $a = b = \frac{1}{2}$ angenommen, so erhält man:

$$\int_0^c \psi(x)\, e^{-\frac{1}{2}x} \cdot dx = c\,\psi(c)^2.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck nach der allgemeinen Constante c, so gelangt man unmittelbar zu

$$\psi(c)\, e^{-\frac{1}{2}c} = \psi(c)^2 + 2c\,\psi(c)\,\psi_1(c).$$

Ersetzt man c durch z, so erhält man

$$\psi(z) + 2z\,\psi_1(z) = e^{-\frac{1}{2}z}; \tag{11.}$$

welches eine der angekündigten Differentialgleichungen und wo in gewohnter Weise der Differentialquotient von $\psi(z)$ nach z durch $\psi_1(z)$ ausgedrückt ist.

Wie Ausgangs der vorigen Nr. gezeigt, hat man:

$$\psi(z) = e^{-\frac{1}{2}z}\varphi(z);$$

demnach ist auch:

$$\psi_1(z) = -\tfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z}\varphi(z) + e^{-\frac{1}{2}z}\varphi_1(z).$$

Führt man diese Bestimmungen in die aufgestellte Differentialgleichung (11) ein, so gelangt man zu folgender zweiten Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\varphi(z) + 2z\varphi_1(z) = 1 + z\varphi(z), \tag{11'.}$$

welche der Function $\varphi(z)$ angehört, und die man auch direct aus der Gleichheit (10') der vorigen Nr. hätte entnehmen können.

Endlich findet man aus diesen, mit Hülfe der einen oder andern der beiden erstern Gleichheiten in (B), folgende Differentialgleichung erster Ordnung für die Function $f(z)$:

$$(1-z)f(z) + zf_1(z) = e^{-\frac{1}{2}z}V[f(z)],$$

die auch in folgender Weise ausgedrückt werden kann:

$$\frac{d(zf(z))}{dz} - zf(z) = e^{-\frac{1}{2}z}Vf(z).$$

Oder, wenn $zf(z) = f'(z)$ gesetzt wird, so hat man die Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(11'.) \qquad f'_1(z) - f'(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{\sqrt{z}} \sqrt{f'(z)}.$$

Führt man noch rechts die Function ψ ein, so nimmt sie folgende noch einfachere Form an:

$$f_1'(z) - f'(z) = \psi(2z).$$

4.

Wir geben noch ein Paar Summationen, die sich als Verificationen einiger der bisher gewonnenen Ergebnisse ansehen lassen.

Aus den Begriffsgleichungen (1 und 2) erhält man leicht folgende:

$$\psi(2ax)e^{-bx} + \psi(2bx)e^{-ax} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{1.2.3.....k} \cdot \frac{x^k}{2k+1} \cdot (a^k e^{-bx} + b^k e^{-ax}),$$

$$[\varphi(2ax) + \varphi(2bx)]\, e^{-(a+b)x} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(2a)^k + (2b)^k}{1.3.5.7 ..... (2k+1)} \cdot x^k e^{-(a+b)x}.$$

Multiplicirt man dieselben mit dx und integrirt sie hierauf von $x = 0$ bis $x = \infty$, so gelangt man, mit Zuziehung der Ergebnisse in (9) und (9') der zweitvorhergehenden Nr., zu:

$$(12.) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\pi = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} + \left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} \right], \\ \frac{\pi}{2\sqrt{(ab)}} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)_k} \cdot \frac{a^k + b^k}{(a+b)^{k+1}}; \end{cases}$$

wo $\left(-\frac{1}{2}\right)_k$ der Coefficient von y^k in der Entwickelung des Binoms $(1+y)^{-\frac{1}{2}}$ ist.

Die ohne Ende fortlaufende Reihe in der erstern dieser zwei Gleichungen ist nur für $a = b$ convergent. Diese Annahme führt auf die bekannte *Leibnitz*'sche Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + ...$$

Die Reihe in der zweiten obigen Gleichung convergirt zwar für alle positiven reellen Werthe von a und b gegen einen endlichen Grenzwerth, der Minimumwerth jedoch des Bruchs

$$\frac{a^k + b^k}{(a+b)^k}$$

findet sich für $a = b$. Daher hat man für diese Annahme:

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \ldots\ldots;$$

wo die Reihe schneller als eine geometrische Progression mit dem beständigen Quotienten $\frac{1}{2}$ abnimmt.

5.

Die unendlichen Reihen, durch welche wir in Nr. 1 die Functionen $\varphi(z)$, $\psi(z)$ und $f(z)$ definirt haben, convergiren für alle gedenkbaren Werthe von z gegen endliche Grenzwerthe. Daher finden die gegenseitigen Beziehungen dieser Functionen nicht bloss für relle, sondern auch für imaginäre Werthe von z Statt. Diese Bemerkung wollen wir benutzen, um einige neue Functionen und ihre gegenseitigen Beziehungen zu finden, welche sich in ihren Folgen auch auf die in No. 1 vorgelegten Functionen von Einfluss zeigen werden.

Ist i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$, und setzt man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi(zi) &= \Phi(z) + i\Phi'(z), \\ \psi(zi) &= \Psi(z) - i\Psi'(z), \\ f(zi) &= F(z) + iF'(z), \end{aligned} \qquad (13.)$$

wo der Kürze wegen die Gleichungen

$$\Phi(z) = 1 - \frac{z^2}{1.3.5} + \frac{z^4}{1.3.5.7.9} + \frac{z^6}{1.3.5.7.9.11.13} + \ldots\ldots,$$

$$\Phi'(z) = \frac{z}{1.3} - \frac{z^3}{1.3.5.7} + \frac{z^5}{1.3.5.7.9.11} - \ldots\ldots,$$

$$\Psi(z) = 1 - \frac{z^2}{2.4.5} + \frac{z^4}{2.4.6.8.9} - \frac{z^6}{2.4.6.8.10.12.13} + \ldots\ldots,$$

$$\Psi'(z) = \frac{z}{2.3} - \frac{z^3}{2.4.6.7} + \frac{z^5}{2.4.6.8.10.11} - \ldots\ldots,$$

$$F(z) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{z^2}{1.2.3} + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right)\frac{z^4}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots,$$

$$F'(z) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\frac{z}{1.2} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)\frac{z^3}{1.2.3.4} + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right)\frac{z^5}{1.2.3.4.5.6} - \ldots$$

festgesetzt sind, so lassen sich unter den neu eingeführten Functionen $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$, $\Psi(z)$..... manche bemerkenswerthe Beziehungen angeben.

Aus den beiden erstern Gleichheiten (B) folgt $\varphi(z) = e^{\frac{1}{2}z}\psi(z)$. Geht hier z in zi über, so gelangt man, mit Beachtung der Gleichungen (13), zu:

$$(14.) \quad \begin{cases} \Phi(z) = \Psi(z)\cos\frac{1}{2}z + \Psi'(z)\sin\frac{1}{2}z\,, \\ \Phi'(z) = \Psi(z)\sin\frac{1}{2}z - \Psi'(z)\cos\frac{1}{2}z\,; \end{cases}$$

aus welchen Gleichheiten sehr bald folgende gefunden wird:

$$\Phi(z)^2 + \Phi'(z)^2 = \Psi(z)^2 + \Psi'(z)^2.$$

Jeder dieser Ausdrücke, rechts oder links vom Gleichheitszeichen, lässt sich leicht durch eine ohne Ende fortlaufende convergente Reihe darstellen. Wird nämlich in der Gleichheit (11 Nr. 3) die Variable z durch zi ersetzt, so gelangt man zu folgenden zwei Differentialgleichungen:

$$(15.) \qquad \Psi(z) + 2z\Psi_1(z) = \cos\tfrac{1}{2}z \quad , \quad \Psi'(z) + 2z\Psi'_1(z) = \sin\tfrac{1}{2}z;$$

wo der unten beigesetzte Zeiger den ersten Differentialquotienten der betreffenden Function nach z andeutet.

Multiplicirt man die erste dieser Differentialgleichungen mit $\Psi(z)$, die zweite mit $\Psi'(z)$ und stellt hierauf ihre Summe her, so gelangt man, wenn eine neue Function $\lambda(z)$ durch die Gleichung

$$\lambda(z) = \Psi(z)^2 + \Psi'(z)^2$$

eingeführt wird, auf die Differentialgleichung

$$\lambda(z) + z\lambda_1(z) = \Phi(z),$$

die durch Integration zu

$$z\lambda(z) = A + \int \Phi(z)\,dz$$

führt, wo A die Integrationsconstante ist. Beachtet man die Bedeutung von $\Phi(z)$, und vollzieht die Quadratur rechts, so erhält man:

$$z\lambda(z) = A + z - \frac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{1.3.5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{z^5}{1.3.5.7.9} - \frac{1}{7}\cdot\frac{z^7}{1.3.5.7.9.11.13} + \ldots\ldots$$

Wird hier $z = 0$ gesetzt, so ergiebt sich $A = 0$. Demnach hat man, wenn

$$(16.) \qquad \lambda(z) = \Psi(z)^2 + \Psi'(z)^2 = \Phi(z)^2 + \Phi'(z)^2$$

gesetzt wird, folgende oben angekündigte Bestimmung von $\lambda(z)$:

$$(17.)\quad \lambda(z) = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{z^2}{1.3.5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{z^4}{1.3.5.7.9} - \frac{1}{7}\cdot\frac{z^6}{1.3.5.7.9.11.13} + \ldots\ldots$$

Durch dieselbe, so eben eingeführte Function $\lambda(z)$ kann auch die Summe der Quadrate von $F(z)$ und $F'(z)$ dargestellt werden. Erwägt man nämlich, dass die Gleichheiten in (13) auch dann noch bestehen, wenn i durch $-i$ ersetzt wird, so gelangt man zu folgenden Gleichheiten:

$$(18.)\quad \varphi(zi)\varphi(-zi) = \lambda(z)\ , \qquad \psi(zi)\psi(-zi) = \lambda(z)\ ,$$

$$(19.)\qquad f(zi)f(-zi) = F(z)^2) + F'(z)^2;$$

Aus dem dritten Zusammenhang in (*B.* Nr. 1.) folgt auch:

$$\varphi(zi)\psi(zi) = f(\tfrac{1}{2}zi)\ ,\ \varphi(-zi)\psi(-zi) = f(-\tfrac{1}{2}zi);$$

daher geben die unmittelbar vorhergehenden Gleichheiten folgende Gleichung:

$$(20.)\qquad F(z)^2 + F'(z)^2 = \lambda(2z)^2\ ;$$

welches die angekündigte ist, und vermöge welcher die Gleichung (19) auch folgende Form annimmt:

$$(19'.)\qquad f(zi)f(-zi) = \lambda(2z)^2.$$

Ersetzt man wieder in den Gleichheiten (18. und 19'.) z durch zi, so hat man zunächst:

$$\varphi(z)\varphi(-z) = \lambda(zi(\quad,\quad \psi(z)\psi(-z) = \lambda(zi)\ ,$$

$$f(z)f(-z) = \lambda(2zi)^2\ ,$$

und vermöge der Begriffsgleichung (17) der Function $\lambda(z)$, wenn

$$(21.)\quad \mu(z) = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{z^2}{1.3.5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{z^4}{1.3.5.7.9} + \frac{1}{7}\cdot\frac{z^6}{1.3.5.7.9.11.13} + \ldots\ldots$$

gesetzt wird, folgende neue Beziehungen der im Eingange vorgelegten drei Functionen:

$$(C.)\quad \begin{cases} \varphi(z)\varphi(-z) = \mu(z), \quad \psi(z)\psi(-z) = \mu(z), \\ f(z)f(-z) = \mu(2z)^2; \end{cases}$$

wo die durch $\lambda(z)$ und $\mu(z)$ ausgedrückten Functionen folgende einfache gegenseitige Beziehungen haben:

$$\text{(D.)}\quad \begin{cases} \mu(z) = \lambda(zi)\,, \quad \text{oder auch} \quad \lambda(z) = \mu(zi)\,, \\ \text{und in Folge dieser auch:} \\ \mu(-z) = \mu(z)\,, \ \text{wie} \ \ \lambda(-z = \lambda(z). \end{cases}$$

6.

Ich schliesse diese Mittheilung mit der Bemerkung, dass die Werthungen einiger im Obigen mitgetheilten bestimmten Integrale nicht nur für reelle Werthe der in denselben vorkommenden allgemeinen Constanten, sondern auch für imaginäre Werthe derselben Statt finden.

Wir wollen Dies gegenwärtig bei der Gleichung (7′) und mithin auch bei der ihr gleichbedeutenden (6′.) in Nr. 1. zeigen, indem wir nämlich das Bestandhaben derselben auch bei der Annahme bi statt b (wo i die imaginäre Einheit, nämlich $\sqrt{-1}$ ist) nachweisen.

Ersetzt man in der That b durch bi, so geht (7′) in

$$\int_0^\infty e^{-ay}(\mathrm{Cos}\, by - i\mathrm{Sin}\, by)\,dy = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b}{4a}} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\,\varphi\left(-\frac{b^2}{2a}\right),$$

über, woraus

$$\text{(22.)}\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-ay^2}\,\mathrm{Cos}\, by\,dy = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-ay^2}\,\mathrm{Sin}\, by\,dy = \frac{b}{2a}\,\varphi\left(-\frac{b^2}{2a}\right) \end{cases}$$

folgt; welche zwei Ergebnisse vollkommen richtig sind; wie es aus der Gleichung (71.) in No. 162 und der Gleichung (10.) in Nr. 197 meiner Integralrechnung zu sehen ist, allwo besagte zwei Integralbestimmungen direct gefunden werden.

Diesemnach findet jede der folgenden, unter einander gleichbedeutenden Gleichungen

$$\text{(23.)}\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-(ay^2+by)}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}} - \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\,\varphi\left(\frac{b^2}{2a}\right), \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-(ay^2+by)}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}} - \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\,e^{\frac{b^2}{4a}}\,\psi\left(\frac{b^2}{2a}\right), \end{cases}$$

für jedes reelle positive a Statt, so wie für jedes reelle und noch rein imaginäre b.

Zürich, 1853.

11.

Independente Berechnung der *Sturm*'schen Reste.

(Von Herrn Dr. phil. *Heilermann* zu Trier.)

§. 1.

In einer frühern Abhandlung (Bd. 43) habe ich ein recurrirendes Verfahren angegeben für die Herleitung der Reste, welche zur Auflösung einer numerischen Gleichung durch Anwendung des *Sturm*'schen Satzes nöthig sind. Hier will ich auseinandersetzen, wie *unmittelbar* jeder Coefficient jedes Restes aus den Coefficienten der zu Grunde gelegten Gleichung zusammengesetzt ist.

Ich gehe von der allgemeinern Aufgabe aus, den Quotienten

$$\frac{\sum_0^{n-1} c_{a|1}\, x^{n-a-1}}{\sum_0^{n} c_{a|0}\, x^{n-a}} = \frac{c_{0|1}\, x^{n-1} + c_{1|1}\, x^{n-1} + \ldots\ldots + c_{n-1|1}}{c_{0|0}\, x^{n} + c_{1|0}\, x^{n-1} + \ldots\ldots + c_{n+1|0}\, x + c_{n|0}}$$

in einen *Kettenbruch* zu verwandeln, und entwickle zuerst einen Kettenbruch von der Form:

$$p : (x + p_1 : (1 + p_2 : (x + p_3 : (1 + \ldots\ldots + p_{2n-2} : (x + p_{2n-1} : 1)),$$

in welcher die Theilnenner abwechselnd x und 1 sind. Die Coefficienten der Reste, welche durch die Entwicklung entstehen, sollen in Uebereinstimmung mit den Coefficienten des gegebenen Quotienten durch $c_{r|s}$ bezeichnet werden; und zwar so, dass der zweite Zeiger s den Rest andeutet, in welchem der Coefficient $c_{r|s}$ vorkommt, der erste Zeiger r aber die Stelle wo $c_{r|s}$ steht. Als allgemeine Recursionsformel uud als Ausgangspunct für die nachfolgenden Entwicklungen benutze ich folgende Gleichung:

$$(1.) \qquad c_{r|s} = c_{0|s-1}\, c_{r+1|s-2} - c_{0|s-2}\, c_{r+1|s-1}\,.$$

Zunächst ist

$$\sum_0^{n-1} c_{\alpha|1}\, x^{n-\alpha-1} : \sum_0^{n} c_{\alpha|0}\, x^{n-\alpha} = \frac{c_{0|1}}{c_{0|0}} : \left(\sum_0^{n} \frac{c_{\alpha|0}}{c_{0|0}}.\, x^{n-\alpha} : \sum_0^{n-1} \frac{c_{\alpha|1}}{c_{0|1}}.\, x^{n-\alpha-1}\right)$$

und die Anwendung der Gleichung (1) führt nacheinander zu folgenden Gleichungen:

$$\sum_0^{n} \frac{c_{\alpha|0}}{c_{0|0}}.x^{n-\alpha} : \sum_0^{n-1} \frac{c_{\alpha|1}}{c_{0|1}}.x^{n-\alpha-1} = x + \frac{c_{0|2}}{c_{0|0}c_{0|1}} : \left(\sum \frac{c_{\alpha|1}}{c_{0|1}}.x^{n-\alpha-1} : \sum \frac{c_{\alpha|1}}{c_{0|2}} x^{n-\alpha-1}\right),$$

$$\sum \frac{c_{\alpha|1}}{c_{0|1}}.x^{n-\alpha-1} : \sum \frac{c_{\alpha|2}}{c_{0|2}}.x^{n-\alpha+1} = 1 + \frac{c_{0|3}}{c_{0|1}c_{0|2}} : \left(\sum \frac{c_{\alpha|2}}{c_{0|2}}.x^{n-\alpha-1} : \sum \frac{c_{\alpha|3}}{c_{0|3}}.x^{n-\alpha-2}\right),$$

$$\sum \frac{c_{\alpha|2}}{c_{0|2}}.x^{n-\alpha-1} : \sum \frac{c_{\alpha|3}}{c_{0|3}}.x^{n-\alpha-2} = x + \frac{c_{0|4}}{c_{0|2}c_{0|3}} : \left(\sum \frac{c_{\alpha|3}}{c_{0|2}}.x^{\alpha-\alpha-2} : \sum \frac{c_{\alpha|4}}{c_{0|4}}.x^{n-\alpha-3}\right);$$

und allgemein:

$$\sum \frac{c_{\alpha|2r-1}}{c_{0|2r-1}}.x^{n-\alpha-r} : \sum \frac{c_{\alpha|2r}}{c_{0|2r}}.x^{n-\alpha-r} = 1 + \frac{c_{0|2r+1}}{c_{0|2r-1}c_{0|2r}} : \left(\sum \frac{c_{\alpha|2r}}{c_{0|2r}}.x^{n-\alpha-r} : \sum \frac{c_{\alpha|2r+1}}{c_{0|2r+1}}.x^{n-\alpha-r-1}\right),$$

$$\sum \frac{c_{\alpha|2r}}{c_{0|2r}}.x^{n-\alpha-r} : \sum \frac{c_{\alpha|2r+1}}{c_{0|2r+1}}.x^{n-\alpha-r-1} = x + \frac{c_{0|2r+2}}{c_{0|2r}c_{0|2r+1}} : \left(\sum \frac{c_{\alpha|2r+1}}{c_{0|2r-1}}.x^{n-\alpha-r-1} : \sum \frac{c_{\alpha|2r+2}}{c_{0|2r+2}}.x^{n-\alpha-r-2}\right);$$

und zuletzt zu:

$$\sum \frac{c_{\alpha|2n-3}}{c_{0|2n-3}}.x^{1-\alpha} : \sum \frac{c_{\alpha|2n-2}}{c_{0|2n-2}}.x^{1-\alpha} = 1 + \frac{c_{0|2n-1}}{c_{0|2n-3}c_{0|2n-2}} : \left(\sum \frac{c_{\alpha|2n-2}}{c_{0|2n-2}}.x^{n-\alpha} : 1\right)$$

$$\sum \frac{c_{\alpha|2n-2}}{c_{0|2n-2}}.x^{1-\alpha} : 1 = x + \frac{c_{1|2n-2}}{c_{0|2n-2}} : 1.$$

Setzt man der Kürze wegen $\frac{c_{0|1}}{c_{0|0}} = p_0$, allgemein $\frac{c_{0|r+2}}{c_{0|r}c_{0|r+1}} = p_{r+1}$, und zuletzt $\frac{c_{1|2n-2}}{c_{0|2n-2}} = p_{2n-1}$, so entsteht durch Ineinanderfügen der vorstehenden verketteten Gleichungen der Kettenbruch:

$$(2.)\quad p_0 : (x + p_1 : (1 + p_2 : (x + p_3 : (1 + \ldots. + p_{2n-3} : (1 + p_{2n-2} : (x + p_{2n-1} : 1)$$
$$= \sum_0^{n-1} c_{\alpha|1}\, x^{n-\alpha-1} : \sum_0^{n} c_{\alpha|0}\, x_{n-\alpha}\,.$$

Der letzte Theilzähler $p_{2n-1} = \frac{c_{1|2n-2}}{c_{0|2n-2}}$ ist aus den Coefficienten c nur scheinbar anders gebildet als die frühern, denn in der Gleichung

$$c_{0|2n} = c_{0|2n-1}c_{1|2n-2} - c_{0|2n-2}c_{1|2n-1}$$

ist $c_{1|2n-1} = 0$, folglich $c_{0|2n} = c_{0|2n-1}c_{1|2n-2}$ oder $c_{1|2n-2} = \frac{c_{0|2n}}{c_{0|2n-1}}$, also

$$p_{2n-1} = \frac{c_{0|2n}}{c_{0|2n-2}c_{0|2n-1}},$$

Wenn man bei der Entwicklung des Kettenbruchs jeden Theilnenner zu einer linearen Function von x macht, so folgt die Bildung der Coefficienten der Reste einem weniger einfachen Gesetze, und es sind einige Umformungen nöthig, um darin die Entwicklungsformel (1) zu erkennen.

Nach Obigem ist:

$$\Sigma \frac{c_{a|0}}{c_{0|0}}.x^{n-a} : \Sigma \frac{c_{a|1}}{c_{0|1}}.x^{n-a-1} = x + p_i \Sigma \frac{c_{a|2}}{c_{0|2}}.x^{n-a-1} : \Sigma \frac{c_{a|1}}{c_{0|1}}.x^{n-a-1},$$

und durch fortgesetzte Division erhält man:

$$\Sigma \frac{c_{a|0}}{c_{0|0}}.x^{n-a} : \Sigma \frac{c_{a|1}}{c_{0|1}}.x^{n-a-1} = x + p_1 - p_i \Sigma \frac{c_{a|3}}{c_{0|1}c_{0|2}}.x^{n-a-2} : \Sigma \frac{c_{a|1}}{c_{0|1}}.x^{n-a-1}$$

$$= x + p_1 - p_1 p_2 : \left(\Sigma \frac{c_{a|1}}{c_{0|1}} x^{n-a-1} : \Sigma \frac{c_{a|3}}{c_{0|3}}.x^{n-a-2} \right).$$

Weiter ist

$$\Sigma \frac{c_{a|1}}{c_{0|1}}.x^{n-a-1} : \Sigma \frac{c_{a|3}}{c_{0|3}}.x^{n-a-2} = x + \Sigma \frac{c_{0|3}c_{a+1|1} - c_{0|1}c_{a+1|3}}{c_{0|1}c_{0|3}}.x^{n-a-2} : \Sigma \frac{c_{a|3}}{c_{0|3}}.x^{n-a-2}$$

$$= x + \frac{c_{0|3}c_{1|1} - c_{0|1}c_{1|3}}{c_{0|1}c_{0|3}} - \Sigma \frac{(c_{0|3}c_{1|1} - c_{0|1}c_{1|3})c_{a+1|3} - (c_{0|3}c_{a+2|1} - c_{0|1}c_{a+2|3})c_{0|3}}{c_{0|1}c_{0|3}c_{0|3}}.x^{n-a-3} : \Sigma \frac{c_{a|3}}{c_{0|3}}.x^{n-a-2},$$

und eine leichte Umformung giebt:

$$c_{0|3}c_{r|1} - c_{0|1}c_{r|3} = \frac{c_{0|3}c_{0|2}c_{r|1} - c_{0|1}c_{0|2}c_{r|3}}{c_{0|2}} = \frac{c_{0|3}(c_{r-1|3} + c_{0|1}c_{r|2}) - c_{0|1}c_{0|2}c_{r|3}}{c_{0|2}}$$

$$= \frac{c_{0|3}c_{r-1|3} + c_{0|1}(c_{0|3}c_{r|2} - c_{0|2}c_{r|3})}{c_{0|2}} = \frac{c_{0|3}c_{r-1|3} + c_{0|1}c_{r-1|4}}{c_{0|2}},$$

so dass

$$c_{0|3}c_{1|1} - c_{0|1}c_{1|3} = \frac{c_{0|3}c_{0|3} + c_{0|1}c_{0|4}}{c_{0|2}} \text{ für } r = 1$$

und

$$c_{0|3}c_{a+2|1} - c_{0|1}c_{a+2|3} = \frac{c_{0|3}c_{a+1|3} + c_{0|1}c_{a+1|4}}{c_{0|2}} \text{ für } r = a+2$$

ist. Wenn nun Beides eingesetzt wird, so ergiebt sich zunächst:

$$(c_{0|3}c_{1|1} - c_{0|1}c_{1|3})c_{a+1|3} - (c_{0|3}c_{a+2|1} - c_{0|1}c_{a+2|3})c_{0|3}$$

$$= \frac{(c_{0|3}c_{0|3} + c_{0|1}c_{0|4})c_{a+1|3} - (c_{0|3}c_{a+1|3} + c_{0|1}c_{a+1|4})c_{0|3}}{c_{0|2}} = \frac{c_{0|1}(c_{0|4}c_{a+1|3} - c_{0|3}c_{a+1|4})}{c_{0|2}} = \frac{c_{0|1}c_{a|5}}{c_{0|2}},$$

und durch Einsetzung dieses Werths:

$$\Sigma \frac{c_{a|1}}{c_{0|1}}.x^{n-a-1} : \Sigma \frac{c_{a|3}}{c_{0|3}}.x^{n-a-2} = x + \frac{c_{0|3}c_{0|3} + c_{0|1}c_{0|4}}{c_{0|1}c_{0|2}c_{0|3}} - \Sigma \frac{c_{a|5}}{c_{0|2}c_{0|3}c_{0|3}}.x^{n-a-3} : \Sigma \frac{c_{a|3}}{c_{0|3}}.x^{n-a-2}$$

$$= x + p_2 + p_3 - p_3p_4 : \Sigma \frac{c_{a|5}}{c_{0|5}}.x^{n-a-3} : \Sigma \frac{c_{a|3}}{c_{0|3}}.x^{n-a-2}.$$

Eben so lässt sich allgemein

$$\textbf{(3.)} \qquad \Sigma \frac{c_{a|2r-1}}{c_{0|2r-1}}.x^{n-a-r} : \Sigma \frac{c_{a|2r+1}}{c_{0|2r+1}}.x^{n-a-r-1}$$

$$= x + p_{2r} + p_{2r+1} - p_{2r+1}p_{2r+2}.\Sigma \frac{c_{a|2r+3}}{c_{0|2r+3}}.x^{n-a-r-2} : \Sigma \frac{c_{a|2r+1}}{c_{0|2r+1}}.x^{n-a-r-1}$$

herleiten, und es ist also

$$\textbf{(4.)} \quad \frac{\Sigma c_{\pi|1}x^{n-a-1}}{\Sigma c_{a|0}x^{n-a}} = p_0 : (x + p_1 - p_1p_2 : (x + p_2 + p_3 - p_3p_4 : (x + \ldots - p_{2n-3}p_{2n-2}$$

$$: (x + p_{2n-2} + p_{2n-1}).$$

Die Gleichung (3) hat noch die besondre Bedeutung, dass sie allgemein zeigt, wie bei der Entwicklung des Kettenbruchs (4) die Reste aus den ganzen Functionen $\Sigma \frac{c_{a|2r+3}}{c_{0|2r+3}}.x^{n-a-r-2}$ und aus den Factoren $p_{2r+1}p_{2r+2}$ zusammenzusetzen sind. Hätte in dem Quotienten $\Sigma \frac{c_{a|2r-1}}{c_{0|2r-1}}.x^{n-a-r-1} : \Sigma \frac{c_{a|2r+1}}{c_{0|2r+1}}.x^{n-a-r-2}$ der Dividend schon einen Factor gehabt, so wäre derselbe auf den Rest übergegangen. Wenn man Dies beachtet, so finden sich aus dem zu Grunde gelegten ersten Divisor $\Sigma \frac{c_{a|0}}{c_{0|0}}.x^{n-a}$ folgende Reste:

$$\textbf{(5.)} \quad \begin{cases} p_1p_2.\Sigma \frac{c_{a|3}}{c_{0|3}}.x^{n-a-2}\ ; \quad p_1p_2p_5p_6.\Sigma \frac{c_{a|7}}{c_{0|7}}.x^{n-a-4}\ ; \quad p_1p_2p_5p_6p_9p_{10}.\Sigma \frac{c_{a|11}}{c_{0|11}}.x^{n-a-6} \text{ u. s. w.} \\ \text{und eben so sind} \\ p_0p_3p_4.\Sigma \frac{c_{a|5}}{c_{0|5}}.x^{n-a-3}\ ; \ p_0p_3p_4p_7p_8.\Sigma \frac{c_{a|9}}{c_{0|9}}.x^{n-a-5}\ ; \quad p_0p_3p_4p_7p_8p_{11}p_{12}.\Sigma \frac{c_{a|13}}{c_{0|13}}.x^{n-a-7} \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

die Reste, welche durch Anwendung derselben Regel aus dem ersten Dividenden $p_0 . \Sigma \frac{c_{\alpha|1}}{c_{0|1}} . x^{n-\alpha-1}$ gebildet werden können.

§. 2.

In der Entwicklungsformel (1) ist die Seite rechts die *Determinante* des zweiseitigen Systems

$$c_{0|s-1}\, c_{r+1|s-1}$$

$$c_{0|s-2}\, c_{s+1|s-2}\ ,$$

in welchem die ersten Zeiger in den lothrechten Reihen, die andern in den wagerechten gleich sind. Wendet man nun auf dieses System die Formel (1) selbst wieder an und setzt

$$c_{0|s-2}\, c_{1|s-3} - c_{0|s-3}\, c_{1|s-2} \quad \text{statt} \quad c_{0|s-1}$$

und

$$c_{0|s-2}\, c_{r+2|s-3} - c_{0|s-3}\, c_{r+2|s-2} \quad \text{statt} \quad c_{r+1|s-1}$$

in die obere Reihe, so theilt sich das vorstehende System in zwei, und zwar in die beiden, welche entstehen, wenn zuerst der Minuend $c_{0|s-2}\, c_{1|s-3}$ und $c_{0|s=2}\, c_{r+2|s-3}$ der vorstehenden Differenzen, und danach der Subtrahend $c_{0|s-3} c_{1|s-2}$ und $c_{0|1-3} c_{r+2|s-2}$ in das System gesetzt wird. Wenn man nun noch den gemeinsamen Factor der obern Reihe vor das System setzt, so erhält man

$$c_{r|s} = c_{0|s-2} \cdot \begin{vmatrix} c_{1|s-3} & c_{r+2|s-3} \\ c_{0|s-2} & c_{r+1|s-2} \end{vmatrix} - c_{0|s-3} \cdot \begin{vmatrix} c_{1|s-2} & c_{r+2|s-2} \\ c_{0|s-2} & c_{r+1|s-2} \end{vmatrix}$$

und kann beide Systeme sogleich zu einem dreireihigen verbinden, nämlich zu:

$$c_{0|s-2}\, c_{1|s-2}\, c_{r+2|s-3}$$

$$c_{0|s-3}\, c_{1|s-3}\, c_{r+2|s-3}$$

$$\mathbf{0} \quad c_{0|s-2}\, c_{r+1|s-2}\ .$$

Der Nutzen dieser Umformung besteht in der Erniedrigung des zweiten Zeigers. Durch Wiederholung derselben lässt sich der zweite Zeiger bis auf 0 und 1 herunterbringen; d. h. alle Glieder des Systems, dessen Determinante $c_{r|s}$ ist, lassen sich zu Coefficienten der gegebenen Quotienten $\Sigma c_{\alpha|1} . x^{n-\alpha-1} : \Sigma c_{\alpha|0} . x^{n-\alpha}$

machen. Ich ersetze zunächst die Glieder der untersten Reihe durch die Ausdrücke, welche die Formel (1) giebt. Dies giebt, ähnlich wie oben, Folgendes:

$$c_{r|s} = c_{0|s-3} \cdot \begin{vmatrix} c_{0|s-2} & c_{1|s-2} & c_{r+2|s-2} \\ c_{0|s-3} & c_{1|s-3} & c_{r+2|s-3} \\ 0 & c_{r|s-4} & c_{r+2|s-4} \end{vmatrix} - c_{0|s-4} \cdot \begin{vmatrix} c_{0|s-2} & c_{1|s-2} & c_{r+2|s-2} \\ c_{0|s-3} & c_{1|s-3} & c_{r+2|s-3} \\ 0 & c_{1|s-3} & c_{r+2|s-3} \end{vmatrix}$$

Nun stimmen aber in der zweiten Determinante die untern Reihen, mit Ausnahme eines Gliedes, überein, also verschwindet die Determinante bis auf

$$+ c_{0|s-3} c_{0|s-4} \cdot \begin{vmatrix} c_{1|s-2} & c_{r+2|s-2} \\ c_{1|s-3} & c_{r+2|s-3} \end{vmatrix} ;$$

und diese zweireihige Determinante ist gerade geeignet, um in andere eingefügt zu werden. Dadurch wird

$$c_{r|s} = c_{0|s-3} \begin{vmatrix} c_{0|s-2} & c_{1|s-2} & c_{r+2|s-2} \\ c_{0|s-3} & c_{1|s-3} & c_{r+2|s-3} \\ c_{0|s-4} & c_{1|s-4} & c_{r+2|s-4} \end{vmatrix}$$

und, wenn man nun auch noch für die Glieder der obersten Reihe die Werthe nach (1) setzt, so erhält man

$$c_{r|s} = c_{0|s-3}\, c_{0|s-3} \begin{vmatrix} c_{1|s-4} & c_{2|s-4} & c_{r+3|s-4} \\ c_{0|s-3} & c_{1|s+3} & c_{r+2|s-3} \\ c_{0|s-4} & c_{1|s-4} & c_{r+2|s-4} \end{vmatrix} - c_{0|s-3}\, c_{0|s-4} \begin{vmatrix} c_{1|s-3} & c_{1|s-3} & c_{r+3|s-3} \\ c_{0|s-3} & c_{1|s-3} & c_{r+2|s-2} \\ c_{0|s-4} & c_{1|s-4} & c_{r+2|s-4} \end{vmatrix} ,$$

und durch Verbindung:

$$c_{r|s} = c_{0|s-3} \cdot \begin{vmatrix} c_{0|s-3} & c_{1|s-3} & c_{2|s-3} & c_{r+3|s-3} \\ c_{0|s-4} & c_{1|s-4} & c_{2|s-4} & c_{r+3|s-4} \\ 0 & c_{0|s-3} & c_{1|s-3} & c_{r+2|s-3} \\ 0 & c_{0|s-4} & c_{1|s-4} & c_{r+2|s-4} \end{vmatrix} .$$

Wird jetzt weiter der zweite Zeiger in der dritten Querreihe von oben erniedrigt, so ist das Ergebniss der übersichtlichen Umformung:

$$c_{r|s} = c_{0|s-3}\,c_{0|s-4}\cdot\begin{vmatrix} c_{0|s-3} & c_{1|s-3} & c_{2|s-3} & c_{r+3|s-3} \\ c_{0|s-4} & c_{1|s-4} & c_{2|s-4} & c_{r+3|s-4} \\ c_{0|s-5} & c_{1|s-5} & c_{2|s-5} & c_{r+3|s-5} \\ 0 & c_{0|s-4} & c_{1|s-4} & c_{r+2|s-4} \end{vmatrix}$$

und wenn auch noch in der obersten Reihe die entsprechenden Werthe nach (1) gesetzt und die sich ergebenden Determinanten zusammengefasst werden, so erhält man:

$$c_{r|s} = c_{0|s-3}\,c_{0|s-4}\cdot\begin{vmatrix} c_{0|s-4} & c_{1|s-4} & c_{2|s-4} & c_{3|s-4} & c_{r+4|s-4} \\ c_{0|s-5} & c_{1|s-5} & c_{2|s-5} & c_{3|s-5} & c_{r+4|s-5} \\ 0 & c_{0|s-4} & c_{1|s-4} & c_{2|s-4} & c_{r+3|s-4} \\ 0 & c_{0|s-5} & c_{1|s-5} & c_{2|s-5} & c_{r+3|s-5} \\ 0 & 0 & c_{0|s-4} & c_{1|s-4} & c_{r+2|s-4} \end{vmatrix}\cdot$$

Es ist leicht zu sehen, dass weiter:

$$c_{r|s} = c_{0|s-3}\,c_{0|s-4}\,(c_{0|s-5})^2\cdot\begin{vmatrix} c_{0|r-5} & c_{1|s-5} & c_{2|s-5} & c_{3|r-5} & c_{4|s-5} & c_{r+5|s-5} \\ c_{0|s-6} & c_{1|s-6} & c_{2|s-6} & c_{3|s-6} & c_{4|s-6} & c_{r+5|s-6} \\ 0 & c_{0|s-5} & c_{1|s-5} & c_{2|s-5} & c_{3|s-5} & c_{r+4|s-5} \\ 0 & c_{0|s-6} & c_{1|s-6} & c_{2|s-6} & c_{3|s-6} & c_{r+4|s-6} \\ 0 & 0 & c_{0|s-5} & c_{1|s-5} & c_{2|s-5} & c_{r+3|s-5} \\ 0 & 0 & c_{0|s-6} & c_{1|s-6} & c_{2|s-6} & c_{r+3|s-6} \end{vmatrix}$$

gefunden wird.

Die Wiederholung der obigen Einsetzungen würde zu einem siebenreihigen Systeme führen, welches als zweiten Zeiger nur $s-6$ und $s-7$ enthielte und mit dem Factor $c_{0|s-3}\,c_{0|s-4}(c_{0|s-5}\,c_{0|s-6})^2$ multiplicirt wäre; aber schon jetzt ist aus dem Vorstehenden durch Induction die allgemeine Form der Systeme zu erkennen. Durch $2q$ Umformungen der Determinanten gelangt man zu einem Systeme von $2q+2$ Reihen, in welchem als zweiter Zeiger nur $s-2q-2$ und $s-2q-1$ vorkommen. Wenn man noch zur Abkürzung $s-2q-2=m$ setzt, so ist das System von $2q+2$ Reihen folgendes:

$$(6.)\quad \begin{cases} c_{0|m+1} & c_{1|m+1} & c_{2|m+1} \cdots\cdots c_{q-1|m+1} & c_{q|m+1} \cdots\cdots c_{2q|m+1} & c_{r+2q+1|m+1} \\ c_{0|m} & c_{1|m} & c_{2|m} \cdots\cdots\cdots c_{q-1|m} & c_{q|m} \cdots\cdots\cdots c_{2q|m} & c_{r+2q+1|m} \\ 0 & c_{0|m+1} & c_{1|m+1} \cdots\cdots c_{q-2|m+1} & c_{q-1|m+1} \cdots c_{2q-1|m+1} & c_{r+2q|m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots c_{0|m} & c_{1|m} \cdots\cdots\cdots c_{q-1|m} & c_{r+q+2|m} \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots 0 & c_{0|m+1} \cdots\cdots c_{q|m+1} & c_{r+q+1|m+1} \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots 0 & c_{0|m} \cdots\cdots\cdots c_{q|m} & c_{r+q+1|m} \end{cases}$$

und die gemeinsamen Factoren, welche nach und nach vor die Determinante getreten sind, bilden folgendes Product:

$$(7.)\quad (c_{0|m+2q-1}\, c_{0|m+2q-2})(c_{0|m+2q-3}\, c_{0|m+2q-4})^2 \cdots\cdots (c_{0|m+3}\, c_{0|m+2})^{q-1} (c_{0|m+1})^q,$$

welches, mit der Determinante (6) verbunden, den Werth des Coefficienten $c_{r|m+2q+2}$ darstellt.

Sollen aber in den Determinanten für die Coefficienten aller Reste nur die Zahlen m und $m+1$ als zweiter Zeiger vorkommen, so genügt das System (6) nur halb; nämlich nur für diejenigen Coefficienten, deren zweiter Zeiger $s = m + 2q + 2$ sich von m um eine gerade Zahl unterscheidet. Setzt man aber $m+1$ statt m in $c_{r|m+2q+2}$, und eben Das in der Determinante (6) und dem Producte (7), und wendet danach auf (6) noch einmal dieselbe Umformung an, so erhält man auch für $c_{r|m+2q+3}$ den verlangten Ausdruck, nämlich die Determinante

$$(8.)\quad \begin{cases} c_{0|m+1} & c_{1|m+1} & c_{2|m+1} \cdots\cdots c_{q|m+1} & c_{q+1|m+1} \cdots\cdots c_{2q+1|m+1} & c_{r+2q+2|m+1} \\ c_{0|m} & c_{1|m} & c_{2|m} \cdots\cdots\cdots c_{q|m} & c_{q+1|m} \cdots\cdots\cdots c_{2q+1|m} & c_{r+2q+2|m} \\ 0 & c_{0|m+1} & c_{1|m+1} \cdots\cdots c_{q-1|m+1} & c_{q|m+1} \cdots\cdots c_{2q|m+1} & c_{r+2q+1|m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots c_{0|m+1} & c_{1|m+1} \cdots\cdots\cdots c_{q+1|m+1} & c_{r+q+2|m+1} \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots c_{0|m} & c_{1|m} \cdots\cdots\cdots c_{q+1|m} & c_{r+q+2|m} \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots 0 & c_{0|m+1} \cdots\cdots c_{0|m+1} & c_{r+q+1|m+1} \end{cases}$$

und als Coefficienten derselben das Product

$$(9.)\quad (c_{0|m+2q}\, c_{0|m+2q-1})(c_{0|m+2q-2}\, c_{0|m+2q-3})^2 \cdots\cdots (c_{0|m+4}\, c_{0|m+3})^{q-1} (c_{0|m+2}\, c_{0|m+1})^q.$$

Setzt man hier von Neuem $m+1$ statt m, und macht wieder dieselbe Umformung, so erhält man den Werth von $c_{r|m+2q+4}$, welcher sich von dem obigen für $c_{r|m+2q+2}$ nur dadurch unterscheidet, dass darin $q+1$ statt q steht. So ist denn die allgemeine Gültigkeit der Determinanten (6 und 8) und ihrer Factoren (7 und 9) bewiesen.

Zur Abkürzung bezeichne ich die Determinante des Systems (6) durch $\delta_{r|2q+2|m}$ und die des Systems (8) durch $\delta_{r|2q+3|m}$, so dass die vorstehenden Resultate sich folgendermaassen darstellen:

$$(10.)\quad \begin{cases} c_{r|m+2q+2} = (c_{0|m+2q-1}c_{0|m+2q-2})(c_{0|m+2q-3}c_{0|m+2q-4})^2 \ldots (c_{0|m+2}c_{0|m+2})^{q-1}(c_{0|m+1})^q . \delta_{r|2q+2|m} \\ c_{r|m+2q+3} = (c_{0|m+2q}c_{0|m+2q-1})(c_{0|m+2q-2}c_{0|m+2q-3})^2 \ldots (c_{0|m+4}c_{0|m+3})^{q-1}(c_{0|m+2}c_{0|m+1})^q . \delta_{r|2q+3|m} \end{cases}$$

Die Werthe von $c_{r|m}$; $c_{r|m+1}$; $c_{r|m+2}$; $c_{r|m+3}$ und $c_{r|m+4}$, welche aus (10) nicht entnommen werden können, sind entweder, wie $c_{r|m}$ und $c_{r|m+1}$ selbst, die ursprünglichen Coefficienten, auf welche die andern zurückgeführt werden, oder ihre Zusammensetzung ist oben im Einzelnen dargelegt. Es ist nämlich nach (1):

$$c_{r|m+2} = \begin{vmatrix} c_{0|m+1} & c_{r+1|m+1} \\ c_{0|m} & c_{r+1|m} \end{vmatrix},$$

und ferner wurde:

$$c_{r|m+3} = \begin{vmatrix} c_{0|m+1} & c_{1|m+1} & c_{r+2\,m+1} \\ c_{0|m} & c_{1|m} & c_{r+2|m} \\ 0 & c_{0|m+1} & c_{r+1|m+1} \end{vmatrix}$$

und

$$c_{r|m+4} = c_{0|m+1} \cdot \begin{vmatrix} c_{0|m+1} & c_{1|m+1} & c_{2|m+1} & c_{r+3|m+1} \\ c_{0|m} & c_{1|m} & c_{2|m} & c_{r+3|m} \\ 0 & c_{0|m+1} & c_{1|m+1} & c_{r+2|m+1} \\ 0 & c_{0|m} & c_{1|m} & c_{r+2|m} \end{vmatrix}$$

gefunden; und nun setze man, der Gleichförmigkeit wegen, noch $c_{r|m} = \delta_{r|0|m}$; $c_{r|m+1} = \delta_{r|1|m}$; $c_{r|m+2} = \delta_{r|2|m}$; $c_{r|m+3} = \delta_{r|3|m}$ und $c_{r|m+4} = c_{0|m+1}\delta_{r|4|m} = \delta_{0|1|m}\delta_{r|4|m}$.

§. 3.

Wenn nun verlangt wird, die Coefficienten der Reste durch die der gegebenen Functionen $\sum_0^n c_{\alpha|0}x^{n-\alpha}$ und $\sum_0^n c_{\alpha|1}x^{n-\alpha-1}$ darzustellen, so ist in (10) der

Zeiger $m = 0$ zu setzen. Zur Abkürzung lasse man dann auch noch bei $\delta_{r|s|m}$ den letzten und ersten Zeiger weg, wenn er Null ist, so dass $\delta_{r|s} = \delta_{r|s|0}$ und $\delta_s = \delta_{0|s|0}$ ist. Dann erhält man durch Anwendung der Gleichungen (10);

$$(11.) \qquad \begin{cases} \Sigma \frac{c_{\alpha|\alpha r-1}}{c_{0|2r-1}} . x^{n-\alpha-r} = \Sigma \frac{\delta_{\alpha|2r-1}}{\delta_{2r-1}} . x^{n-\alpha-r}, \\ \Sigma \frac{c_{\alpha|2r}}{c_{0|2r}} . x^{n-\alpha-r} = \Sigma \frac{\delta_{\alpha|2r}}{\delta_{2r}} . x^{n-\alpha-r} \end{cases}$$

und es ist nur noch nöthig, die Grössen $p_{r+1} = \frac{c_{0|r+2}}{c_{0|r}c_{0|r+1}}$ gleichfalls durch die Determinanten δ auszudrücken.

Es ist zunächst

$$\frac{c_{0|2r+4}}{c_{0|2r+2}} = c_{0|2r+1}c_{0|2r}c_{0|2r-1}\ldots\ldots c_{0|3}c_{0|2}c_{0|1} \cdot \frac{\delta_{2r+4}}{\delta_{2r+2}},$$

$$\frac{c_{0|2r+5}}{c_{0|2r+3}} = c_{0|2+r2}c_{0|2r+1}c_{0|2r+2}\ldots\ldots c_{0|3}c_{0|2}c_{0|1} \cdot \frac{\delta_{2r+3}}{\delta_{2r+3}},$$

und daraus folgt

$$\frac{c_{0|2r+4}}{c_{9|2r+2}c_{0|2r+3}} = \frac{c_{0|2r+1}}{(c_{9|2r-2}c_{0|2r-3})(c_{0|2r-4}c_{0|2r-5})^2\ldots\ldots(c_{0|4}c_{0|3})^{r-2}(c_{0|2}c_{0|1})^{r-1}} \cdot \frac{\delta_{2r+4}}{\delta_{2r+2}} \cdot \frac{1}{\delta_{2r+3}},$$

$$\frac{c_{0|2r+5}}{c_{0|2r+3}c_{0|2r+4}} = \frac{c_{0|2r+2}}{(c_{0|2r+1}c_{0|2r-2})(c_{0|2r-3}c_{0|2r-4})^2\ldots\ldots(c_{0|5}c_{0|4})^{r-2}(c_{0|3}c_{0|2})^{r-1}(c_{0|1})^r} \cdot \frac{\delta_{2r+5}}{\delta_{2r+3}} \cdot \frac{1}{\delta_{2r+4}}.$$

Wenn man nun noch statt $c_{0|2r+1}$ und $c_{0|2r+2}$ die Werthe setzt, welche die Formeln (10) geben, so erhält man

$$p_{2r+3} = \frac{\delta_{2r+1}\delta_{2r+4}}{\delta_{2r+2}\delta_{2r+3}},$$

$$p_{2r+4} = \frac{\delta_{2r+2}\delta_{2r+5}}{\delta_{2r+3}\delta_{2r+4}},$$

oder allgemein:

$$(12.) \qquad p_{r+3} = \frac{\delta_{r+1}\delta_{r+4}}{\delta_{r+2}\delta_{r+3}}.$$

Für die Determinanten, deren Zeiger kleiner als 5 sind, versagen die Formeln (10) den Dienst. Deshalb leite man die Werthe der Grössen p, in welchen dieselben vorkommen, besonders her. Dazu sind, ausser den Gleichungen (10), die Gleichungen zu benutzen, welche zu Ende des (§. 2) der Gleichförmigkeit wegen aufgestellt wurden. Es giebt Dies:

$$p_0 = \frac{c_{0|1}}{c_{0|0}} = \frac{\delta_1}{\delta_0}\,; \quad p_1 = \frac{c_{0|2}}{c_{0|0}c_{0|1}} = \frac{\delta_2}{\delta_0\delta_1}\,; \quad p_2 = \frac{c_{0|3}}{c_{0|1}c_{0|2}} = \frac{\delta_3}{\delta_1\delta_2}; \; p_3 = \frac{c_{0|4}}{c_{0|2}c_{0|3}} = \frac{\delta_1\delta_4}{\delta_2\delta_3};$$

$$p_4 = \frac{c_{0|5}}{c_{0|3}c_{0|4}} = \frac{c_{0|2}c_{0|1}\delta_5}{c_{0|3}c_{0|1}\delta_4} = \frac{\delta_2\delta_5}{\delta_3\delta_4}\,; \quad p_5 = \frac{c_{0|6}}{c_{0|4}c_{0|5}} = \frac{c_{0|3}c_{0|2}(c_{0|1})^2\delta_6}{c_{0|1}\delta_4 c_{0|2}c_{0|1}\delta_5} = \frac{\delta_3\delta_6}{\delta_4\delta_5};$$

$$p_6 = \frac{c_{0|7}}{c_{0|5}c_{0|6}} = \frac{c_{0|4}c_{0|3}(c_{0|2}c_{0|1})^2\delta_r}{c_{0|2}c_{0|1}\delta_5 c_{0|3}c_{0|2}(c_{0|1})^2\delta_6} = \frac{\delta_4\delta_r}{\delta_5\delta_6}\,;$$

$$p_7 = \frac{c_{0|8}}{c_{0|6}c_{0|7}} = \frac{c_{0|3}c_{0|4}(c_{0|3}c_{0|2})^2(c_{0|1})^2\delta_8}{c_{0|3}c_{0|2}(c_{0|1})^2\delta_6 c_{0|4}c_{0|3}(c_{0|2}c_{0|1})^2\delta_r} = \frac{c_{0|4}\delta_8}{c_{0|2}c_{0|1}\delta_6\delta_7} = \frac{\delta_5\delta_8}{\delta_6\delta_7}\,.$$

Hieraus ist zu sehen, dass die Formel (12) für alle positiven Werthe von r anwendbar ist; und auch für $r = 0$.

Durch (11 u. 12) sind nun alle Grössen, welche in dem Kettenbruch (2), sowie die Reste, die bei seiner Entwicklung vorkommen, auf die Determinanten δ der Systeme (6 u. 8) zurückgeführt; und in diesen kommen nur noch die Coefficienten der gegebenen Functionen $\Sigma c_{\alpha|0}x^{n-\alpha}$ und $\Sigma c_{\alpha|1}x^{n-\alpha-1}$ vor, wenn, wie hier vorausgesetzt, in (6 u. 8) $m = 0$ gesetzt wird.

Zugleich ist auch die Entwicklung des Kettenbruchs (4) und die Bildung der Reste (5) ersichtlich gemacht; so dass jeder Theilbruch und jeder Rest, ja jeder Coefficient eines jeden Restes, für sich unmittelbar aus den gegebenen Coefficienten $c_{r|0}$ und $c_{r|1}$ berechnet werden kann.

Die Producte der Grössen p, welche mit zu den Resten (5) gehören, lassen sich einfacher darstellen. Es ist allgemein:

$$p_{2r+1}p_{2r+2} = \frac{\delta_{2r+1}\delta_{2r+2}}{\delta_{2r}\delta_{2r+1}} \cdot \frac{\delta_{2r}\delta_{2r+3}}{\delta_{2r+1}\delta_{2r+2}} = \frac{\delta_{2r-1}\delta_{2r+3}}{\delta^2_{2r+1}}\,,$$

und insbesondre:

$$p_1p_2 = \frac{\delta_3}{\delta_0\delta_1^2}\,;$$

und es lässt sich

$$p_1p_2 = \frac{1}{\delta_0}\cdot\left(\frac{1}{\delta_1}\right)^2.\delta_3 \quad , \qquad p_0p_3p_4 = \frac{1}{\delta_0}\cdot\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right)^2.\delta_5\,,$$

$$p_1p_2p_5p_6 = \frac{1}{\delta_0}\cdot\left(\frac{\delta_3}{\delta_1\delta_5}\right)^2.\delta_7 \quad , \qquad p_0p_3p_4p_7p_8 = \frac{1}{\delta_0}\cdot\left(\frac{\delta_1\delta_5}{\delta_3\delta_7}\right)^2.\delta_9\,,$$

$$p_1p_2p_5p_6p_9p_{10} = \frac{1}{\delta_0}\cdot\left(\frac{\delta_3\delta_r}{\delta_1\delta_5\delta_9}\right)^2.\delta_{11} \quad , \quad p_0p_3p_4p_7p_8p_{11}p_{12} = \frac{1}{\delta_0}\cdot\left(\frac{\delta_1\delta_5\delta_9}{\delta_3\delta_r\delta_{11}}\right).\delta_{13} \text{ u. s. w.}$$

zusammensetzen. Demnach sind nun die Reste (5):

$$(13.)\quad \begin{cases} p_1p_2 \Sigma \frac{c_{a|3}}{c_{0|3}}.x^{n-a-2} = \frac{1}{\delta_0}.\left(\frac{1}{\delta_1}\right)^2.\Sigma\delta_{a|3}.x^{n-a-2}, \\ p_0p_3p_4 \Sigma \frac{c_{a|5}}{c_{0|5}}.x^{n-a-3} = \frac{1}{\delta_0}.\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right)^2.\Sigma\delta_{a|5}.x^{n-a-3}, \\ p_1p_2p_5p_6 \Sigma \frac{c_{a|7}}{c_{0|7}}.x^{n-a-4} = \frac{1}{\delta_0}.\left(\frac{\delta_3}{\delta_1\delta_5}\right)^2.\Sigma\delta_{a|7}.x^{n-a-4}, \\ p_0p_3p_4p_7p_8 \Sigma \frac{c_{a|9}}{c_{0|9}}.x^{n-a-5} = \frac{1}{\delta_0}.\left(\frac{\delta_1\delta_5}{\delta_3\delta_7}\right)^2.\Sigma\delta_{a|9}.x^{n-a-5}, \\ p_1p_2p_5p_6p_9p_{10} \Sigma \frac{c_{a|11}}{c_{0|11}}.x^{n-a-6} = \frac{1}{\delta_0}.\left(\frac{\delta_3\delta_7}{\delta_1\delta_5\delta_9}\right)^2.\Sigma\delta_{a|11}.x^{n-a-6}, \\ p_0p_3p_4p_7p_8p_{11}p_{12} \Sigma \frac{c_{a|13}}{c_{0|13}}.x^{a-a-7} = \frac{1}{\delta_0}.\left(\frac{\delta_1\delta_5\delta_9}{\delta_3\delta_7\delta_{11}}\right)^2.\Sigma\delta_{a|13}.x^{n-a-7} \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Man kann jetzt, ohne die Allgemeinheit der zu Grunde gelegten Functionen zu beschränken, annehmen, dass $\delta_0 = c_{0|0}$ *positiv* ist; so dass die vorstehenden Reste ausser den ganzen Functionen $\Sigma\delta_{a|3}.x^{n-a-2}$, $\Sigma\delta_{a|5}.x^{n-a-3}$ u. s. w. nur noch einen positiven Factor enthalten. Bei der Anwendung des *Sturm*'schen Satzes lässt sich sogar von jenem Factor ganz absehen, weil er keinen Einfluss auf das Zeichen hat, und man darf also die Functionen $\Sigma\delta_{a|2r+1}.x^{n-a-r-1}$ für die Reste selbst nehmen. Der letzte von diesen Resten ist von x abhängig und besteht nur aus der Determinante δ_{2n-1}, wenn man den positiven Factor

$$\left(\frac{\delta_{2n-5}\delta_{2n-9}\delta_{2n-13}\ldots\ldots}{\delta_{2n-3}\delta_{2n-7}\delta_{2n-11}\ldots\ldots}\right)^2.\frac{1}{\delta_0}$$

vernachlässigt. Das System für δ_{2n-1} geht aus (8) hervor, wenn darin $m=0$ und $q=n-2$ gesetzt wird, und ist also folgendes:

$$(14.)\quad \begin{cases} c_{0|1} & c_{1|1} & c_{2|1}\ldots\ldots & c_{n-3|1} & c_{n-2|1} & c_{n-1|1} & 0\ldots\ldots 0 & 0 & 0 \\ c_{0|0} & c_{1|0} & c_{2|0}\ldots\ldots & c_{n-3|0} & c_{n-2|0} & c_{n-1|0} & c_{n|0}\ldots\ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{0|1} & c_{1|1}\ldots\ldots & c_{n-4|1} & c_{n-3|1} & c_{n-2|1} & c_{n-1|1}\ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{0|0} & c_{1|0}\ldots\ldots & c_{n-4|0} & c_{n-3|0} & c_{n-2|0} & c_{n-1|0}\ldots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\ldots\ldots & c_{0|0} & c_{1|0} & c_{2|0} & c_{3|0}\ldots\ldots c_{n-1|0} & c_{n|0} & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots\ldots & 0 & c_{0|1} & c_{1|1} & c_{2|1}\ldots\ldots c_{n-2|1} & c_{n-1|1} & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots\ldots & 0 & c_{0|0} & c_{1|0} & c_{2|0}\ldots\ldots c_{n-2|0} & c_{n-1|0} & c_{n|0} \\ 0 & 0 & 0\ldots\ldots & 0 & 0 & c_{0|1} & c_{1|1}\ldots\ldots c_{n-3|1} & c_{n-2|1} & c_{n-1|1} \end{cases}.$$

In diesem System sind zugleich die Systeme für alle übrigen Determinanten als Theile enthalten. Nimmt man z. B. die drei obersten Reihen desselben und verbindet nach einander mit den beiden ersten lothrechten Reihen die dritte, vierte, fünfte u. s. w., so erhält man der Reihe nach das System für δ_3 , $\delta_{1|3}$, $\delta_{2|3}$ u. s. w.; d. h. man erhält alle Coefficienten des Restes $\Sigma\delta_{\alpha|3}.x^{n-\alpha-2}$. Eben so sind in den fünf obersten Reihen die Determinanten δ_5 , $\delta_{1|5}$, $\delta_{2|5}$, $\delta_{3|5}$ u. s. w.; d. h. die Coefficienten des Restes $\Sigma\delta_{\alpha|5}.x^{n-\alpha-3}$ enthalten; u. s. w.

§. 4.

Die Untersuchung war bisher allgemeiner, als die Aufgabe es verlangt; nämlich es wurden in (13) die Reste aufgestellt, welche sich ergeben, wenn der Quotient $\Sigma c_{\alpha|1}.x^{n-\alpha-1} : \Sigma c_{\alpha|0}.x^{n-\alpha}$ in den Kettenbruch (4) verwandelt wird und die Coefficienten des Dividenden ganz unabhängig von denen des Divisors sind. Wegen des *Sturm*'schen Satzes ist aber der Fall, in welchem $\Sigma c_{\alpha|1}.x^{n-\alpha-1}$ die *Ableitung* von $\Sigma c_{\alpha|0}.x^{n-\alpha}$ ist, besonders wichtig; also entsteht die Aufgabe, die allgemeinen Resultate für denselben möglichst zu vereinfachen.

Wenn $\Sigma c_{\alpha|1}.x^{n-\alpha-1}$ *die Ableitung* von $\Sigma c_{\alpha|0}.x^{n-\alpha}$, also

$$c_{r|1} = (n-r)c_{r|0}$$

ist, so geht aus der Gleichung

$$c_{r|2} = c_{0|1}c_{r-1|0} - c_{0|0}c_{r+1|1} \quad , \quad c_{r|2} = (r+1)\,c_{0|0}c_{r+1|0}$$

hervor. Demnach ist der Werth von $c_{r|2}$ fast eben so einfach gegeben, als der von $c_{r|1}$, und dazu ist die Function

$$\sum_0^{n-1} c_{n-\alpha-1|2}.x^{n-\alpha-1} = c_{0|0}.\sum^{n-1}(n-\alpha)c_{n-\alpha|0}.x^{n-\alpha-1}$$

die *Ableitung* von $c_{0|0}\sum_0^n c_{n-\alpha|0}.x^{n-\alpha} = c_{0|0}\sum_0^n c_{\alpha|0}.x^{\alpha}$, welche mit der gegebenen Function $\Sigma c_{\alpha|0}.x^{n-\alpha}$ in den Coefficienten, von dem Factor $c_{0|0}$ abgesehen, ganz übereinstimmt, aber den entgegengesetzten *Potenzenfortschritt* hat. Nun ist zu wünschen, dass die Coefficienten von dieser Ableitung $\sum_0^{n-1} c_{n-\alpha-1|2}.x^{n-\alpha-1}$ neben denen von $\sum_0^{n-1} c_{\alpha|1}.x^{n-\alpha-1}$ in der vorliegenden Untersuchung sich zeigen, weil die Coefficienten beider in den Fragen, welche sich auf die *Realität, Gleichheit* und

Imaginarität der Wurzeln beziehen, dieselbe Geltung haben. Zudem werden die Systeme, welche für die Coefficienten $c_{r|s}$ aufzustellen sind, um eine Reihe *kleiner*. Die erforderlichen Formeln, welche alle Coefficienten aller Reste durch die Coefficienten $c_{r|1}$ und $c_{r|2}$ ausdrücken, gehen aus (10) hervor, wenn man darin $m = 1$ setzt. Die Determinanten $\delta_{r|2q+2|1}$ und $\delta_{r|2q+3|1}$ bezeichne man der Kürze wegen durch $\delta'_{r|2q+2}$ und $\delta'_{r|2q+3}$ und lasse auch hier den ersten Zeiger weg, wenn er Null ist. Danach ist allgemein:

$$(15.)\quad \begin{cases} c_{r|2q+3} = (c_{0|2q}c_{0|2q-1})(c_{0|2q-2}c_{0|2q-3})^2 \ldots\ldots (c_{0|4}c_{0,3})^{q-1}(c_{0|2})^q . \delta'_{r|2q+2} , \\ c_{r|2q+4} = (c_{0|2q+1}c_{0|2q})(c_{0|2q-1}c_{0|2q-2})^2 \ldots (c_{0|5}c_{0|4})^{q-1}(c_{0|3}c_{0|2})^q . \delta'_{r|2q+3} , \end{cases}$$

und insbesondre:

$$c_{r|1} = \delta'_{r|0} \;;\; c_{r|2} = \delta'_{r|1} \;;\; c_{r|3} = \delta'_{r|2} \;;\; c_{r|4} = \delta'_{r|3} \;;\; c_{r|5} = c_{0|2}.\delta'_{r|4} = \delta'_1.\delta'_{r|4}.$$

Setzt man diese Werthe in die Reste, so erhält man:

$$\Sigma \frac{c_{\pi|2r-1}}{c_{0|2r-1}} . x^{n-a-r} = \Sigma \frac{\delta'_{a|2r-2}}{\delta'_{2r-2}} . x^{n-a-r},$$

$$\Sigma \frac{c_{a|1r}}{c_{0|2r}} . x^{n-a-r} = \Sigma \frac{\delta'_{a|2r-1}}{\delta'_{2r-1}} . x^{n-a-r}.$$

Ferner finden sich auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraph die Gleichungen

$$p_{2r+3} = \frac{\delta'_{2r}\delta'_{1r+3}}{\delta'_{2r+1}\delta'_{2r+2}} \text{ und } p_{2r+4} = \frac{\delta'_{2r+1}\delta'_{2r+4}}{\delta'_{2r+2}\delta'_{2r+3}},$$

und allgemein:

$$p_{r+4} = \frac{\delta'_{r+1}\delta'_{r+4}}{\delta'_{r+2}\delta'_{r+3}};$$

und für die Fälle, in welchen der Zeiger von p eine der r kleinsten Zahlen ist, insbesondre:

$$p_0 = \frac{\delta'_0}{c_{0|0}} \;;\; p_1 = \frac{\delta'_0}{c_{0|0}\delta'_0} \;;\; p_2 = \frac{\delta'_2}{\delta'_0\delta'_1} \;;\; p_3 = \frac{\delta'_3}{\delta'_1\delta'_2} \;;\; p_4 = \frac{\delta'_1\delta'_4}{\delta'_2\delta'_3} \;;$$

$$p_5 = \frac{\delta'_2\delta'_5}{\delta'_3\delta'_4} \;;\; p_6 = \frac{\delta'_3\delta'_6}{\delta'_4\delta'_5} \;;\; p_7 = \frac{\delta'_4\delta'_7}{\delta'_5\delta'_6} \;;$$

so dass die vorstehende allgemeine Formel für alle positiven Werthe des Zeigers r gilt. Durch Verbindung der vorstehenden Ausdrücke geht

$$p_1p_2 = \frac{1}{c_{0|0}}\cdot\left(\frac{1}{\delta'_0}\right)^2.\delta'_2 \quad , \qquad p_0p_3p_4 = \frac{\delta'_0}{c_{0|0}}\cdot\left(\frac{1}{\delta'_2}\right)^2.\delta'_4 \quad ,$$

$$p_1p_2p_5p_6 = \frac{1}{c_{0|0}}\cdot\left(\frac{\delta'_2}{\delta'_0\delta'_4}\right)^2.\delta'_6 \quad , \qquad p_0p_3p_4p_7p_8 = \frac{\delta'_0}{c_{0|0}}\cdot\left(\frac{\delta'_4}{\delta'_2\delta'_6}\right)^2.\delta'_8 \quad ,$$

$$p_1p_2p_5p_6p_9p_{10} = \frac{1}{c_{0|0}}\cdot\left(\frac{\delta'_2\delta'_6}{\delta'_0\delta'_4\delta'_8}\right)^2.\delta'_{10} \quad , \qquad p_0p_3p_4p_7p_8p_{11}p_{12} = \frac{\delta'_0}{c_{0|0}}\cdot\left(\frac{\delta'_4\delta_8}{\delta'_2\delta'_6\delta_{12}}\right)^2.\delta'_{12}$$

u. s. w.

hervor. Da nun $c_{0|0}$ immer *positiv* genommen werden kann, und $\frac{\delta_0}{c_{0|0}} = n$, nebst dem quadratischen Factor, immer *positiv* ist, so bestimmt der *letzte* Factor dieser Producte, nämlich δ'_2, δ'_4, δ'_6 u. s. w. *allein* das Zeichen. In den Untersuchungen die sich auf den *Sturm*'schen Satz beziehen, können jene positiven Factoren ganz übergangen und die Determinanten allein berücksichtigt werden. Hierdurch bekommen dann die Reste (5) folgende einfache Form:

$$\Sigma\delta'_{\alpha|2}.x^{n-\alpha-2} \quad ; \quad \Sigma\delta'_{\alpha|6}.x^{n-\alpha-4} \quad ; \quad \Sigma\delta'_{\alpha|10}.x^{n-\alpha-6} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\Sigma\delta'_{\alpha|4}.x^{n-\alpha-3} \quad ; \quad \Sigma\delta'_{\alpha|8}.x^{n-\alpha-5} \quad ; \quad \Sigma\delta'_{\alpha|12}.x^{n-\alpha-7} \quad \text{u. s. w.}$$

und im Allgemeinen ist der $r$te Rest:

$$\text{(16.)} \qquad \Sigma\delta'_{\alpha|2r}.x^{n-\alpha-r-1} \, .$$

Obgleich nun in den Determinanten $\delta'_{s|2m}$ die Coefficienten $c_{r|1}$ und $c_{r|2}$ *symmetrisch* vorkommen, so sind sie doch nicht symmetrisch in Bezug auf die Coefficienten von $\Sigma c_{\alpha|0}.x^{n-\alpha}$, welche gleich weit von dem Anfangsgliede $c_{0|0}x^n$ und dem Schlussgliede $c_{n|0}$ entfernt sind. Dazu wäre nöthig, dass nicht $c_{r|2}$ und $c_{r|1}$ symmetrisch aufträten, sondern $c_{s|2}$ und $c_{n-r-1|1}$, weil

$$c_{r|2} = (r+1)c_{0|0}c_{r+1|0} \quad \text{und} \quad c_{n-r-1|1} = (r+1)c_{n-r-1|0}$$

ist. Die Symmetrie findet nur in dem System der letzten Determinante δ'_{2n-2}, nämlich in

$$(17.)\quad \left\{\begin{array}{cccccccccccc}
c_{0|0} & c_{1|2} & c_{2|2} & \cdots & c_{n-3|2} & c_{n-2|2} & c_{n-1|2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
c_{0|1} & c_{1|1} & c_{2|1} & \cdots & c_{n-3|1} & c_{n-2|1} & c_{n-1|1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_{0|2} & c_{1|2} & \cdots & c_{n-4|2} & c_{n-3|2} & c_{n-2|2} & c_{n-1|2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_{0|1} & c_{1|1} & \cdots & c_{n-4|1} & c_{n-3|1} & c_{n-2|1} & c_{n-1|1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & c_{0|2} & c_{1|2} & c_{2|2} & c_{3|2} & \cdots & c_{n-2|2} & c_{n-1|2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & c_{0|1} & c_{1|1} & c_{2|1} & c_{3|1} & \cdots & c_{n-2|1} & c_{n-1|1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{0|2} & c_{1|2} & c_{2|2} & \cdots & c_{n-3|2} & c_{n-2|2} & c_{n-1|2} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{0|1} & c_{1|1} & c_{2|1} & \cdots & c_{n-3|1} & c_{n-2|1} & c_{n-1|1}
\end{array}\right.$$

Statt. Hier bleibt das Resultat ungeändert, wenn man überall $c_{r|2}$ mit $c_{n-r-1|1}$ vertauscht. In diesem System sind zudem auch die Systeme für alle Determinanten, welche bei der Entwicklung des Kettenbruchs (2 und 4) vorkommen, enthalten. Nimmt man die beiden obersten Querreihen und verbindet der Reihe nach die zweite, dritte u. s. w. senkrechte Reihe mit der ersten, so erhält man die Systeme für δ'_2 ; $\delta'_{1|2}$; $\delta'_{2|2}$ u. s. w. Auf ähnliche Weise geben die vier obersten Reihen die Systeme für die Determinanten δ_4 ; $\delta_{1|4}$; $\delta_{2|4}$ u. s. w.

Wenn man die Werthe, welche für die Coefficienten $c_{r|s}$ entwickelt wurden, in die Gleichung (1) setzt, erhalten sie noch einen andern Zusammenhang unter den verschiedenen Determinanten. Nach (1) ist:

$$c_{r|2q+1} = c_{0|2q}c_{r+1|2q-1} - c_{0|2q-1}c_{r+1|2q} ,$$

oder

$$\frac{c_{r|2q+1}}{c_{0|2q}c_{0|2q-1}} = \frac{c_{r+1|2q-1}}{c_{0|2q-1}} - \frac{c_{r+1|2q}}{c_{0|2q}} ,$$

und dazu ist:

$$\frac{c_{r|2q+1}}{c_{0|2q}c_{0|2q-1}} = \frac{\delta'_{2q-3}\delta'_{r|2q}}{\delta'_{2q-2}\delta'_{2q-1}} \quad ; \quad \frac{c_{r+1|2q-1}}{c_{0|2q-1}} = \frac{\delta'_{r+1|2q-2}}{\delta'_{2q-2}} \quad \text{und} \quad \frac{c_{r+1|2q}}{c_{0|2q}} = \frac{\delta'_{r+1|2q-1}}{\delta'_{2q-1}} ,$$

also ist

$$\frac{\delta'_{2q-3}\delta'_{r|2q}}{\delta'_{2q-2}\delta'_{2q-1}} = \frac{\delta'_{r+1|2q-2}}{\delta'_{2q-2}} - \frac{\delta'_{r+1|2q-1}}{\delta'_{2q-1}} ,$$

oder

$$\delta'_{2q-3}\delta'_{r|2q} = \delta'_{2q-1}\delta'_{r+1|2q-2} - \delta'_{2q-2}\delta'_{r+1|2q-1} .$$

Eben so geht aus $c_{r|2q+2} = c_{0|2q+1}c_{r+1|2q} - c_{0|2q}c_{r+1|2q+1}$

$$\delta'_{2q-2}\delta'_{r|2q+1} = \delta'_{2q}\delta'_{r+1|2q-1} - \delta'_{2q-1}\delta'_{r+1|2q}$$

hervor, und beide Gleichungen lassen sich in folgende:

$$\delta'_s\delta'_{r|s+3} = \delta'_{s+2}\delta'_{r+1|s+1} - \delta'_{s+1}\delta'_{r+1|s+2} \qquad (18.)$$

zusammenfassen. Aus der Gleichung $c_{r|3} = c_{0|2}c_{r+1|1} - c_{0|1}c_{r+1|2}$ ergiebt sich insbesondre:

$$\delta'_{r|2} = \delta'_1\delta'_{r+1|0} - \delta'_0\delta'_{r+1|1},$$

und eben so aus $c_{r|4} = c_{0|3}c_{r+1|2} - c_{0|2}c_{r+1|3}$ die Gleichung

$$\delta'_{r|3} = \delta'_2\delta'_{r+1|1} - \delta'_1\delta'_{r+1|2};$$

die folgende Relation jedoch, welche aus dem Werthe von $c_{r|5}$ hervorgeht, stimmt mit der allgemeinen in (18) überein.

Trier, im December 1852.

12.

Die einfachsten periodischen Functionen.

(Von dem Herrn Professor Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

§. 1.

Bezeichnet man das Product von Functionen

$$f(x-n)f(x-n+1)\ldots.f(x-1)f(x)f(x+1)\ldots.f(x+n-1)f(x+n)$$

durch das leicht verständliche Zeichen

$$\prod_{-n}^{+n} f(x+\lambda),$$

so ist offenbar:

$$(1.)\qquad \prod_{-n}^{+n} f(x+\lambda) = \frac{f(x-n)}{f(x+n+1)} \cdot \prod_{-n}^{+n} \cdot f(x+1+\lambda).$$

Ist nun die Function $f(x)$ so beschaffen, dass, für ein unendlich grosses n,

$$(2.)\qquad f(x-n) = f(x+n+1)$$

gesetzt werden kann, so erhält man

$$(3.)\qquad \prod_{-\infty}^{+\infty} f(x+\lambda) = \prod_{-\infty}^{+\infty} f(x+1+\lambda),$$

oder, kurz:

$$F(x) = F(x+1).$$

Nimmt nun $F(x)$, für jeden Werth von x, selbst einen bestimmten numerischen Werth an, so kann die Function ganz passend *periodisch* genannt werden; denn sie gelangt wieder zu ihrer ursprünglichen Grösse, sobald x um die Einheit zu- oder abgenommen hat.

Wäre dagegen

$$f(x-n) = -f(x+n+1)$$

für ein unendlich grosses n, so würde (1) die Gleichung

$$F(x) = -F(x+1)$$

geben, die selbst wieder zu der Gleichung

$$F(x) = F(x+2)$$

führt, so dass also auch in diesem Falle $F(x)$ *periodisch* genannt werden kann; nur muss sich jetzt x um zwei Einheiten ändern, ehe die Function ihren ersten Werth wieder erreicht.

Zu jedem bestimmten Werthe von x gehört *nur ein einziger* bestimmter Werth der Function $F(x)$; aber ein *gegebener* Werth der Function wird durch *unendlich viele* von einander verschiedene Werthe von x hervorgebracht.

Da

$$\sum_{-n}^{+n} f(x+s) = \sum_{-n}^{+n} f(x+1+s) + f(x+n) - f(x+1+n)$$

ist, so ist auch, wenn die Bedingungsgleichung (2) Statt findet,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(x+s)$$

eine periodische Function, die einer Untersuchung unterworfen werden kann, sobald sie für jeden Werth von x selbst, einen bestimmten Werth annimmt.

Auch die Function

$$a^x$$

würde den Charakter einer periodischen Function annehmen, sobald man für irgend einen Werth n der Veränderlichen x,

$$a^n = 1$$

erhielte, ohne dass deshalb a der Einheit gleich sein müsste. Man sieht aber leicht, dass nur durch imaginäre Werthe von a oder n dieser Bedingung genügt werden kann. Uebrigens liegt der Gedanke an diese letzte Function weniger nahe; sie selbst indessen, so wie auch die vorhergehende, lassen sich auf die zuerst betrachtete zurückführen.

§. 2.

Die einfachste periodische Function würde man aus (3 in §. 1.) erhalten, wenn man $f(x) = x$ setzte; aber ein solches Product

$$\prod_{-\infty}^{+\infty} (x+\lambda)$$

wird für jedes ganze x zu Null, und für jedes gebrochene x unendlich gross, hat

also nicht den Charakter einer stetigen Function von x. Die einfachste Form einer periodischen Function, die einer weitern Untersuchung unterliegt, ist

$$\prod_{-\infty}^{+\infty} \cdot \frac{x+\lambda}{a+\lambda},$$

in welcher a eine Constante bedeutet, die indessen offenbar keine ganze Zahl sein darf, da sonst die Function stets unendlich gross bliebe; ausser für $x = a$.

Um die Eigenschaften eines solchen Products näher zu finden, bringen wir zunächst das Product

$$\prod_{-n}^{+n} \cdot \frac{x+\lambda}{a+\lambda} = F(x)$$

auf die Formen

$$F(x) = \frac{x}{a} \cdot \frac{1-x}{1-a} \cdot \frac{1+x}{1+a} \cdot \frac{2-x}{2-a} \cdot \frac{2+x}{2+a} \cdot \frac{3-x}{3-a} \cdot \frac{3+x}{3+a} \cdots\cdots \frac{n-x}{n-a} \cdot \frac{n+x}{n+a},$$

$$F(x) = \frac{x}{a} \cdot \frac{1^2-x^2}{1^2-a^2} \cdot \frac{2^2-x^2}{2^2-a^2} \cdot \frac{3^2-x^2}{3^2-a^2} \cdots\cdots \frac{n^2-x^2}{n^2-a^2},$$

$$F(x) = \frac{x-x^2}{a-a^2} \cdot \frac{1.2+x-x^2}{1.2+a-a^2} \cdot \frac{2.3+x-x^2}{2.3+a-a^2} \cdot \frac{3.4+x-x^2}{3.4+a-a^2} \cdots\cdots \frac{(n-1)n+x-x^2}{(n-1)n+a-a^2} \cdot \frac{n+x}{n+a}.$$

Stellt nun a einen *positiven echten Bruch* vor, und ist x *positiv* und *kleiner als* a, so sieht man sogleich aus der *zweiten* Form, dass

$$F(x) > \frac{x}{a}$$

ist, denn es wird $\frac{x}{a}$ mit lauter Factoren multiplicirt, die grösser sind als 1. Aus der *dritten* Form ergiebt sich, wenn

$$x - x^2 < a - a^2 \text{ oder } a^2 - x^2 < a - x \text{ oder } a + x < 1$$

ist, dass dann alle Brüche, deren Product $F(x)$ giebt, kleiner sind als 1, dass also auch $F(x)$ kleiner als 1 ist. Aus der *zweiten* Form schliesst man aber:

$$F(-x) = -F(x),$$

daher liegt gewiss die Function

$$\prod_{-\infty}^{+\infty} \cdot \frac{x+\lambda}{a+\lambda}$$

zwischen -1 und $+1$, sobald a ein *positiver echter Bruch* und

$$x < a \quad \text{und} \quad a + x < 1$$

ist. Für $x = a$ ist $F(x) = 1$ und für $a + x = 1$, ist $x - x^2 = xa$ und $a - a^2 = ax$, also auch $F(x)$ in diesem Falle gleich 1; wie sich aus der *dritten* Form ergiebt. Es *convergirt* also das Product

$$\prod_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\lambda}{a+\lambda} = \frac{x}{a} \cdot \frac{1-x}{1-a} \cdot \frac{1+x}{1+a} \cdot \frac{2-x}{2-a} \cdot \frac{2+x}{2+a} \cdot \frac{3-x}{3-a} \cdot \frac{3+x}{3+a} \ldots\ldots = F(x)$$

stets gegen eine bestimmte, zwischen -1 und $+1$ liegende Grenze, wenn man es in der hier angegebenen Weise berechnet, so dass man den mittelsten Factor zuerst nimmt und stets zwei gleich weit von ihm abstehende Factoren mit ihm vereinigt.

§. 3.

Da

$$\prod_{-n}^{+n} \frac{x+\lambda}{a+\lambda} = \frac{x-n}{x+1+n} \prod_{-n}^{+n} \frac{x+1+\lambda}{a+\lambda}$$

ist, so ist

$$\prod_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\lambda}{a+\lambda} = -\prod_{\infty}^{+\infty} \frac{x+1+\lambda}{a+\lambda},$$

oder

$$(1.) \qquad F(x) = -F(x+1).$$

Setzt man in dieser Gleichung $x+1$ statt x, so erhält man

$$(2.) \quad F(x+1) = -F(x+2) \quad \text{oder} \quad F(x) = F(x+2).$$

Ferner ist, wie schon oben bemerkt,

$$F(x) = \prod_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\lambda}{a+\lambda} = \prod_{-\infty}^{-1} \frac{x+\lambda}{a+\lambda} \cdot \frac{x}{a} \prod_{+1}^{+\infty} \frac{x+\lambda}{a+\lambda} = \frac{x}{a} \prod_{+\infty}^{+1} \frac{x-\lambda}{a-\lambda} \prod_{+1}^{+\infty} \frac{x+\lambda}{a+\lambda} = \frac{x}{a} \prod_{+1}^{+\infty} \frac{\lambda^2 - x^2}{\lambda^2 - a^2}$$

woraus

$$(3.) \qquad F(-x) = -F(x)$$

folgt. Setzt man in (1) $x - \frac{1}{2}$ statt x, so wird, mit Rücksicht auf (3),

$$(4.) \qquad F(x+\tfrac{1}{2}) = -F(x-\tfrac{1}{2}) = F(\tfrac{1}{2}-x).$$

Es ist also $F(x)$ eine *periodische* Function von x, welche alle Werthe

von -1 bis $+1$ durchläuft, während x um zwei Einheiten wächst; wie sich aus (2) ergiebt. Aus (4) folgt aber, dass, während x von $\frac{1}{2}$ bis 1 wächst, $F(x)$ dieselben Werthe annimmt, die es erlangt, wenn x von $\frac{1}{2}$ bis 0 abnimmt. Aus (1) erhellet dann noch, dass, während x von 1 bis 2 sich ändert, $F(x)$ *dieselben* Werthe, aber mit entgegengesetzten Zeichen erreicht, die es annahm, während x von 0 bis 1 wuchs. Da man also die Function $F(x)$ für alle Werthe von x kennt, sobald man sie nur für alle Werthe von x, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen, berechnet hat, und da ausserdem

$$x \leqq a \quad \text{und} \quad a + x \leqq 1$$

sein muss, so kann die Constante a offenbar nur $\frac{1}{2}$ sein.

§. 4.

Die Aufgabe ist daher jetzt: die Eigenschaften der Function

$$\prod_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\lambda}{\frac{1}{2}+\lambda} = \prod_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda+2x}{2\lambda+1} = \varphi(x)$$

zu untersuchen; die wir künftig durch $\varphi(x)$ bezeichnen wollen.

Die bereits gefundenen Eigenschaften dieser Function $\varphi(x)$ sind:

$$\varphi(0) = 0 \quad ; \quad \varphi(\tfrac{1}{2}) = 1 \quad ; \quad \varphi(-x) = -\varphi(x) \, ;$$

ferner:

$$\varphi(x+1) = -\varphi(x) \, ,$$
$$\varphi(x+2) = -\varphi(x+1) = \varphi(x) \, ,$$
$$\varphi(x+3) = \varphi(x+1) = -\varphi(x),$$
$$\varphi(x+4) = -\varphi(x+1) = \varphi(x) \, ,$$
$$\ldots\ldots\ldots

§. 5.

Die Function $\varphi(x)$ hat die merkwürdige Eigenschaft, dass sich von ihr ein *constanter Factor absondern* lässt. Es ist nämlich

$$\varphi(x) = \prod_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda+2x}{2\lambda+1} = \prod_{-\infty}^{-1} \frac{2(\lambda+x)}{2\lambda+1} \cdot 2x \cdot \prod_{+1}^{+\infty} \frac{2(\lambda+x)}{2\lambda+1} = 2x \prod_{+1}^{+\infty} \frac{2(\lambda-x)}{2\lambda-1} \prod_{+1}^{+\infty} \frac{2(\lambda+x)}{2\lambda+1}$$

$$= 2x \prod_{+1}^{+\infty} \frac{4(\lambda^2-x^2)}{4\lambda^2-1} = 2x \prod_{+1}^{+\infty} \frac{4\lambda^2}{4\lambda^2-1}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right) = 2\prod_{+1}^{+\infty} \frac{4\lambda^2}{4\lambda^2-1} \cdot x \prod_{+1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right).$$

Der auf diese Weise hervorgetretene Coefficient soll der Kürze wegen durch π bezeichnet werden, so dass also

$$(1.) \qquad \pi = 2 \prod_{+1}^{+\infty} \frac{4\lambda^2}{4\lambda^2-1}$$

und daher

$$(2.) \qquad \varphi(x) = \varphi a \prod_{+1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)$$

ist; wobei zugleich bemerkt werden mag, dass für ein unendlich kleines x,

$$(3.) \qquad \frac{\varphi(x)}{x} = \pi \quad \text{oder} \quad \frac{\varphi(0)}{0} = \pi \quad \text{ist.}$$

Nimmt man in dem Ausdrucke für die Zahl π, nemlich in

$$\pi = 2 \prod_{+1}^{+\infty} \frac{2\lambda}{2\lambda-1} \cdot \frac{2\lambda}{2\lambda+1} = 2 \cdot \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{11}\cdots\cdots$$

eine *ungerade* Anzahl von Factoren, so erhält man eine *untere* Grenze für diese Zahl, während sich durch eine *gerade* Anzahl von Factoren eine *obere* findet. Die 12 ersten hier niedergeschriebenen Factoren geben für π die Werthe

$$\left.\begin{matrix} 2{,}000 \\ 2{,}667 \\ 2{,}844 \\ 2{,}925 \\ 2{,}972 \\ 3{,}002 \end{matrix}\right\} < \pi < \left\{\begin{matrix} 4{,}000 \\ 3{,}556 \\ 3{,}413 \\ 3{,}343 \\ 3{,}302 \\ 3{,}275\,, \end{matrix}\right.$$

so dass also der Coefficient π etwas grösser als 3 sein muss.

Aus (1) ergiebt sich sogleich, wenn n eine *positive ganze* Zahl ist:

$$2\overset{+n}{\underset{+1}{\Pi}}\frac{2\lambda}{2\lambda-1}\overset{+n}{\underset{+1}{\Pi}}\frac{2\lambda}{2\lambda+1}<\pi<2\overset{n+1}{\underset{+1}{\Pi}}\frac{2\lambda}{2\lambda-1}\overset{+}{\underset{+1}{\Pi}}\frac{2\lambda}{2\lambda+1}.$$

Es ist aber

$$\overset{+n}{\underset{+1}{\Pi}}\frac{2\lambda}{2\lambda-1}=(2n+1)\overset{+n}{\underset{+1}{\Pi}}\frac{2\lambda}{2\lambda+1}\quad\text{und}\quad\overset{n+1}{\underset{+1}{\Pi}}\frac{2\lambda}{2\lambda-1}=(2n+2)\overset{+n}{\underset{+1}{\Pi}}\frac{2\lambda}{2\lambda+1}.$$

Setzt man diese Werthe in die vorige Ungleichung, so ergiebt sich:

$$2(2n+1)\overset{+n}{\underset{+1}{\Pi}}\left(\frac{2\lambda}{2\lambda+1}\right)^2<\pi<2(2n+2)\overset{+n}{\underset{+1}{\Pi}}\left(\frac{2\lambda}{2\lambda+1}\right)^2.$$

Das *arithmetische Mittel* zwischen diesen beiden Grenzwerthen von π,

$$(4n+3)\overset{+n}{\underset{+1}{\Pi}}\left(\frac{2\lambda}{2\lambda+1}\right)^2,$$

giebt übrigens für diese Zahl einen weit genaueren Werth als jede einzelne der beiden Grenzen; denn z. B. für $n=15$ erhält man

$$\pi=3{,}1412\,,$$

welcher Werth nur um 0,0003 zu klein ist.

§. 6.

Es wird sich im Verlauf des Folgenden ergeben, dass die hier mit π bezeichnete Zahl wirklich die *Ludolph*sche Zahl ist, und ich will sogleich in diesem Paragraph eine ihrer Eigenschaften nachweisen, die in der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* benutzt wird, und die sich hier ganz bequem ableiten lässt.

Aus der untern, für π in (§. 5) gefundenen Grenze ergiebt sich sogleich, dass für ein unendlich grosses n,

$$\overset{+n}{\underset{+1}{\Pi}}\frac{2\lambda}{2\lambda+1}=\sqrt{((2n+1)\tfrac{1}{2}\pi)}$$

ist. Bedient man sich der factoriellen Bezeichnung des Herausgebers dieses Journals, die hier für den gegenwärtigen Zweck bequemer ist als das Productenzeichen, so ist

$$\left(\frac{2,+2}{1,+2}\right)^n=\sqrt{((2n+1)\tfrac{1}{2}\pi)}.$$

Es ist aber

$$(1,+1)^{2n} = 1.2.3...2n = 1.3.5.7...2n-1 \times 2.4.6.8...2n = (1,+2)^n 2^n (1,+1)^n.$$

Also

$$(1,+2)^n = \frac{(1,+1)^{2n}}{2^n(1,+1)^n} = \frac{(n+1,+1)^n}{2^n} = \frac{(2n,-1)^n}{2^n},$$

und daher

$$\left(\frac{1,+2}{2,+2}\right)^n = \frac{(2n,-1)^n}{2^n(2,+2)^n} = \frac{1}{2^{2n}}\left(\frac{2n,-1}{1,+1}\right)^n = \sqrt{\left(\frac{2}{(2n+1)\pi}\right)}.$$

Offenbar ist

$$1 = \frac{(1+1)^{2n}}{2^{2n}},$$

und das mittelste Glied in der Entwicklung des Binoms $(1+1)^{2n}$ ist $\left(\frac{2n,-1}{1,+1}\right)^n$; daher nähert sich das mittelste Glied in der Entwicklung des Binoms $1 = \frac{(1+1)^n}{2^{2n}}$ um so mehr der Grösse $\sqrt{\left(\frac{2}{(2n+1)\pi}\right)}$, je grösser n ist; welches der erwähnte Satz ist, den man in der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* anwendet.

§. 7.

Ehe ich in der Untersuchung der Eigenschaften der einfachsten periodischen Functionen weiter gehe, will ich noch einen eigenthümlichen Beweis für den Werth eines wichtigen *bestimmten Integrals* geben; der sich an das Vorhergehende unmittelbar anschliesst.

Bezeichnet man, der Kürze wegen, das mittelste Glied in der binomischen Entwicklung des Ausdrucks

$$1 = \frac{(1+1)^{2n}}{2^{2n}}$$

durch a, und das $m$te Glied, von diesem mittelsten an gerechnet, durch $f(m)$, so ist:

$$f(m) = a.\frac{n(n-1)(n-2).....(n-m+1)}{(n+1)(n+2)(n+3).....(n+m)} = a.\frac{n-m+1}{n+1}.\frac{n-m+2}{n+2}.\frac{n-m+3}{n+3}.....\frac{n-m+m}{n+m}$$

$$= a.\left(1-\frac{m}{n+1}\right)\left(1-\frac{m}{n+2}\right)\left(1-\frac{m}{n+3}\right)...\left(1-\frac{m}{n+m}\right)$$

$$= a.\frac{1}{\frac{n+m}{n}.\frac{n+m-1}{n-1}.\frac{n+m-2}{n-2}.....\frac{n+1}{n-m+1}}$$

$$= a.\frac{1}{(1+\frac{m}{n})(1+\frac{m}{n-1})(1+\frac{m}{n-2})\cdots\cdots(1+\frac{m}{n-m+1})}.$$

Es ist aber

$$\left(1-\frac{m}{n+1}\right)\left(1-\frac{m}{n+2}\right)\left(1-\frac{m}{n+3}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{m}{n+m}\right)<\left(1-\frac{m}{n}\right)^m \quad \text{und}$$

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(1+\frac{m}{n-1}\right)\left(1+\frac{m}{n-2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{m}{n-m+1}\right)>\left(1+\frac{m}{n}\right)^m, \quad \text{daher}$$

$$f(m)>a\left(1-\frac{m}{n}\right)^m \quad \text{und} \quad f(m)<a\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-m}.$$

Für ein unendlich grosses n ist aber, wenn e die *Grundzahl der natürlichen Logarithmen* bedeutet,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x,$$

daher ist

$$\left(1-\frac{m}{n}\right)^m=e^{-\frac{m^2}{n}} \quad \text{und} \quad \left(1+\frac{m}{n}\right)^{-m}=e^{-\frac{m^2}{n}}.$$

Setzt man nun $n=\mu^2$, so wird offenbar, da jetzt beide Grenzen für $f(m)$ zusammenfallen und nach (§. 6)

$$a=\frac{1}{\sqrt{[(\mu^2+\frac{1}{2})\pi]}}=\frac{1}{\mu\sqrt{\pi}}$$

ist:

$$f(m)=\frac{1}{\mu\sqrt{\pi}}e^{-(\frac{m}{\mu})^2}.$$

Nach diesen Vorbereitungen sieht man sofort, dass

$$1=\frac{(1+1)^{2\mu^2}}{2^{2\mu^2}}=f(\mu^2)+f(\mu^2-1)+f(\mu^2-2)+\ldots.+f(1)+f(0)+f(1)+\ldots.+f(\mu^2)$$

$$=2(f(0)+f(1)+\ldots..+f(\mu^2))$$

$$=\frac{2}{\mu\sqrt{\pi}}\left\{1+e^{-(\frac{1}{\mu})^2}+e^{-(\frac{2}{\mu})^2}+e^{-(\frac{3}{\mu})^2}+\ldots.+e^{-(\frac{\mu^2}{\mu})^2}\right\}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

also

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{ist.}$$

§. 8.

Wir setzen jetzt die in (§. 5) abgebrochenen Untersuchungen weiter fort.

Das *Complement* der Function $\varphi(x)$ soll durch $\psi(x)$ bezeichnet werden, so dass also

$$\psi(x) = \varphi(\tfrac{1}{2} - x)$$

gesetzt werden muss. Dann ist für ein unendlich grosses n:

$$\psi(x) = \varphi(\tfrac{1}{2}-x) = \prod_{-n}^{+n} \frac{2\lambda+1-2x}{2\lambda+1} = \prod_{-n}^{+n}\left(1-\frac{2x}{2\lambda+1}\right) = \prod_{-n}^{-1}\left(1-\frac{2x}{2\lambda+1}\right)\prod_{+0}^{+n}\left(1-\frac{2x}{2\lambda+1}\right)$$

$$= \prod_{+n}^{+1}\left(1+\frac{2x}{2\lambda-1}\right)\prod_{+0}^{+n}\left(1-\frac{2x}{2\lambda+1}\right) = \left(1-\frac{2x}{2n+1}\right)\prod_{+1}^{+n}\left(1+\frac{2x}{2\lambda-1}\right)\prod_{+1}^{+n}\left(1-\frac{2x}{2\lambda-1}\right)$$

$$= \left(1-\frac{2x}{2n+1}\right)\prod_{+1}^{+n}\left(1-\frac{4x^2}{(2\lambda-1)^2}\right).$$

Lässt man den Factor $1-\frac{2x}{2n+1}$ weg, und setzt $n=\infty$, so wird

$$\psi(x) = \prod_{+1}^{+\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2\lambda-1)^2}\right) = \prod_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\lambda+1-2x}{2\lambda+1},$$

während

$$\varphi(x) = \pi x \prod_{+1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right) = \prod_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\lambda+2x}{2\lambda+1}$$

ist. Bei dem ersten Producte, durch welches hier die Function $\psi(x)$ dargestellt wird, ist nicht zu übersehen, dass es einen Factor weniger enthält, als das erste Product, welches die Function $\varphi(x)$ darstellt.

Die Haupt-Eigenschaften der Function $\psi(x)$ sind nun folgende:

$$\psi(0)=1 \quad , \quad \psi(\tfrac{1}{2})=0 \quad , \quad \psi(-x)=\psi(x) \quad , \quad \psi(x)=\varphi(\tfrac{1}{2}\pm x)$$

$$\psi(2n\pm x)=\psi(x) \quad , \quad \psi(2n+1\pm x)=-\psi(x) \quad , \quad \psi(x+n)=(-1)^n\psi(x).$$

§. 9.

Die Function $\frac{1}{\varphi(x)}$ lässt sich leicht in *Partialbrüche* zerlegen. Nennt man die einzelnen Zähler dieser Partialbrüche $\ldots\ldots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ so hat man zu ihrer Bestimmung die Gleichung

$$\frac{1}{\varphi x} = \prod_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda+1}{2\lambda+2x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_s}{x-s}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $x-s$ und setzt dann $x=s$, so findet man nach (§. 4, 1 und §. 5, 3):

$$\alpha_s = \left(\frac{x-s}{\varphi x}\right)_{x=s} = \left\{\frac{x-s}{(-1)^s \varphi(x-s)}\right\}_{x=s} = \frac{1}{(-1)^s \pi} = \frac{(-1)}{\pi}.$$

Es ist also

$$\frac{1}{\varphi x} = \prod_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda+1}{2\lambda+2x} = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{x-s},$$

oder

$$\frac{\pi}{\varphi x} = \ldots\ldots \frac{-5}{2x-6}\cdot\frac{-3}{2x-4}\cdot\frac{-1}{2x-2}\cdot\frac{\pi}{2x}\cdot\frac{3}{2x+2}\cdot\frac{5}{2x+4}\cdot\frac{7}{2x+6}\ldots\ldots$$

$$= \frac{\pi}{2x}\cdot\frac{1.3}{4(1-x^2)}\cdot\frac{3.5}{4(4-x^2)}\cdot\frac{5.7}{4(9-x^2)}\cdot\frac{7.9}{4(16-x^2)}\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{x} + 2x\left\{\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{4-x^2} + \frac{1}{9-x^2} - \frac{1}{16-x^2} + \ldots\ldots\right\} = \frac{1}{x} - 2x \sum_{+1}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{s^2-x^2}.$$

Man bemerke hier noch, dass auch

$$\frac{\pi}{\varphi x} = \frac{1}{x} \prod_{+1}^{+\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda^2-x^2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{4}{4-x^2}\cdot\frac{9}{9-x^2}\cdot\frac{16}{16-x^2}\cdot\frac{25}{25-x^2}\ldots\ldots$$

ist. Da $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$ ist, so erhält man aus dem vorletzten Summen-Ausdrucke, wenn man $x = \frac{1}{2}$ setzt, die gleichen Brüche addirt und die Gleichung durch 4 dividirt:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots$$

Setzt man übrigens

$$\frac{\pi}{\varphi x} = \frac{1}{x} \prod_{+1}^{+n} \frac{\lambda^2}{\lambda^2-x^2}$$

und betrachtet n als eine endliche *positive ganze Zahl*, so erhält man auch leicht:

$$\frac{\pi}{\varphi x} = \sum_{-n}^{+n} (-1)^s \frac{(n,-1)^{-s}(n,-1)^{+s}}{x+s};$$

wenn man nämlich berücksichtigt, dass nach der erwähnten factoriellen Bezeichnung,

$$(a, + b)^{-n} = \frac{1}{(a, - b, - b)^n}$$

sein muss. Für $n = \infty$ geht die Formel in die oben angegebene über.

§. 10.

Eine Zerlegung der Function $\frac{1}{\psi(x)}$ in *Partialbrüche* findet sich sogleich, wenn man in den Formeln des vorigen Paragraph $\frac{1}{2} - x$ statt x setzt. Man erhält auf diese Weise:

$$\frac{\pi}{\psi(x)} = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{1 - 2x - 2s},$$

also

$$\frac{\pi}{2\psi(x)} = \cdots\cdots - \frac{1}{2x-5} + \frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} - \cdots\cdots$$

$$= \frac{2}{1-4x^2} - \frac{6}{9-4x^2} + \frac{10}{25-4x^2} - \frac{14}{49-4x^2} + \cdots\cdots = 2 \sum_{+1}^{+\infty} \frac{(-1)^s (2s-1)}{4x^2 - (2s-1)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{1-4x^2} \cdot \frac{9}{9-4x^2} \cdot \frac{25}{25-4x^2} \cdot \frac{49}{49-4x^2} \cdots\cdots$$

§. 11.

Da das Product

$$\psi x = \prod_{-1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2\lambda - 1)^2}\right)$$

einen Factor weniger enthält als das Product

$$\varphi x = \pi x \prod_{+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2}\right),$$

so kann man auch den Bruch $\frac{\psi x}{\varphi x}$ in *Partialbrüche* zerlegen. Verfährt man wie in (§. 9), so hat man nur

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_s}{x - s}$$

zu setzen, diese Gleichung mit $x - s$ zu multipliciren und dann $x = s$ anzunehmen, wodurch sich

$$\alpha_s = \left\{\frac{(x-s)\psi x}{\varphi x}\right\}_{x=s} = \left\{\frac{(x-s)\psi(x-s)}{\varphi(x-s)}\right\}_{x=s} = \frac{1}{\pi}$$

findet; denn es ist $\psi 0 = 1$ und $\frac{\varphi(0)}{0} = \pi$, also

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x-s} = \frac{1}{\pi}\left\{\cdots\cdots\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{-3}+\cdots\cdots\right\}$$

oder

$$\frac{\pi\psi x}{\varphi x} = \frac{1}{x} - 2x\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{9-x^2}+\frac{1}{16-x^2}+\cdots\cdots\right) = \frac{1}{x} - 2x.\sum_{+1}^{+\infty}\frac{1}{s^2-x^2}$$

Setzt man in diesen Formeln $\frac{1}{2} - x$ statt x, so erhält man

$$\frac{\pi\varphi x}{\psi x} = 2\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-2x-2s},$$

also

$$\frac{\pi\varphi x}{2\psi x} = \cdots\cdots - \frac{1}{2x-5} - \frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+3} - \frac{1}{2x+5} - \cdots\cdots$$

$$= 4x\left(\frac{1}{1-4x^2}+\frac{1}{9-4x^2}+\frac{1}{25-4x^2}+\frac{1}{49-4x^2}+\cdots\cdots\right) = 4x.\sum_{+1}^{+\infty}\frac{1}{(2s-1)^2-x^2}\cdot$$

Die vier in den letzten drei Paragraphen entwickelten Formeln stelle ich der Uebersicht wegen noch einmal zusammen; nemlich:

(1.) $$\frac{\pi}{\varphi x} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{x-s},$$

(2.) $$\frac{\pi}{\psi x} = 2\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{1-2x-2s},$$

(3.) $$\pi\frac{\psi x}{\varphi x} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x-s},$$

(4.) $$\pi\frac{\varphi x}{\psi x} = 2\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-2x-2s}\cdot$$

Setzt man, ähnlich wie in (§. 9),

$$\frac{\pi\psi x}{\varphi x} = \frac{1}{x}\cdot\prod_{+1}^{+n}\frac{(2\lambda-1)^2-4x^2}{\lambda^2-x^2}\cdot\frac{\lambda^2}{(2\lambda-1)^2},$$

so findet sich

$$\frac{\pi\psi x}{\varphi x} = \sum_{-n}^{+n}\left(\frac{n,-1}{2n-1,-2}\right)^{s}\left(\frac{n,-1}{2n-1,-2}\right)^{-s}\cdot\frac{1}{x+s}\,.$$

Für ein unendlich grosses n geht diese Formel in die Gleichung (3) über.

§. 12.

Da der Bruch $\frac{\varphi(x+a)}{\varphi(x)}$ im Zähler und Nenner gleich viel Factoren hat, so kann er in dieser Gestalt *nicht* in Partialbrüche zerlegt werden; wohl aber kann es mit dem Bruche

$$\frac{\varphi(x+a)}{(x+a)\varphi(x)}$$

geschehen. Wenn aber s eine ganze Zahl bedeutet, so ist dieser Bruch dem andern

$$\frac{\varphi(x-s+a)}{(x+a)\varphi(x-s)}$$

gleich; wie aus (1, §. 4) erhellet. Setzt man also

$$\frac{\varphi(x+a)}{(x+a)\varphi(x)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha_s}{x-s}\,,$$

so verfahre man, um α_s zu bestimmen, ganz wie in (§. 9). Man erhält dann:

$$\alpha_s = \left\{\frac{(x-s)\varphi(x-s+a)}{(x+a)\varphi(x-s)}\right\}_{x=s} = \frac{\varphi(a)}{\pi(s+a)}\,,$$

also

$$(1.)\quad \frac{\varphi(x+a)}{\varphi(x)} = \frac{(x+a)\varphi(a)}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(s+x)(x-s)} = \frac{\varphi(a)}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{s-a}+\frac{1}{x-s}\right\}.$$

Benutzt man nun die Gleichung (3, in §. 11) und multiplicirt die zuletzt gefundene Gleichung mit $\varphi(x)$, so findet man die für die Theorie der Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ wichtige Formel:

$$(2.)\qquad \varphi(x+a) = \varphi(x)\psi(a)+\psi(x)\varphi(a)\,.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung erst $-a$ mit $+a$, setzt dann in der so gebildeten neuen Formel $\frac{1}{2}-x$ statt x und vertauscht in dieser dritten wieder $-a$ mit $+a$, so erhält man noch die drei folgenden Gleichungen:

$$\textbf{(3.)} \qquad \varphi(x-a) = \varphi(x)\psi(a) - \psi(x)\varphi(a)\,,$$

$$\textbf{(4.)} \qquad \psi(x+a) = \psi(x)\psi(a) - \varphi(x)\varphi(a)\,,$$

$$\textbf{(5.)} \qquad \psi(x-a) = \psi(x)\psi(a) + \varphi(x)\varphi(a)\,.$$

§. 13.

Aus der Formel (1, in §. 12) lässt sich auch eine andere ableiten, wenn man in ihr a mit $-a$ vertauscht und sie in der Gestalt

$$\frac{\pi\varphi(x-a)}{(x-a)\varphi(x)\varphi(a)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(a-s)(x-s)}$$

schreibt. Setzt man nun $a = x$ und erwägt, dass $\frac{\varphi(0)}{0} = \pi$ ist, so erhält man:

$$\textbf{(1.)} \qquad \frac{\pi^2}{(\varphi x)^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-s)^2}\,.$$

Für $x = \frac{1}{2}$ ergiebt sich aus dieser Gleichung, da $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$ ist:

$$\pi^2 = 4\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2s-1)^2} = 8\sum_{+0}^{+\infty}\frac{1}{(2s+1)^2}\,,$$

also

$$\textbf{(2.)} \qquad \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \cdots\cdots$$

§. 14.

Es lässt sich zu den vier Gleichungen in (§. 12) auch noch auf eine ganz andere Weise gelangen, die schneller zum Ziele führt, als die dortige.

Wenn nämlich $F(x,y)$ eine Function von x und y ist, die sich nach steigenden Potenzen von x entwickeln lässt und für $x = 0$ einen endlichen Werth $F(0,y)$ annimmt, ausserdem aber verschwindet, wenn x die Werthe $a,b,c,\ldots\ldots$ erlangt, so muss sie offenbar von der Form

$$F(x,y) = F(0,y)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1-\frac{x}{c}\right)\cdots\cdots$$

sein. Diese Gleichung gilt für jeden Werth von y und verwandelt sich z. B. für $y = \alpha$ in

$$F(x,\alpha) = F(0,\alpha)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1-\frac{x}{c}\right)$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man also:

$$(1.) \qquad F(0,\alpha)F(x,y) = F(x,\alpha)F(0,y)\,.$$

Dieser allgemeine Satz lässt sich auf unsere Angabe anwenden; denn offenbar hat die Function

$$\varphi(y+x)+\varphi(y-x)$$

die von der Function $F(x,y)$ vorausgesetzte Eigenschaft, welche nöthig ist, damit die Formel (1) Statt finde. Denn es ist

$$\psi(y) = \varphi(\tfrac{1}{2}-y) = -\varphi(y-\tfrac{1}{2})\,,\ \text{und auch}\ \psi(y) = \varphi(\tfrac{1}{2}+y),$$

weil $\psi(-y) = \psi(y)$. Ferner ist für eine ganze Zahl n:

$$\varphi(y+n) = (-1)^n\varphi(y)\,,\quad \text{also}\ \varphi(y+n+\tfrac{1}{2}) = (-1)^n\varphi(y+\tfrac{1}{2}) = (-1)^n\psi(y),$$
$$\varphi(y-n) = (-1)^n\varphi(y)\,,\quad \text{also}\ \varphi(y-n-\tfrac{1}{2}) = (-1)^n\varphi(y-\tfrac{1}{2}) = -(-1)^n\psi(y),$$

folglich

$$(2.) \qquad \varphi(y+n+\tfrac{1}{2})+\varphi(y-n-\tfrac{1}{2}) = 0\,.$$

Setzt man also

$$F(x,y) = \varphi(y+x)+\varphi(y-x)\,,$$

so verschwindet diese Function wenn man dem x die Werthe $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$ giebt; und nimmt man $\alpha = \frac{1}{2}$, so wird

$$F(0,y) = 2\varphi(y) \quad ; \quad F(0,\alpha) = F(0,\tfrac{1}{2}) = 2\varphi(\tfrac{1}{2}) = 2\,;$$
$$F(x,\alpha) = F(x,\tfrac{1}{2}) = \varphi(\tfrac{1}{2}+x)+\varphi(\tfrac{1}{2}-x) = 2\psi(x)\,,$$

und daher verwandelt sich (1) in

$$(3.) \qquad \varphi(y+x)+\varphi(y-x) = 2\varphi(y)\psi(x)\,.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung x und y und erwägt dass $\varphi(x-y) = -\varphi(y-x)$ ist, so erhält man

$$(4.) \qquad \varphi(y+x)-\varphi(y-x) = 2\varphi(x)\psi(y)$$

Für $\frac{1}{2}-y$ statt y verwandeln sich diese beiden Gleichungen in:

$$(5.) \qquad \psi(y-x)+\psi(y+x)=2\psi(y)\psi(x)\,,$$

$$(6.) \qquad \psi(y-x)-\psi(y+x)=2\varphi(x)\varphi(y)\,.$$

Die *Summe* der Gleichungen (2 und 3) und ihre *Differenz* giebt die Gleichungen

$$(7.) \qquad \varphi(x+y)=\varphi(x)\psi(y)+\psi(x)\varphi(y)\,,$$

$$(8.) \qquad \varphi(x-y)=\varphi(x)\psi(y)-\psi(x)\varphi(y)\,.$$

Eben so erhält man aus den Gleichungen (4 und 5) die beiden andern:

$$(9.) \qquad \psi(x+y)=\psi(x)\psi(y)-\varphi(x)\varphi(y)\,,$$

$$(10.) \qquad \psi(x-y)=\psi(x)\psi(y)+\varphi(x)\varphi(y)\,.$$

Diese vier letzten Gleichungen sind die in (§. 12) entwickelten.

§. 15.

Da $\psi(0)=1$ ist, so erhält man aus (9 in §. 14), für $y=x$:

$$(1.) \qquad (\psi x)^2+(\varphi x)^2=1;$$

durch welche Gleichung die Functionen φx und ψx auf einander zurückgeführt werden können.

Setzt man in (3, §. 14) $y=\alpha+\frac{1}{2}\partial x$ und $x=\frac{1}{2}\partial\alpha$ und dividirt die Gleichung durch $\partial\alpha$, so ergiebt sich aus dieser Gleichung die folgende:

$$\frac{\varphi(\alpha+\partial\alpha)-\varphi(\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{\varphi(\frac{1}{2}\partial\alpha)}{\frac{1}{2}\partial\alpha}\cdot\psi\left(\alpha+\tfrac{1}{2}\partial\alpha\right).$$

Da aber $\frac{\varphi(0)}{0}=\pi$, so ist für ein unendlich kleines $\partial\alpha$:

$$(2.) \qquad \frac{\partial\varphi(\alpha)}{\partial\alpha}=\pi\psi(\alpha).$$

Vertauscht man hier α mit $\frac{1}{2}-\alpha$, so erhält man

$$(3.) \qquad \frac{\partial\psi(\alpha)}{\partial\alpha}=-\pi\varphi(\alpha)$$

Mit Hülfe dieser Differentialquotienten lassen sich die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ durch Anwendung des *Maclaurin*'schen Satzes in *Reihen* entwickeln, die nach Potenzen von α fortschreiten. Man erhält, wenn man $\alpha = \frac{x}{\pi}$ setzt:

$$(4.) \qquad \psi\left(\frac{x}{\pi}\right) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$(5.) \qquad \varphi\left(\frac{x}{\pi}\right) = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Diese Entwicklung hätte bekanntlich auch noch auf vielfältig andere Weise ausgeführt werden können.

16.

Die Formel (1. §. 15.) führt zunächst auf den Gedanken, die Functionen φx und ψx *geometrisch* darzustellen; und zwar nicht etwa so, dass man auf einer geraden Linie einen Anfangspunct annimmt, x als Abscisse auf dieser Linie abschneidet und die Functionen φx und ψx als zugehörige Ordinaten aufträgt, sondern so, dass man einen *Kreis AECBD* zeichnet, dessen Radius der Einheit gleich ist, in demselben zwei aufeinander senkrechte Durchmesser AMB und CMD und aus dem Mittelpunct M einen Radius ME zieht, dessen Projectionen MF und MG auf die Durchmesser AM und CM, die Functionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ darstellen. Da nun

$$\begin{array}{ll} \psi(0) = +1 & \varphi(0) = +0 \\ \psi(\frac{1}{2}) = +0 & \varphi(\frac{1}{2}) = +1 \\ \psi(1) = -1 & \varphi(1) = +0 \\ \psi(\frac{3}{2}) = +0 & \varphi(\frac{3}{2}) = -1 \\ \psi(2) = +1 & \varphi(2) = +0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array}$$

ist, so ergeben sich die Grössen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ als Functionen des *Bogens AE*, dessen Anfangspunct A ist, der aber nicht selbst durch x repräsensirt wird, sondern dieser Veränderlichen nur proportional ist. Dieser Bogen AE kann durch px bezeichnet werden, wenn p die Länge des Halbkreises $AECB$ darstellt. Es ist aber leicht, geometrisch zu beweisen, dass das Verhältniss $\frac{FE}{AE}$ der *Einheit* gleich wird, wenn beide Linien bis zum Verschwinden klein werden; daher ist

$$\left(\frac{\varphi x}{p x}\right)_{x=0} = 1.$$

Es ergab sich aber bereits $\left(\frac{\varphi x}{x}\right)_{x=0} = \pi$; daher ist $\frac{\pi}{p} = 1$, oder die mit π bezeichnete Zahl drückt in einem Kreise, dessen Radius 1 ist, die Länge des Halbkreises aus.

Hieraus und aus den Gleichungen (4 u. 5 §. 15) erhellet, dass die Functionen φ und ψ nichts anderes sind, als die mit dem Namen *Sinus* und *Cosinus* bezeichneten Kreisfunctionen, oder dass

$$\varphi(x) = \sin \pi x \quad \text{und} \quad \psi(x) = \cos \pi x$$

ist.

§. 17.

Nachdem die Formeln (6 u. 8 §. 14.), nämlich

$$\varphi(x+y) = \varphi x \psi y + \varphi y \psi x$$
$$\psi(x+y) = \psi x \psi y - \varphi x \varphi y$$

gefunden sind, bietet sich zunächst der Gedanke dar, beide *in eine einzige symbolische Formel* zusammen zu fassen. Bezeichnet man nämlich $\sqrt{-1}$ durch i, so ist die erwähnte Formel:

$$(1.) \qquad \psi(x+y) + i\varphi(x+y) = (\psi x + i\varphi x)(\psi y + i\varphi y);$$

denn sie zerfällt in die beiden obigen, wenn man die reellen Theile beider Seiten, dieser Gleichung einander gleich setzt, und eben so mit den Coefficienten von i verfährt

Die Formel lässt sich leicht zu dieser:

$$\psi(x+y+z) + i\varphi(x+y+z) = (\psi x + i\varphi x)(\psi y + i\varphi y)(\psi z + i\varphi z)$$

erweitern, aus welcher man dann durch Wiederholung der hier benutzten Operation leicht die Formel

$$(2.) \qquad \psi(n\lambda) + i\varphi(nx) = (\psi x + i\varphi x)^n$$

findet, in welcher n eine positive ganze Zahl ist. Da aber

$$(\psi nx)^2 + (\varphi nx)^2 = 1,$$

also $$\psi nx + i\varphi nx = \frac{1}{\psi nx - i\varphi nx} = \frac{1}{\psi(-nx) + i\varphi(-nx)} = (\psi x + i\varphi x)^n$$

ist, so ist auch

$$\psi(-nx)+i\varphi(-nx) = (\psi x+i\varphi x)^{-n};$$

und daher gilt die Formel (2) auch für ein *negatives ganzes n.*

Aus (2) erhält man auch, wenn man die Gleichung mit $\frac{m}{n}$ potentiirt:

$$(\psi nx+i\varphi nx)^{\frac{m}{n}} = (\psi x+i\varphi x)^m = \psi mx+i\varphi mx$$

Vertauscht man hier x mit $\frac{x}{n}$, so wird

$$(\psi x+i\varphi x)^{\frac{m}{n}} = \psi\frac{mx}{n}+i\varphi\frac{mx}{n};$$

also gilt die Gleichung (2) auch für *gebrochene n.*

Setzt man in (2) $x=\frac{2m}{n}$ und erwägt dass $\psi 2=1$ und $\varphi 2=0$ ist, so erhält man

$$(3.)\qquad \left(\psi\frac{2m}{n}+i\varphi\frac{2m}{n}\right)^n = 1.$$

Also hat die Function $\psi\frac{2m}{n}+i\varphi\frac{2m}{n}$ die merkwürdige Eigenschaft, dass ihre $n$te Potenz der *Einheit* gleich ist, und

$$\left(\psi\frac{2m}{n}+i\varphi\frac{2m}{n}\right)^x$$

ist eine *periodische Function* von x, die stets wieder zu ihrem ursprünglichen Werthe zurückkehrt, so oft x um n Einheiten zunimmt.

Diese periodische Function hat eine *imaginäre Basis,* aber das *Argument* x durchläuft *reelle* Werthe. Man kann aber auch noch zu einer andern periodischen Function mit *reeller Basis* und *imaginärem Argumente* gelangen. Denn es ist

$$\psi x+i\varphi x = \left(\psi\frac{x}{n}+i\varphi\frac{x}{n}\right)^n$$

und, wenn n unendlich gross angenommen wird:

$$\left(\psi\frac{x}{n}\right)^n = \prod_{+1}^{+\infty}\left(1-\frac{4x^2}{n^2(2\lambda-1)^2}\right) = 1$$

$$\text{und } \varphi\frac{x}{n} : \psi\frac{x}{n} = \frac{\pi x}{n}\cdot\prod_{+1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\lambda^2}\right) : \prod_{+1}^{+\infty}\left(1-\frac{4x^2}{n^2(2\lambda-1)^2}\right) = \frac{\pi x}{n},$$

also

$$\psi x+i\varphi x = \left(\psi\frac{x}{n}\right)^n\left\{1+i\varphi\frac{x}{n} : \psi\frac{x}{n}\right\}^n = \left(1+\frac{i\pi x}{n}\right)^n,$$

oder auch, wenn man $i\pi x$ mit x vertauscht:

$$\psi\frac{x}{i\pi}+i\varphi\frac{x}{i\pi}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!},\ \ldots\ldots$$

Für $x=1$ ist

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots\ 2,71828\ldots\ldots=e,$$

wenn diese constante Zahl mit e bezeichnet wird. Dann ist aber, wenn man $\frac{x}{n}$ statt n setzt:

$$\psi\frac{x}{i\pi}+i\varphi\frac{x}{i\pi}=e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots$$

Vertauscht man wieder x mit $i\pi x$, so wird

$$\psi x+i\varphi x=e^{i\pi x}.$$

Für $x=2n$ wird $\psi 2n=1$ und $\varphi 2n=0$, wenn n eine ganze Zahl ist; daher ist

$$e^{2n\pi i}=1,$$

und e^x ist also ebenfalls eine periodische Function, deren Periodicität aber nur dann Statt findet, wenn x imaginäre Werthe durchläuft, also von der Form $a+ib$ ist.

Da nun $\psi x+i\varphi x=e^{+i\pi x}$,

also $\psi x-i\varphi x=e^{-i\pi x}$ ist,

so wird $\psi x=\frac{1}{2}(e^{+i\pi x}+e^{-i\pi x})$

und $\varphi x=\frac{1}{2}i(e^{+i\varphi x}-e^{-i\pi x})$.

§. 18.

Unsere Aufgabe könnte hiermit als gelöset betrachtet werden, da jetzt die wichtigsten Eigenschaften der einfachsten periodischen Functionen und ihr Zusammenhang untereinander nachgewiesen sind. Besonders diejenigen Mathematiker, welche ein Interesse an der *systematischen* Entwicklung der einzelnen Disciplinen ihrer Wissenschaft nehmen, werden diesen Untersuchungen ihre Berücksichtigung nicht ganz versagen; denn in der That: wenn man an die Aufführung eines Lehrgebäudes der Analysis denken sollte, würde die Idee der *periodischen* Functionen, abgesehen von ihrer hohen practischen Wichtigkeit, schon

deswegen in den Vordergrund treten, weil sie zu fruchtbaren Parallelen zwischen Geometrie und Analysis Veranlassung giebt.

Ich werde in dem folgenden Paragraph noch zu zeigen versuchen, wie einfach sich viele Sätze durch den hier benutzten Algorithmus beweisen und finden lassen, und in welcher Weise diese einfachen periodischen Functionen durch *Kettenbrüche* dargestellt werden.

§. 19.

Es ist

$$\varphi(x) = 2x \prod_{+1}^{+\infty} \frac{4(\lambda^2 - x^2)}{4\lambda^2 - 1} \quad \text{und} \quad \psi(x) = \prod_{+1}^{+\infty} \frac{(2\lambda-1)^2 - x^2}{(2\lambda-1)^2}, \quad \text{folglich}$$

$$\frac{\psi(x(1-a))}{\varphi x} = \frac{1}{2x} \prod_{+1}^{+\infty} \frac{((2\lambda-1)^2 - 4x^2(1-a)^2)(2\lambda+1)}{4(\lambda^2 - x^2)(2\lambda-1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_s}{x-s}.$$

Die Zähler der Partialbrüche werden nun wieder auf die bereits bekannte Weise gefunden; indem man die Gleichung mit $x - s$ multiplicirt und $x = s$ setzt. Man erhält dann

$$\alpha_s = \psi(s-sa)\left(\frac{x-s}{\varphi x}\right)_{x=s} = (\psi s \psi s a - \varphi s \varphi s a)\left(\frac{x-s}{(-1)^s \varphi(x-s)}\right)_{x=s}.$$

Es ist aber $\psi s = \cos\pi s = (-1)^s$; $\varphi s = \sin\pi s = 0$ und $\left(\frac{x-s}{\varphi(x-s)}\right)_{x=s} = \frac{1}{\pi}$, also

$$\alpha_s = \frac{\psi s a}{\pi}; \quad \text{daher wird}$$

$$\frac{\psi x(1-a)}{\varphi x} = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi s a}{x-s} = \frac{1}{\pi}\left\{\cdots\cdots \frac{\psi 2a}{x+2} + \frac{\psi a}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{\psi a}{x-1} + \frac{\psi 2a}{x-2} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\left\{\frac{\psi a}{x^2-1} + \frac{\psi 2a}{x^2-4} + \frac{\psi 3a}{x^2-9} + \frac{\psi 4a}{x^2-16} + \cdots\cdots\right\}$$

oder, in den bekannten Zeichen:

$$(1.) \quad \frac{\cos\pi x(1-a)}{\sin\pi x} = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\left\{\frac{\cos a\pi}{x^2-1} + \frac{\cos 2a\pi}{x^2-4} + \frac{\cos 3a\pi}{x^2-9} + \frac{\cos 4a\pi}{x^2-16} + \cdots\cdots\right\}.$$

Hiernach ist nun

$$\frac{\cos\pi + (1-b)}{\sin\pi x} = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\left\{\frac{\cos b\pi}{x^2-1} + \frac{\cos 2b\pi}{x^2-4} + \frac{\cos 3b\pi}{x^2-9} + \frac{\cos 4b\pi}{x^2-16} + \cdots\cdots\right\}.$$

Die Differenz beider Gleichungen giebt, wenn man $\frac{1}{2}(a+b) = \alpha$ und $\frac{1}{2}(a-b) = \beta$ setzt:

$$\frac{\sin\pi x(1-\alpha)\sin\pi x\beta}{\sin\pi x} = \frac{2x}{\pi}\left\{\frac{\sin\alpha\pi\sin\beta\pi}{x^2-1} + \frac{\sin 2\alpha\pi\sin 2\beta\pi}{x^2-4} + \frac{\sin 3\alpha\pi\sin 3\beta\pi}{x^2-9} + \cdots\right\}.$$

Für $\beta = 0$ erhält man aus dieser Gleichung:

$$(2.)\quad \frac{\sin\pi x(1-\alpha)}{\sin\pi x} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\sin\alpha\pi}{x^2-1} + \frac{2\sin 2\alpha\pi}{x^2-4} + \frac{3\sin 3\alpha\pi}{x^2-9} + \frac{4\sin 4\alpha\pi}{x^2-16} + \cdots\right\}.$$

Differentiirt man (1) nach a, so bekommt man die Gleichung (3) ebenfalls.

Wenn man die Formel (2) direct durch Zerlegung in *Partialbrüche* ableiten wollte, so müsste man mit einiger Aufmerksamkeit verfahren. Da $\varphi x(1-a)$ und φx eine gleiche Anzahl Factoren enthalten, so lässt sich nicht der Bruch $\frac{\varphi x(1-a)}{\varphi x}$, wohl aber der Bruch $\frac{\varphi x(1-a)}{x\varphi x}$ in Partialbrüche zerlegen. Man setze also

$$\frac{\varphi x(1-a)}{x\varphi x} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha_s}{x-s}\quad;$$

dann erhält man

$$\alpha_s = \frac{\varphi s(1-a)}{s}\left(\frac{x-s}{\varphi x}\right)_{x=s} = \frac{\varphi s\psi sa - \psi s\varphi sa}{s}\cdot\frac{1}{\pi(-1)^s} = -\frac{\varphi sa}{s\pi}\quad.$$

Dieser Ausdruck für den Zähler α_s ist nur richtig, so lange s von 0 verschieden ist; denn um α_0 zu finden, hat man nur:

$$\alpha_0 = \left(\frac{\varphi x(1-a)}{\varphi x}\right)_{x=0} = 1-a;$$

daher ist

$$\frac{\varphi x(1-a)}{\varphi x} = \frac{x}{\pi}\left\{\sum_{-\infty}^{-1}\frac{\varphi sa}{s(s-x)} + \frac{(1-a)\pi}{x} + \sum_{+1}^{+\infty}\frac{\varphi sa}{s(s-x)}\right\}$$

$$= 1-a+\frac{x}{\pi}\left\{\sum_{+1}^{+\infty}\frac{\varphi sa}{s(s-x)} - \sum_{+1}^{+\infty}\frac{\varphi sa}{s(s+x)}\right\} = 1-a+\frac{2}{\pi}\sum_{+1}^{+\infty}\left\{\frac{s\varphi sa}{s^2-x^2} - \frac{\varphi sa}{s}\right\}.$$

Ist nun aber $x(1-a)$ eine sehr *grosse ganze Zahl*, so verschwindet die Summe $\sum_{+1}^{+\infty}\frac{s\varphi sa}{s^2-x^2}$, so wie links der Zähler $\varphi x(1-a)$, daher bleibt nur

$$0 = 1-a-\frac{2}{\pi}\sum_{+1}^{+\infty}\frac{\varphi(sa)}{s}.$$

Man erhält also endlich:

$$\frac{\varphi x(1-a)}{\varphi x} = \frac{2}{\pi}\sum_{+1}^{+\infty}\frac{s\varphi(sa)}{s^2-x^2};$$

welches die Gleichung (2) ist.

§. 20.

Ueber die Grenzen, innerhalb welcher die mit a bezeichnete Constante in den zuletzt entwickelten Formen liegt, ist Folgendes zu beachten. Wollte man z. B. $\frac{\cos ax}{\sin \pi x}$ in Partialbrüche zerlegen, und es wäre a von der Form $\alpha + n\pi$, wo α kleiner als π und n eine positive oder negative ganze Zahl ist, so erhielte man:

$$\frac{\cos ax}{\sin \pi x} = \frac{\cos \alpha x \cos n\pi x}{\sin \pi x} - \frac{\sin \alpha x \sin n\pi x}{\sin \pi x} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{k_s}{x-s}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung, um k_s zu finden, mit $x-s$, und setzt dann $x = s$, so fällt, wegen des Factors $\sin n\pi s$, der zweite Theil links ganz weg, und man würde auf diese Weise nur die Zerlegung von $\frac{\cos \alpha x \cos n\pi x}{\sin \pi x}$ bekommen; daher muss α zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, wenn die erhaltene Formel volle Gültigkeit haben soll.

Man sieht nun leicht, dass die Formel

$$\frac{\cos^{2n+1}\pi x(1-a)}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos^{2n+1}\alpha\pi s}{x-s}$$

nur gilt, so lange

$$\frac{2n}{2n+1} < a < \frac{2n+2}{2n+1}$$

ist; denn wenn man die Potenzen der Cosinus in Cosinus der vielfachen Winkel auflöset, so braucht man nur die vorher angewandten Schlüsse zu wiederholen, um sich von der Richtigkeit der Behauptung zu überzeugen.

§. 21.

Die beiden Reihen (1 und 2, §. 19) führen unmittelbar, wenn man x durch $x\sqrt{-1}$ ersetzt, zu den beiden bestimmten Integralen

(1.) $$\int_0^\infty \frac{\cos az\,\partial z}{x^2+z^2} = \frac{\pi e^{-ax}}{2x} \quad \text{und}$$

(2.) $$\int_0^\infty \frac{z\sin az\,\partial z}{x^2+z^2} = \tfrac{1}{2}\pi e^{-ax}\,.$$

Durch dieselben Mittel erhält man auch mehrere andere bestimmte Integrale. Um z. B. den Bruch

$$\frac{\varphi x}{\psi x+\psi y} = \frac{\varphi x}{2\psi\tfrac{1}{2}(x+y)\,\psi\tfrac{1}{2}(x-y)}$$

in Partialbrüche zu zerlegen, setze man ihn den beiden Summen-Ausdrücken

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha_s}{2s+1+x+y}+\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta_s}{2s+1+x-y}$$

gleich. Zur Bestimmung von α_s erhält man:

$$\alpha_s = \left\{\frac{[\tfrac{1}{2}(x+y)+s+\tfrac{1}{2}]\,\varphi x}{\psi\tfrac{1}{2}(x+y)\psi\tfrac{1}{2}(x+y)}\right\}_{x=-y-2s-1} = \frac{-\varphi(y+2s+1)}{\psi(y+s+\tfrac{1}{2})}\left\{\frac{\tfrac{1}{2}(x+y)+s+\tfrac{1}{2}}{\varphi[\tfrac{1}{2}(x+y)+s+\tfrac{1}{2}]}\right\}_{x=-y-2s-1}.$$

Es ist aber $\psi(y+s+\frac{1}{2}) = \varphi(y+2s+1)$, daher wird

$$\alpha_s = -\frac{1}{\pi},$$

und denselben Werth bekommt auch β_s, folglich ist:

$$\frac{\sin\pi x}{\cos\pi x+\cos\pi y} = \frac{\varphi x}{\psi x+\psi y} = -\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2s+1+x+y}+\frac{1}{2s+1+x-y}\right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{2s+1+x}{(2s+1+x)^2-y^2} = -\frac{2}{\pi}\sum_{-\infty}^{-1}\frac{2s+1+x}{(2s+1+x)^2-y^2} - \frac{2}{\pi}\sum_{+0}^{+\infty}\frac{2s+1+x}{(2s+1+x)^2-y^2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{+0}^{+\infty}\left\{\frac{2s+1-x}{(2s+1-x)^2-y^2}-\frac{2s+1+x}{(2s+1+x)^2-y^2}\right\}.$$

Ersetzt man in dieser Formel y durch $y\sqrt{-1}$, so findet man:

(3.) $$\frac{\sin\pi x}{e^{\pi y}+2\cos\pi x+e^{-\pi y}} = \frac{1}{\pi}\sum_{+0}^{-\infty}\left\{\frac{2s+1-x}{(2s+1-x)^2+y^2}-\frac{2s+1+x}{(2s+1+x)^2+y^2}\right\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\cos ay\,dy$, und integrirt von 0 bis ∞, so erhält man, mit Benutzung des eben in (1) angeführten Integrals:

$$\sin\pi x\int_0^\infty \frac{\cos ay\,\partial y}{e^{\pi y}+2\cos\pi x+e^{-\pi y}} = \frac{1}{\pi}.\sum_{+0}^{+\infty}\left\{(2s+1-x)\int_0^\infty \frac{\cos ay\,\partial y}{(2s+1-x)^2+y^2}\right.$$

$$\left. -(2s+1+x)\int_0^\infty \frac{\cos ay\,\partial y}{(2s+1+x)^2+y^2}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{+0}^{+\infty}\left\{e^{-a(2s+1-x)}-e^{-a(2s+1+x)}\right\} = \tfrac{1}{2}(e^{+ax}-e^{-ax})\sum_{+0}^{+\infty}e^{-a(2s+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{+ax}-e^{-ax}}{e^{+a}-e^{-a}}.$$

Also nach Vertauschung von πx, πy, a mit x, z, πa ergiebt sich:

$$(4.)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos az\,\partial z}{e^{+z}+2\cos x+e^{-z}} = \frac{\pi}{2\sin x}\cdot\frac{e^{+ax}-e^{-ax}}{e^{+a\pi}-e^{-a\pi}}.$$

Für $a\sqrt{-1}$ statt a, folgt hieraus:

$$(5.)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{+az}+e^{-az}}{e^{+z}+2\cos x+e^{-z}}\partial z = \frac{\pi}{2\sin x}\cdot\frac{\sin ax}{\sin a\pi},$$

und für $a=0$:

$$(6.)\qquad \int_0^\infty \frac{\partial z}{e^{+z}+2\cos x+e^{-z}} = \frac{x}{2\sin x}.$$

Aus den Formeln (§. 19) hat man unmittelbar:

$$\frac{\sin\pi x(1-a)}{\sin\pi x} = 1-a+\frac{2x^2}{\pi}\sum_{+1}^{+\infty}\frac{\sin sa\pi}{s(s^2-x^2)},$$

oder, wenn man x mit $x\sqrt{-1}$ vertauscht:

$$\frac{e^{+\pi x(1-a)}-e^{-\pi x(1-a)}}{e^{+\pi x}-e^{-\pi x}} = 1-a-\frac{2x^2}{\pi}\sum_{+1}^{+\infty}\frac{\sin sa\pi}{s(s^2+x^2)}.$$

Ersetzt man hier x durch nx und a durch $\frac{a}{n\pi}$ und nimmt dann n unendlich gross an, so erhält man aus der letzten Formel:

$$(7.)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin az\,\partial z}{z(z^2+x^2)} = \frac{\pi}{2x^2}(1-e^{-ax}).$$

Aus der Formel

$$\frac{\cos\pi x(1-a)}{\sin\pi x} = \frac{1}{\pi x} - \frac{2x}{\pi}\sum_{+1}^{+\infty}\frac{\cos sa\pi}{s^2-x^2} = \cot\pi x\cos a\pi x + \sin a\pi x$$

wird für $a = 0$:

$$\cot\pi x = \frac{1}{\pi x} - \frac{2x}{\pi}\sum_{+1}^{+\infty}\frac{1}{s^2-x^2}$$

und aus diesen beiden Gleichungen

$$\sin a\pi x = \frac{1-\cos a\pi x}{\pi x} - \frac{2x}{\pi}\sum_{+1}^{+\infty}\frac{\cos sa\pi - \cos a\pi x}{s^2-x^2}\,.$$

Setzt man hier wieder nx statt x, $\frac{a}{n}$ statt $a\pi$ und nimmt n unendlich gross an, so gelangt man zu dem bestimmten Integrale

$$(8.)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos az - \cos ax}{x^2-z^2}\,\partial z = \frac{\pi\sin ax}{2x}\,.$$

Aus den hier gegebenen Beispielen ist hinlänglich klar, in welchen Fällen sich die benutzten Methoden zur Auffindung bestimmter Integrale anwenden lassen.

§. 22.

Ich werde in diesem Paragraph noch einige *Reihen* für die Kreisfunctionen angeben, die ich sonst nirgends angetroffen habe und deren Entwicklungsmethode eine gewisse Allgemeinheit hat.

Es ist

$$\frac{1}{1-a} = 1 + \frac{a}{1-a}\,,$$

oder wenn man auf beiden Seiten $\frac{b}{(1-a)(1-b)}$ addirt:

$$\frac{1}{(1-a)(1-b)} = 1 + \frac{a}{1-a} + \frac{b}{(1-a)(1-b)}\,,$$

und durch Addition von $\frac{c}{(1-a)(1-b)(1-c)}$ auf beiden Seiten:

$$(1.)\qquad \frac{1}{(1-a)(1-b)(1-c)} = 1 + \frac{a}{1-a} + \frac{b}{(1-a)(1-b)} + \frac{c}{(1-a)(1-b)(1-c)}\,.$$

Man sieht leicht, dass diese Formel für eine beliebige Anzahl von

Factoren gilt. Vertauscht man $a, b, c, \ldots$ mit $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}\ldots$, so geht sie in folgende über:

$$(2.) \qquad \frac{\alpha}{\alpha-a}\cdot\frac{\beta}{\beta-b}\cdot\frac{\gamma}{\gamma-c}\cdot\frac{\delta}{\delta-d}\cdot\ldots$$

$$= 1+\frac{\alpha}{\alpha-a}+\frac{\alpha b}{(\alpha-a)(\beta-b)}+\frac{\alpha\beta c}{(\alpha-a)(\beta-b)(\gamma-c)}+\frac{\alpha\beta\gamma d}{(\alpha-a)(\beta-b)(\gamma-c)(\delta-d)}+\ldots.$$

Diese Formeln lassen sich offenbar auf die Zerlegung von Producten wie

$$\cos\pi x = \prod_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\lambda+1+2x}{2\lambda+1} = \prod_{+1}^{+\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2\lambda-1)^2}\right)$$

$$\sin\pi x = \prod_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi+2x}{2\lambda+1} = \pi x\prod_{+1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right) = 2x\prod_{+1}^{+\infty}\frac{4\lambda^2-4x^2}{4\lambda^2-1}$$

unmittelbar anwenden.

Es ist z. B.

$$\frac{x}{\sin\frac{1}{2}\pi x} = \prod_{+1}^{+\infty}\frac{4\lambda^2+1}{4\lambda^2-x^2} = \frac{3}{4-x^2}\cdot\frac{15}{16-x^2}\cdot\frac{35}{36-x^2}\cdot\frac{63}{64-x^2}\cdot\ldots\ldots$$

$$= \frac{3}{3-(x^2-1)}\cdot\frac{15}{15-(x^2-1)}\cdot\frac{35}{35-(x^2-1)}\cdot\frac{63}{63-(x^2-1)}\cdot\ldots\ldots,$$

daher nach (2)

$$(3.) \quad \frac{x}{\sin\frac{1}{2}\pi x} = 1+\frac{x^2-1}{4-x^2}+\frac{3(x^2-1)}{(4-x^2)(16-x^2)}+\frac{3.15(x^2-1)}{(4-x^2)(16-x^2)(36-x^2)}$$

$$+\frac{3.15.35(x^2-1)}{(4-x^2)(16-x^2)(36-x^2)(64-x^2)}+\ldots\ldots$$

Für $x = 0$ erhält man aus dieser Gleichung:

$$(4.) \quad \frac{2}{\pi} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2-\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2-\ldots\ldots$$

Eben so ist

$$\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\pi x} = \prod_{+1}^{+\infty}\frac{(2\lambda-1)^2}{(2\lambda-1)^2-x^2} = \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-x^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-x^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-x^2}\cdot\ldots\ldots,$$

also

$$(5.) \quad \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\pi x} = 1+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^2}{(1-x^2)(9-x^2)}+\frac{9.x^2}{(1-x^2)(9-x^2)(25-x^2)}$$

$$+\frac{9.25x^2}{(1-x^2)(9-x^2)(25-x^2)(49-x^2)}+\ldots\ldots$$

Zieht man zu beiden Seiten dieser Gleichung 1 ab, dividirt dann durch x^2 und setzt nachher $x = 0$, so erhält man den Ausdruck für $\frac{1}{8}\pi^2$ in (§. 13).

Durch dieselbe Formel findet sich auch:

$$(6.)\quad x\cot\tfrac{1}{2}\pi x = -\frac{1+2x^2}{4-x^2} - \frac{(1-x^2)(3+2x^2)}{(4-x^2)(16-x^2)} - \frac{(1-x^2)(9-x^2)(5-2x^2)}{(4-x^2)(16-x^2)(36-x^2)} - \frac{(1-x^2)(9-x^2)(25-x^2)(7+2x^2)}{(4-x^2)(16-x^2)(36-x^2)(64-x^2)} - \ldots\ldots$$

$$(7.)\quad \operatorname{tang} y.\tfrac{1}{2}\pi x = x + \frac{x(1+2x^2)}{1.3(1-x^2)} + \frac{x(4-x^2)(3+2x^2)}{3.5(1-x^2)(9-x^2)} + \frac{x(4-x^2)(16-x^2)(5+2x^2)}{2.7(1-x^2)(9-x^2)(25-x^2)} + \frac{x(4-x^2)(16-x^2)(36-x^2)(7+2x^2)}{7.9(1-x^2)(9-x^2)(25-x^2)(49-x^2)} + \ldots\ldots$$

Dividirt man nun diese Gleichung durch x und setzt dann $x = 0$, so erhält man:

$$(8.)\quad \tfrac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{2.4}{3.5}\right)^2 + \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{2.4.6}{3.5.7}\right)^2 + \ldots\ldots$$

$$(9.)\quad \cos\tfrac{1}{2}\pi x = 1 - x^2 - (1-x^2)\frac{x^2}{9} - (1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\frac{x^2}{25} - (1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\left(1-\frac{x^2}{25}\right)\frac{x^2}{49} - \ldots\ldots$$

$$(10.)\quad \sin\tfrac{1}{2}\pi x = x + \frac{x(1-x^2)}{1.3} + \frac{x(1-x^2)(4-x^2)}{(1.3)^2 5} + \frac{x(1-x^2)(4-x^2)(16-x^2)}{(1.3.5)^2 7} + \frac{x(1-x^2)(4-x^2)(16-x^2)(36-x^2)}{(1.3.5.7)^2 9} + \ldots\ldots$$

§. 23.

Es lassen sich aber auch noch auf ganz andere Arten *Reihen* für dergleichen periodische Functionen finden. Schon einzelne Beispiele werden hinreichen, die Methode zu erläutern. Man weiss z. B., dass die Function $\frac{1}{\cos\frac{1}{6}\pi x}$ für $x = 3, 9, 15, 21, 27, \ldots$ unendlich wird und für $x = 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ die Werthe $1, 2, -2, -1, -2, 2, \ldots$ annimmt. Man kann daher dieser Function die Form

$$\frac{1}{\cos\frac{1}{6}\pi x} = A + \frac{Bx^2}{3^2-x^2} + \frac{Cx^2(2^2-x^2)}{(3^2-x^2)(9^2-x^2)} + \frac{Dx^2(2^2-x^2)(4^2-x^2)}{(3^2-x^2)(9^2-x^2)(15^2-x^2)} + \ldots\ldots$$

geben. Setzt man nun hier für x nach und nach $0, 2, 4, 6, \ldots$, so nimmt die Seite links in dieser Gleichung die Werthe $1, 2, -2, -1, \ldots$ an, wodurch man für die Coefficienten $A, B, C, D, \ldots$ die Werthe

$$1\ ,\ \frac{5}{4}\ ,\ -\frac{5.13}{12.16}\ ,\ \frac{7.9}{16.32}\ ,\ \ldots\ldots$$

findet. Es ist also

$$(1.)\quad \frac{1}{\cos\frac{1}{6}\pi x} = 1+\frac{5x^2}{4(3^2-x^2)}-\frac{65x^2(2^2-x^2)}{192(3^2-x^2)(9^2-x^2)}+\frac{63x^2(2^2-x^2)(4^2-x^2)}{512(3^2-x^2)(9^2-x^2)(15^2-x^2)}-\ldots.$$

Zieht man zu beiden Seiten dieser Gleichung 1 ab, so erhält man links $\frac{2\sin^2\frac{1}{12}\pi x}{\cos\frac{1}{6}\pi x}$, und wenn man nun mit x^2 dividirt und dann $x=0$ setzt:

$$\pi^2 = 10-\frac{65}{486}+\frac{7}{2025}-\ldots\ldots = 9,8697;$$

während der wahre Werth 9,8696 ist. Man sieht, dass diese Reihe, die ohne alle nähere Kenntniss der Function, welche entwickelt werden soll, gebildet wurde, dennoch zur numerischen Berechnung ganz geschickt ist. Wollte man z. B. die Secante von 15^0 berechnen, so müsste man $x=\frac{1}{2}$ setzen und würde dann schon durch Benutzung zweier Brüche dieser Reihe $\sin 15^0 = 1,03527$ bis auf 5 Decimalen genau finden. Diese und die ähnlich gebildeten Reihen haben vor den bekannten *Newton*'schen insofern einen gewissen Vorzug, dass sie die Kenntniss von π nicht voraussetzen und folglich unmittelbarer zum Ziele führen.

Ganz auf dieselbe Weise werden folgende Reihen gebildet:

$$(2.)\quad \cot\tfrac{1}{4}\pi x = \frac{1}{x}+\frac{4(1-x^2)}{x(4^2-x^2)}+\frac{11(1-x^2)(2^2-x^2)}{2x(4^2-x^2)(8^2-x^2)}+\frac{51(1-x^2)(2^2-x^2)(3^2-x^2)}{8x(4^2-x^2)(8^2-x^2)(12^2-x^2)}$$

$$+\frac{15(1-x^2)(2^2-x^2)(3^2-x^2)(5^2-x^2)}{2x(4^2-x^2)(8^2-x^2)(12^2-x^2)(16^2-x^2)}+\frac{135(1-x^2)(2^2-x^2)(3^2-x^2)(5^2-x^2)(6^2-x^2)}{16x(4^2-x^2)(8^2-x^2)(12^2-x^2)(16^2-x^2)(20^2-x^2)}+\ldots..$$

$$(3.)\quad \cos\tfrac{1}{3}\pi x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^2(x^2-1)}{4!}-\frac{x^2(x^2-1)(x^2-4)}{6!}+\frac{x^2(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)}{8!}-\ldots$$

$$(4.)\quad \sin\tfrac{1}{3}\pi x = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\left\{x-\frac{x(x^2-1)}{3!}+\frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{5!}-\frac{x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)}{7!}+\ldots.\right\}.$$

Da es hier nicht meine Absicht sein kann, den Gegenstand *ausführlich* abzuhandeln, so mögen die gegebenen Beispiele genügen. Es werden sich danach leicht für ähnliche Functionen ähnliche Formen bilden und berechnen lassen.

Berlin, im Januar 1853.

13.

Untersuchungen über ganze Functionen.

(Von Herrn Prof. Dr. *Heine* zu Bonn.)

Wann ist eine Gleichung irreducibel?

1.

Es kommt häufig vor, dass man zu untersuchen hat, ob eine gegebne ganze Function einer Veränderlichen *irreducibel* sei; oder, allgemeiner gesagt: dass man diejenigen Factoren einer gegebnen ganzen Function mit rationalen Coefficienten zu suchen hat, welche wiederum rationale Coefficienten haben. Es scheint bisher nur der einfachste Fall erledigt zu sein; nämlich der Fall, in welchem es sich um Factoren ersten Grades, also von der Form $x + a$ handelt, wo a eine rationale Zahl ist. Es ist schon seit lange eine Methode bekannt, die rationalen Wurzeln einer Gleichung mit rationalen Coefficienten zu finden. Wir wollen hier zeigen, wie sich die allgemeine Aufgabe durch Zurückführung auf diese besondere Aufgabe lösen lässt.

2.

Es sei

$$(\alpha) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$$

eine gegebne *ganze* Function mit *rationalen* Coefficienten a. Wir werden nun untersuchen, wie eine ganze Function vom $m$ten Grade:

$$(\beta) \qquad \varphi(x) = x^m - y_1 x^{m-1} + \ldots\ldots \pm y_m$$

beschaffen sein muss, damit sie erstens $f(x)$ *theilt*, und zweitens *rationale* Coefficienten y hat.

Da $\varphi(x)$ in $f(x)$ aufgehen soll, so wird bei der Division ein Rest bleiben, dessen Zähler von der Form

$$A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m$$

und identisch gleich Null ist. Man erhält daher die m Gleichungen

$$(\gamma) \qquad A_1 = A_2 = \ldots\ldots A_m = 0.$$

Die A sind offenbar *rationale* Functionen der y, so dass sich durch Elimination m Gleichungen mit rationalen Coefficienten aus ihnen finden lassen, von welchen jede *nur eine* der Grössen y enthält. Wenn wir eine Grösse rationale Function von anderen nennen, so sollen auch ihre sämmtlichen Zahlencoefficienten rational sein. (Die Gleichungen (γ) können weder widersprechend, noch unbestimmt sein. Denn $\varphi(x)$ *theilt* $f(x)$, sobald alle y den Gleichungen (γ) genügen, und umgekehrt; ferner können nicht unendlich viele, sondern es kann nur eine beschränkte Anzahl von $\varphi(x)$ existiren.

Man suche nun die rationalen Wurzeln dieser Gleichungen. Giebt auch *nur eine* Gleichung keine rationale Wurzel, so hat $f(x)$ keinen Theiler von der geforderten Beschaffenheit. Im Allgemeinen wird man für jedes y eine gewisse Anzahl rationaler Wurzeln erhalten; es mögen sich für y_1, y_2, resp. r_1, r_2, u.s.w. ergeben. Die zusammengehörenden Werthe lassen sich entweder durch Substitution in die Gleichungen (γ) ausmitteln, oder man bildet die $r_1, r_2 \ldots\ldots r_m$ Functionen für $\varphi(x)$, welche man erhält, wenn man für jedes y die ihm zukommenden rationalen Werthe der Reihe nach setzt, und versucht, welche von diesen Functionen $f(x)$ *theilen.*

3.

Auch ohne die Gleichungen (γ) zu bilden und die beschwerliche Elimination auszuführen, lassen sich die oben erwähnten Gleichungen für jedes y finden. Um die Gleichung aufzustellen, deren Wurzel eine bestimmte von den Grössen $y_1, y_2 \ldots\ldots y_m$ ist, welche Y sein mag, muss man in's Auge fassen, dass Y eine *symmetrische* Function von m unter den n Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und zwar von bestimmter, bekannter Form ist. Setzt man in diese Function statt der ursprünglichen m Wurzeln, der Reihe nach alle möglichen Gruppen von m Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ (die Anzahl dieser Gruppen ist offenbar $\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots m}$: eine Zahl die wir mit μ bezeichnen), so entstehen μ Werthe, die Y, Y_1, $Y_{\mu-1}$ sein mögen. Dann ist Y eine Wurzel der Gleichung

$$(Y - Y)(Y - Y_1)\ldots\ldots(Y - Y_{\mu-1}) = 0.$$

Da aber jede symmetrische Function der Grössen $Y, Y_1, \ldots\ldots Y_{\mu-1}$ auch eine symmetrische Function aller Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, also bekannt ist, auch ohne dass man $f(x) = 0$ auflöset, so wird das obige Product die Form

$$(\delta) \qquad Y^\mu + b_1 Y^{\mu-1} + \ldots\ldots + b_\mu = 0$$

annehmen; wo die b rational und bekannt sind.

Beispiel. Es sei zu untersuchen, ob

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$$

durch eine Function vom zweiten Grade mit rationalen Coefficienten, $\varphi(x)$ *theilbar* sei?

Man setze

$$\varphi(x) = x^2 - y_1 x + y_2$$

und bezeichne die (unbekannten) Wurzeln von $f(x) = 0$ durch α_1, α_2, α_3. Sucht man zunächst die Gleichung für y_1, so ist $\mu = \frac{3.2}{1.2} = 3$; ferner

$$Y = \alpha_1 + \alpha_2 \quad , \quad Y_1 = \alpha_1 + \alpha_3 \quad , \quad Y_2 = \alpha_2 + \alpha_3.$$

Dies giebt

$$\begin{gathered} Y + Y_1 + Y_2 = +2, \\ YY_1 + YY_2 + Y_1Y_2 = -1, \\ YY_1Y_2 = +0; \end{gathered}$$

folglich

$$Y^3 - 2Y^2 - Y = 0.$$

Der rationale Werth, der sich hieraus ergiebt ist $y_1 = 0$.

Setzt man jetzt $y_2 = Y$, so erhält man

$$\begin{gathered} Y = \alpha_1\alpha_2 \quad , \quad Y_1 = \alpha_1\alpha_3 \quad , \quad Y_2 = \alpha_2\alpha_3, \\ Y + Y_1 + Y_2 = -2, \\ YY_1 + YY_2 + Y_1Y_2 = -2, \\ YY_1Y_2 = +4, \\ Y^3 + 2Y^2 - 2Y - 4 = 0, \\ y_2 = -2. \end{gathered}$$

Es kann daher $\varphi(x)$ nur gleich $x^2 - 2$ sein. Dieses *theilt* auch $f(x)$; also ist wirklich $\varphi(x) = x^2 - 2$.

4.

In No. 3 ergab sich eine Methode, für jeden Coefficienten y einer Function $\varphi(x)$, welche $f(x)$ *theilt*, seine Gleichung zu bilden. Das Verfahren zeigt deutlich:

1) Dass, wie auch die Coefficienten a von $f(x)$ beschaffen sein mögen, rational, oder nicht, die Coefficienten b der Gleichung für Y immer gefunden werden können, ohne dass es nöthig wäre, $f(x) = 0$ aufzulösen.
2) Dass die b nur *die* Irrationalitäten enthalten, welche in den a selbst vorkommen.

Man sah, wie sich die Aufgabe: zu untersuchen, ob eine Function $f(x)$ mit rationalen Coefficienten durch eine eben so beschaffene Function vom $m$ten Grade, $\varphi(x)$, theilbar sei, durch Zurückführung auf eine einfachere Aufgabe, nämlich auf die Frage, ob (δ) mit rationalen Coefficienten b eine rationale Wurzel habe, lösen lässt. In (No. 5 u. 6) soll gezeigt werden, wie durch die gleiche Methode zwei andere Arten von Aufgaben gelöset werden können, die für die Lehre von den Gleichungen wichtig sind.

5.

Von der ersten Aufgaben-Art setzen wir den Hauptfall, auf welchen die andern zurückgeführt werden können. Wir werden nämlich zeigen, wie zu finden sei, ob eine gegebene irreducibele Function mit rationalen Coefficienten, $f(x)$, durch Hinzufügung der Wurzeln einer gleichfalls gegebenen irreducibeln Gleichung mit rationalen Coefficienten $\psi(x) = 0$ reducibel werde, d. h., ob $f(x)$ einen Factor $f(x)$ habe, dessen Coefficienten rational durch die, wenn auch unbekannten Wurzeln von $\psi(x) = 0$ ausgedrückt werden können. In den complicirteren Aufgaben derselben Art würde man auch $f(x)$ irrationale Coefficienten geben, und dann nach demjenigen Factor $\varphi(x)$ fragen, dessen Coefficienten ausser den Wurzeln von $\psi(x) = 0$ noch die Irrationalitäten enthalten, welche in den a selbst vorkommen.

Die Aufgabe wird durch (No. 3) sogleich auf die folgende zurückgeführt. Man soll untersuchen, ob die Gleichung (δ)

$$Y^{\mu} + b_1 Y^{\mu-1} + \ldots\ldots + b_{\mu} = 0,$$

in welcher die b gegebene rationale Zahlen sind, eine Wurzel haben, welche eine rationale Function von den Wurzeln β_1, β_2, u. s. w. der Gleichung $\psi(x) = 0$ ist.

Diese Aufgabe lässt sich wiederum vereinfachen, indem man statt der Wurzeln β eine einzige Wurzel einer irreducibelen Gleichung einführt. Bestimmt man nämlich *ganze*, oder auch nur *rationale* Zahlen g_1, g_2 u. s. w. so, dass

$$g_1\beta_1 + g_2\beta_2 + \ldots\ldots$$

für alle Vertauschungen unter den Indices der Grössen β, verschiedene Werthe annimmt, und setzt

$$V = g_1\beta_1 + g_2\beta_2 + \ldots\ldots,$$

so genügt V einer irreducibeln Gleichung $\vartheta(V) = 0$, deren Coefficienten rational und bekannt sind. Ihr Grad sei ν. Sämmtliche β lassen sich dann, nach bekannten Sätzen von *Abel* und *Galois*, rational durch V darstellen; so dass nur zu untersuchen ist, ob die Gleichung (δ) eine Wurzel Y habe, welche eine rationale Function einer Wurzel der Gleichung $\vartheta(V) = 0$ ist. (S. dieses Journal Bd. IV. p. 261, und *Liouville*, Journal de Mathématiques Tom. XI. Man vergl. auch *Serret*, Cours d'algèbre supérieure p. 149.)

Wir wenden endlich zur weiteren Vereinfachung einen Satz an, welchen *Gauss* in „Methodus nova integralium valores etc. No. 11" entwickelt hat, welchen wir wie folgt aussprechen: *Jede rationale Function einer Grösse V ist, wenn V die Wurzel einer algebraischen Gleichung bezeichnet, gleich einer ganzen Function von V* (die im gegenwärtigen Falle rationale Coefficienten hat, weil nur solche in der Gleichung für V, nämlich $\vartheta(V) = 0$, vorkommen. Bekanntlich kann eine irreducibele Gleichung, deren Grad eine Primzahl ist, immer nur in dem Falle algebraisch aufgelöset werden, wenn jede Wurzel der Gleichung eine *rationale* Function von irgend zweien unter ihnen ist. Man kann nach dem *Gauss*schen Satze mit derselben Allgemeinheit sagen, dass jede Wurzel eine *ganze* Function dieser beiden (mit rationalen Coefficienten) sein muss.

Wir müssen also sehen, ob (δ) eine Wurzel

$$Y = z_0 + z_1 V + z_2 V^2 + \ldots\ldots + z_{\nu-1} V^{\nu-1}$$

habe, wo die z rationale Zahlen bezeichnen. Setzt man diesen Ausdruck für Y in (δ) und reducirt *die* Potenzen von V, deren Exponent $\nu - 1$ übersteigt, mittels $\vartheta(V) = 0$, so erhält man ein Aggregat

$$B_1 + B_2 V + \ldots\ldots + B_\nu V^{\nu-1},$$

welches gleich 0 sein muss. Da aber $\vartheta(V)$ irreducibel ist, so folgt aus der einen Gleichung das System folgender ν:

$$B_1 = B_2 = \ldots\ldots = B_\nu = 0.$$

Aus diesen Gleichungen wird man die z auf dieselbe Weise ermitteln, wie man in (No. 2) aus (γ) die y fand.

6.

Zur letzten Aufgabe betrachten wir eine gegebne Gleichung $f(x) = 0$, deren Coefficienten α rationale Functionen einer allgemeinen Buchstabengrösse r sind. Wir wollen auch hier nicht mit dem complicirteren Falle dass ausser r noch andere Buchstabengrössen vorkommen, (der übrigens keine neue Schwierigkeiten darbietet), uns beschäftigen. Will man nun untersuchen, ob $f(x)$ durch eine Function $\varphi(x)$ theilbar sei, deren Coefficienten wie die von $f(x)$ beschaffen, d. h. rationale Functionen von r sind, so wird man wiederum nur die Gleichung (δ) zu betrachten, und zu untersuchen haben, ob ihr, wenn die b gegebene rationale Functionen von r sind, ein Werth Y genüge, der gleichfalls eine rationale Function von r ist. Es ist leicht zu sehen, dass die Bestimmung von Y auf die einer ganzen Function von r zurückkommt, welche wir Z nennen und die einer Gleichung

$$(\varepsilon) \qquad Z^{\mu} + c_1 Z^{\mu-1} + \ldots\ldots + c_{\mu} = 0$$

genügt, in welcher die c bekannte ganze Functionen von r mit rationalen Coefficienten bezeichnen. Z selbst muss, wenn $\varphi(x)$ bestimmt werden kann, gleichfalls eine (unbekannte) ganze Function von r mit rationalen Coefficienten sein.

Aus (ε) zeigt sich leicht, welches die höchste Potenz von r sei, die in Z vorkommen kann. Ist ihr Exponent α, so setze man

$$Z = z_0 + z_1 r + \ldots\ldots + z_{\alpha} r^{\alpha},$$

(wo die z rationale Zahlen bezeichnen) in (ε), und bestimme aus den Gleichungen die man erhält, und deren Zahl grösser ist als die der Unbekannten, alle z. Bequemer lässt sich häufig zum Ziele kommen, wenn man aus (ε) *das* Glied von Z bestimmt, welches die niedrigste Potenz von r enthält. Es sei $z_{\beta} r^{\beta}$. Macht man dann

$$Z - z_{\beta} r^{\beta} = Z_1,$$

sucht aus (ε) die Gleichungen für Z_1, dann wieder das Glied vom niedrigsten Grade in Z_1, und fährt so fort, so wird sich entweder die Unmöglichkeit ergeben, Z auf die verlangte Art darzustellen, oder man wird nach höchstens $\alpha + 1$ Operationen am Ziele sein.

Bonn, den 3. April 1853.

14.

Fernere Untersuchungen über ganze Functionen.

(Von Herrn Professor Dr. *Heine* zu Bonn.)

Congruenzen.

1.

Das Folgende wird einige einfache Beziehungen angeben, welche man erhält, wenn man *ganze Functionen* auf eine ähnliche Weise behandelt, wie in den Elementen der Zahlenlehre *ganze Zahlen.*

Man bezeichne mit den grossen Buchstaben A, B etc. *ganze* Functionen einer Veränderlichen x, die auch zuweilen, um Verwechselungen zu vermeiden, den Functionszeichen als Argument hinzugefügt werden sollen, so dass man dann $A(x)$ oder $X(x)$ schreibt. Im Allgemeinen können die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x in dieser Function *irrational* sein; doch werden wir uns bald auf die Fälle beschränken, wo sie *rational* sind, und dann abgekürzt sagen: *die Functionen seien rational.* Sind die Coefficienten nicht rational, sondern nur *rationale Functionen* gewisser Grössen r_1, r_2, ..., so werden wir sagen: die Functionen seien *rational nach Hinzufügung von* r_1, r_2, ...

Der Grad einer Function soll durch ein vor dieselbe gesetztes δ bezeichnet werden, so dass z. B. $\delta(2+x+3x^4)$ gleich 4 ist.

2.

Das Zeichen

$$A \equiv B \bmod M$$

soll ausdrücken, dass die Differenz der beiden ganzen Functionen A und B durch die ganze Function M theilbar, d. h. gleich dem Producte von M in irgend eine ganze Function ist. Die Regeln sind leicht zu erkennen, nach welchen mit diesen Congruenzen gewisse einfache Operationen ausgeführt werden können. Ich erinnere hier nur, dass aus

$$A \equiv B \bmod MN,$$
$$A \equiv B \bmod M$$

folgt; und ferner, dass, wenn M und N keinen gemeinsamen Theiler haben, d. h. wenn sie nicht zugleich durch irgend eine ganze Function von höherem als dem 0ten Grade theilbar sind, dass dann sowohl aus der Congruenz

$$A \equiv B \bmod MN \quad \text{die beiden}$$

$$A \equiv B \bmod M \quad , \quad A \equiv B \bmod N$$

folgen, als auch, dass dann, umgekehrt, aus dem gleichzeitigen Bestehen der beiden letzteren die erste sich ergiebt.

Die ganze Function B heisst *Rest* von A nach dem Modulus M, wenn nicht nur

$$A \equiv B \bmod M,$$

sondern auch

$$\delta B < \delta M$$

ist. Sind A und M *rational,* so ist das Gleiche mit B der Fall.

3.

Es wird nicht nöthig sein, ausführlich über die Eintheilung der Congruenzen nach Graden zu sprechen. Unter *Lösung* einer Congruenz verstehen wir immer solche *ganze* Relationen, die ihr genügen. *Wurzeln* derselben nennen wir Lösungen, die von niedrigerem Grade als der Modulus sind. Ist der Modulus rational, so wird jeder rationalen Lösung eine rationale Wurzel entsprechen; natürlich werden aber unendlich viele Lösungen auf dieselbe Wurzel führen.

Die *Congruenzen* kann man, wie Gleichungen, in *reine* und *gemischte* theilen.

4.

Die Auflösung der Congruenz ersten Grades

$$AX \equiv B \bmod M,$$

wo A, B, M gegeben sind und X gesucht wird, hat keine Schwierigkeit, wenn sie überhaupt möglich ist; was immer und nur dann eintritt, wenn der grösste gemeinschaftliche Theiler von A und M auch B theilt.

Haben zunächst A und M keinen gemeinschaftlichen Theiler, so müssen

alle Lösungen nach dem Modulus M einander congruent sein, also muss *nur eine* Wurzel existiren. Man kann dieselbe durch eine Kettenbruch-Entwickelung finden; auf ähnliche Weise, wie man die Lösung der Congruenz

$$ax \equiv b \bmod m$$

in ganzen Zahlen durch die bekannten Eigenschaften dieser Brüche findet.

Geben ferner A und M einen grössten gemeinschaftlichen Theiler Δ, so ist die Congruenz offenbar unmöglich, wenn nicht auch B durch Δ theilbar ist. Ist Dies der Fall, so sind ihre Lösungen dieselben wie die der Congruenz

$$\frac{A}{\Delta}.X \equiv \frac{B}{\Delta} \bmod \frac{M}{\Delta}.$$

Bezeichnet man die Wurzel derselben, die nach dem oben Bewiesenen existirt, durch Ξ, so sind ihre sämmtlichen Lösungen, also auch die der gegebnen Congruenz, in der Form

$$X \equiv \Xi \bmod \frac{M}{\Delta}$$

enthalten; so dass man in diesem Falle nicht eine, sondern *unendlich viele Wurzeln* findet, welche durch die Gleichung

$$X \equiv \Xi + G.\frac{M}{\Delta}$$

gegeben werden, in welcher für G beliebige ganze Functionen von niedrigerem Grade als Δ gesetzt werden können.

5.

Wir kehren zu dem ersten Falle zurück, in welchem A und der Modulus keinen gemeinsamen Theiler haben. Ist M ein Product mehrerer ganzen Functionen, z. B. $M = NP$, wo übrigens N uud P auch gemeinsame Factoren enthalten, ja sogar einander gleich sein dürfen, so lässt sich die Auflösung der gegebenen Congruenz auf die zweier andern nach den Moduln N und P zurückführen. Ist nämlich Ξ die Wurzel der Congruenz

$$AX \equiv B \bmod. N,$$

so hat man nur die ganze Function Y so zu bestimmen, dass

$$A(\Xi + NY \equiv B \bmod NP ,$$

oder dass

$$AY \equiv \frac{B - A\Xi}{N} \bmod P$$

wird: alsdann wird $X \equiv \Sigma + NY$ eine Lösung der gegebnen Congruenz sein.

Es lässt sich demnach die Lösung der genannten linearen Congruenz auf den Fall zurückführen, dass der Modulus ein Product ungleicher linearer Factoren ist.

Wir heben noch hervor, dass die Anzahl der Wurzeln der genannten Congruenz, welches auch der Modulus sein mag, wie man oben sah, gleich 1 ist, dass sie also kein Criterium dafür geben kann, ob der Modulus irreducibel sei, oder nicht. Ferner sieht man auch leicht, dass wenn *A, B, M rational* sind, auch die Wurzel *X rational* sein muss.

6.

Eine zweite Auflösungs-Art der in (No. 5) betrachteten Congruenz, *deren Modulus nun*, unbeschadet der Allgemeinheit, *aus ungleichen linearen Factoren zusammengesetzt angenommen werden soll*, folgt aus der *Lagrange*'schen Interpolationsformel. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ die Wurzeln der Gleichung

$$M = 0 ,$$

so ist nach derselben eine ganze Function $F(x)$ (höchstens vom $(m-1)$ten Grade) die sich für $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ resp. in $c_1, c_2, \ldots c_m$ verwandelt, gleich

$$M(x)\left\{\frac{c_1}{(x-\alpha_1)M'(\alpha_2)} + \frac{c_2}{(x-\alpha_2)M'(\alpha_2)} + \cdots\cdots + \frac{c_m}{(x-\alpha_m)M'(\alpha_m)}\right\} .$$

Andrerseits giebt es *nur eine* solche Function. Wäre nämlich $\Phi(x)$ eine zweite Function mit denselben Eigenschaften, so müsste $F - \Phi$ für $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ verschwinden, also durch M theilbar sein; was nicht möglich ist, da sowohl $\delta\sigma$ als $\delta\Phi$ kleiner ist als m.

Da für jeden Werth von x, für welchen M verschwindet, die Wurzel der Congruenz

$$AX \equiv B \bmod M$$

der Gleichung $AX = B$

genügt, so erhält man als Ausdruck dieser Wurzel:

$$X = M(x) \sum_{n=1}^{n=m} \frac{\frac{B(\alpha_n)}{A(\alpha_n)}}{(x-\alpha_n) M'(\alpha_n)}.$$

7.

Die Auflösung der Congruenz $AX \equiv B \bmod M$ findet man in der Abhandlung von *Gauss* in den Comment. Gött. Tom III: „Methodus nova integr. val. p. approx. inveniendi p. 53, No. 11." *Gauss* stellt dort („Propositis scilicet tribus „functionibus integris Z, ζ, ζ' indeterminatae z, quaeritur functio integra, quae „fractae $\frac{Z}{\zeta}$ vice fungi possit, quatenus pro z accipitur radix quaecunque aequatio- „nis $\zeta' = 0$. Supponemus autem .... ζ atque ζ' nullum divisorem communem „indeterminatum implicare") die Aufgabe: eine ganze Function X zu finden, die, wenn $M = 0$ ist, mit $\frac{B}{A}$ übereinstimmt, und löset sie durch das oben erwähnte Kettenbruchverfahren, indem er also die Wurzel der Congruenz $AX \equiv B \bmod M$ giebt. Aus der obigen Bemerkung über die *Lagrange*sche Formel folgt, dass in der That, wenn M nur ungleiche Factoren hat, die Wurzel dieser Congruenz mit dem gesuchten Werthe von $\frac{B}{A}$ übereinstimmt. Hat aber M auch gleiche Factoren, so kann man es in NP zerlegen, wo N alle verschiedene Factoren von M, aber jeden nur einmal enthält. Alsdann ist schon die Wurzel der Congruenz

$$AX \equiv B \bmod N$$

eine Lösung der von *Gauss* gestellten Aufgabe. (Man vergleiche auch über diese Aufgabe: „*Serret* Cours d'Algèbre supérieure. Paris 1849. p. 19.)

8.

Aehnlich wie in der Zahlentheorie ist es auch hier möglich, eine ganze Function X zu finden; die nach gegebenen Modulen willkürlich gegebne Reste hat, wenn nur keiner dieser Modulen einen Theiler mit einem andern gemein hat. In der That: soll $X \equiv A \bmod M$ und $X \equiv B \bmod N$ werden, so muss, wegen der ersten Congruenz,

$$X = A + MY$$

sein; die zweite Congruenz giebt für Y die Bedingung

$$MY \equiv B - A \bmod N;$$

woraus sich Y besimmen lässt, wenn M und N keinen Theiler gemein haben. Es ist leicht zu sehen, dass *nur ein* Werth von X gefunden wird, dessen Grad kleiner ist, als der von MN.

Beispiel. Die Auflösung der simultanen Congruenzen

$$X \equiv +1 \bmod x^2+1 \quad \text{und}$$
$$X \equiv -1 \bmod x^2+2$$

giebt

$$X \equiv 2x^2+3 \bmod (x^2+1)(x^2+2).$$

9.

Wir gehen zu den Congruenzen *höherer* Grade über, indem wir uns den Modulus M als Product ungleicher Factoren vorstellen.

Ist $X \equiv A \bmod M$, so hat man nach der *Lagrange*schen Formel

$$X \equiv M(x)\sum_{n=1}^{n=m} \frac{A(\alpha_n)}{(x-\alpha_n)M'(\alpha_n)} \bmod M,$$

und wenn auch zugleich $Y \equiv B \bmod M$ ist:

$$Y \equiv M(x)\sum_{n=1}^{n=m} \frac{B(\alpha_n)}{(x-\alpha_n)M'(\alpha_u)} \bmod M;$$

woraus

$$XY \equiv M(x)\sum_{n=1}^{n=m} \frac{A(\alpha_n)B(\alpha_n)}{(x-\alpha_n)M'(\alpha_n)} \bmod M.$$

folgt. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergiebt sich, dass, wenn

$$X \equiv A \bmod M$$

ist und p irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet, immer die Congruenz

$$X^p \equiv M\sum_{n=1}^{n=m} \frac{[A(\alpha_n)]^p}{(x-\alpha_n)M'(\alpha_n)} \bmod M$$

Statt findet. Wir haben demnach folgenden Satz:

Die Wurzeln der Congruenz

$$X^p \equiv A \bmod M$$

findet man durch die Formel

$$X = M(x)\left\{\frac{\sqrt[p]{[A(\alpha_1)]}}{(x-\alpha_1)M'(\alpha_1)} + \frac{\sqrt[p]{[A(\alpha_2)]}}{(x-\alpha_2)M'(\alpha_2)} + \cdots \frac{\sqrt[p]{[A(\alpha_m)]}}{(x-\alpha_m)M'(\alpha_m)}\right\},$$

indem man für die $p$ten Wurzeln aus den A beliebig von den p Werthen nimmt, die ihnen zukommen. *Die Congruenz p^{ten} Grades hat demnach genau p^m Wurzeln, wenn der Modulus vom m^{ten} Grade ist.*

10.

Dieses Resultat, nach welchem die Anzahl der Wurzeln einer Congruenz von höherem als dem ersten Grade, von dem Grade des Modulus abhängt, erfährt eine merkwürdige Modification, wenn man *nur* die *rationalen* Wurzeln betrachtet. Man behandele zunächst die Congruenz zweiten Grades, die nach dem allgemeinen Resultat 2^m Wurzeln hat, und nehme an, es sei M *rational*, und zwar sei:

α) M *irreducibel.* Alsdann werden von den 2^m Wurzeln der Congruenz, die man nach dem Obigen findet, wenn man in

$$M(x)\Sigma\frac{\pm V[A(\alpha)]}{M'(\alpha)(x-\alpha)}$$

die Zeichen $\pm$ auf alle mögliche Arten combinirt, entweder *keine* rational sein, oder *zwei*. Ist nämlich Ξ eine rationale Wurzel, so muss jede andere X die Eigenschaft

$$X^2 \equiv \Xi^2 \bmod M$$

haben; d. h. $(X+\Xi)(X-\Xi)$ muss durch die irreducibele Function M theilbar, also muss $X=+\Xi$ oder $X=-\Xi$ sein. *Man findet demnach entweder keine rationale Wurzel, oder zwei,* die sich aber nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Daraus folgt, dass die Congruenz

$$X^2 \equiv 1 \bmod M,$$

wenn M irreducibel ist, genau zwei rationale Wurzeln hat, nämlich $+1$ und -1.

β) Es sei M ein Product mehrerer irreducibeln (rationalen) Factoren. Es reicht hin, anzunehmen, dass $M=NP$ ist, wo N und P irreducibel sind, also auch keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Die Congruenz $X^2 \equiv A \bmod M$ lässt sich dann (No. 2) durch die beiden simultanen Congruenzen

$$X^2 \equiv A \bmod N \text{ und}$$
$$X^2 \equiv A \bmod P$$

ersetzen. Hat die gegebne Congruenz eine rationale Wurzel Ξ, so genügt die-

selbe jeder der simultanen, so dass also jede von ihnen genau zwei rationale Wurzeln $+\Xi$ und $-\Xi$ hat. Es löset also jeder Werth X, der nach dem Modulus N und nach dem Modulus P congruent $+\Xi$ oder $-\Xi$ ist, die gegebne Congruenz; so dass man vier Wurzeln erhält (No. 8.).

Beispiel. Die Congruenz

$$X^2 \equiv 1 \bmod (x^2+1)(x^2+2)$$

hat die Wurzeln $+1$ und -1. Um die übrigen Wurzeln zu finden, zerfälle man sie in die beiden:

$$X^2 \equiv 1 \bmod (x^2+1),$$
$$X^2 \equiv 1 \bmod (x^2+2),$$

deren jede zwei rationale Wurzeln hat, $+1$ und -1. Der gegebnen Congruenz genügt demnach jeder Werth, der eines der folgenden vier Systeme simultaner Gleichungen auflöset:

1) $X \equiv +1 \bmod (x^2+1)$ $\equiv +1 \bmod (x^2+2)$

2) $X \equiv -1 \bmod (x^2+1)$ $\equiv -1 \bmod (x^2+2)$

3) $X \equiv +1 \bmod (x^2+1)$ $\equiv -1 \bmod (x^2+2)$

4) $X \equiv -1 \bmod (x^2+1)$ $\equiv +1 \bmod (x^2+2)$,

wodurch man nach (8) die folgenden vier Wurzeln der gegebnen Congruenz zweiten Grades erhält:

$$X = \pm 1, \qquad X' = \pm (2x^2+3).$$

Wenn M ein Product von q irreducibeln Factoren ist, so findet man, dass die Congruenz

$$X^2 \equiv A \bmod M$$

entweder keine oder 2^q rationale Wurzeln hat; woraus folgt, dass die Congruenz $X^2 \equiv 1 \bmod M$ in diesem Falle genau 2^q Wurzeln hat; die man auch finden kann, wenn M in seine irreducibele Factoren zerfället wird.

Sollte man also durch irgend welche Mittel erfahren, dass $X^2 \equiv 1 \bmod M$, ausser ± 1 noch *rationale* Wurzeln hat, so ist M gewiss nicht irreducibel; *so dass also die Anzahl der rationalen Wurzeln einer Congruenz zweiten* (auch höheren) *Grades ein Criterium für die Reductibilität des Modulus ist.* (No. 5).

Es ist auch leicht zu sehen, dass, wenn eine Congruenz mit rationalem Modulus eine rationale Lösung hat, dass ihr dann auch eine rationale Wurzel zukommt. (No. 2.).

11.

Es sei M wiederum irreducibel, und zwar so beschaffen, dass es auch keine ganze Function zum Factor hat, die nach Hinzufügung von p^{ten} Wurzeln der Einheit rational ist (No. 1). Man kann dann sagen, es sei M, auch nach Hinzufügung von p^{ten} Wurzeln der Einheit, irreducibel. Dann lässt sich leicht beweisen, dass die Congruenz

$$X^p \equiv A \bmod M$$

entweder keine Wurzel hat, die rational, oder doch nach Hinzufügung von p^{ten} Wurzeln der Einheit rational ist, oder genau p. Es sei nämlich die eine Ξ, so sind die andern $\varrho\Xi$, $\varrho^2\Xi$, ... $\varrho^{p-1}\Xi$, wenn ϱ eine primitive p^{te} Wurzel der Einheit ist.

Ist M reducibel, oder doch nach Hinzufügung von ϱ reducibel, so wird sich der entsprechende Satz leicht finden lassen.

12.

Wir schliessen diese Untersuchungen über die reinen Congruenzen mit einigen Anwendungen auf besondre Fälle.

Es sei nämlich A eine Constante, $M = \frac{x^q-1}{x-1}$, q eine Primzahl und p ein Theiler von $q-1$. Wir wollen ferner die Fälle $p=2$ und $p=3$ besonders behandeln, während wir die Untersuchungen für grössere Werthe von p zusammenfassen.

α. *Die Congruenz* $X^2 \equiv A \bmod \frac{x^q-1}{x-1}$.

Setzt man

$$r = \cos\frac{2\pi}{q} + i\sin\frac{2\pi}{q},$$

so finden sich die 2^{q-1} Wurzeln der Congruenz durch die Formel (No. 9.):

$$X = \frac{1}{q}\sqrt{A\cdot\frac{(x^q-1)}{(x-1)}\cdot\left\{\pm\frac{r(r-1)}{x-r}\pm\frac{r^2(r^2-1)}{(x-r^2)}\ldots\ldots\pm\frac{r^{q-1}(r^{q-1}-1)}{(x-r^{q-1})}\right\}}.$$

Unter diesen Wurzeln hebe man die eine heraus, welche sich für $x = r^m$ in

$\left(\frac{m}{q}\right)\sqrt{A}$ verwandelt, wo das Zeichen $\left(\frac{m}{q}\right)$ das bekannte für ± 1 aus der Theorie der *quadratischen Reste* ist. Diese Wurzel ist:

$$X = \frac{1}{q}\sqrt{A}\cdot\frac{x^q-1}{x-1}\cdot\left\{\frac{r(r-1)}{(x-r)}+\left(\frac{2}{q}\right)\cdot\frac{r^2(r^2-1)}{(x-r^2)}+\ldots..\right.$$
$$\left.\ldots..+\left(\frac{m}{q}\right)\cdot\frac{r^m(r^m-1)}{(x-r^m)}+\ldots..+\left(\frac{q-1}{q}\right)\cdot\frac{r^{q-1}(r^{q-1}-1)}{(x-r^q)}\right\}.$$

Setzt man statt

$$\frac{(x^q-1)\,(r^m-1)}{(x-1)(x-r^m)}$$

die Differenz

$$x^{q-1}+x^{q-2}r^m+x^{q-3}r^{2m}+\ldots.+r^{(q-1)m}-\{x^{q-1}+x^{q-2}+x^{q-3}+\ldots.+1\},$$

so erhält man:

$$X=\frac{1}{q}\sqrt{A}\sum_{m=1}^{m=q-1}\left(\frac{m}{q}\right)\{x^{q-2}(r^{2m}-r^m)+x^{q-3}(r^{3m}-r^m)+\ldots.+x(r^{(q-1)m}-r^m)+(1-r^m)\},$$

oder

$$X=i^{\frac{1}{4}(q-1)^2}\sqrt{\frac{A}{q}}\left\{x^{q-2}\left[\left(\frac{2}{q}\right)-1\right]+x^{q-3}\left[\left(\frac{3}{q}\right)-1\right]+\ldots.+x\left[\left(\frac{q-1}{q}\right)-1\right]-1\right\}.$$

Nimmt man also für A entweder $+q$, oder $-q$, je nachdem $q\equiv 1$ oder $q\equiv 3$ nach dem Modulus 4 ist, so ergiebt sich für X eine rationale Function. Verbindet man hiermit die frühern Sätze, so erhält man folgendes Resultat:

Die einzigen rationalen Wurzeln der Congruenz

$$X\equiv(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}q \bmod \frac{x^q-1}{x-1},$$

wo q eine ungerade Primzahl bezeichnet, sind die beiden:

$$X=\pm\left\{x^{q-2}\left[1-\left(\frac{2}{q}\right)\right]+x^{q-3}\left[1-\left(\frac{3}{q}\right)\right]+\ldots.+x\left[1-\left(\frac{q-1}{q}\right)\right]+1\right\};$$

so dass also jede Potenz von x mit 0 oder 2 multiplicirt ist.

β. *Die Congruenz* $X^2\equiv A \bmod \frac{x^q-1}{x-1}$, wo $q\equiv 1 \bmod 3$ ist.

Es bezeichne ϱ eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit. Man zerfälle q in das Product ihrer aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Primfactoren, die primär genommen werden, d. h. $\equiv -1 \bmod 3$. Der eine dieser

Primfactoren sei q_1, der andere q_2; und zwar sei q_1 derjenige Factor, welcher für eine primitive Wurzel g die Bedingung

$$g^{\frac{1}{3}(q-1)} \equiv \varrho \bmod q_1$$

erfüllt. (Man vergl. dieses Journal Band 28. S. 294. „Eisenstein, Formen dritten Grades") Z. B. für $q = 7$ ist $q_1 = 2 + 3\varrho$ und $q_2 = 2 + 3\varrho^2$.

Aus den 3^{q-1} Wurzeln der Congruenz heben wir diejenige bestimmte Wurzel heraus, welche sich für $x = r, r^2, \ldots . r^{q-1}$ resp. in $\sqrt[3]{A}\varrho^{\text{ind}\,1}$, $\sqrt[3]{A}\varrho^{\text{ind}\,2}$, ... $\sqrt[3]{A}\varrho^{\text{ind}\,q-1}$ verwandelt, und deren Ausdruck sich nach geeigneten Transformationen auf folgende Weise darstellen lässt:

$$X = \frac{1}{q}\sqrt[3]{A}.\sum_{m=1}^{m=q-1} \varrho^{\text{ind}\,m}[x^{m-2}(r^{2m}-r^m)+x^{m-3}(r^{3m}-r^m)+\ldots.+x(r^{(q-1)m}-r^m)+(1-r^m)],$$

oder auch durch die Gleichung

$$X = \sqrt[3]{\frac{A}{qq_2}}[x^{q-2}(\varrho^{\text{ind}\,2}-1)+x^{q-3}(\varrho^{\text{ind}\,3}-1)+\ldots..+x(\varrho^{\text{ind}\,q-1}-1)-1] .$$

Dies giebt folgenden Satz:

Die Congruenz

$$X^3 \equiv q\,q_2 \bmod \frac{x^q-1}{x-1}$$

hat zwar keine *rationalen* Wurzeln, aber drei Wurzeln, welche nach Hinzufügung von dritten Wurzeln der Einheit rational werden. Diese sind Ξ, $\varrho\Xi$, $\varrho^2\Xi$, wenn man Ξ gleich

$$x^{q-2}(\varrho^{\text{ind}\,2}-1)+x^{q-3}(\varrho^{\text{ind}\,3}-1)+\ldots..+x(\varrho^{\text{ind}\,q-1}-1)-1$$

setzt. Vertauscht man ϱ mit ϱ^2, so erhält man Auflösungen der Congruenz

$$X^3 \equiv q\,q_1 \bmod \frac{x^q-1}{x-1} .$$

Beispiel. Für $q = 7$ erhält man, als Wurzeln der Congruenz

$$X^3 \equiv 7(2+3\varrho) \bmod \frac{x^7-1}{x-1} ,$$

die Werthe:

$$\Xi = x^5(\varrho-1)+x^4(\varrho^2-1)+x^3(\varrho^2-1)+x^2(\varrho-1)-1 ;$$

ferner $\varrho\Xi$ und $\varrho^2\Xi$.

γ. Ist p irgend ein Theiler von $q-1$, und ϱ eine primitive $p$te Wurzel der Einheit, so wird immer

$$\Xi = x^{q-2}(\varrho^{-\text{ind}\,2}-1)+x^{q-3}(\varrho^{-\text{ind}\,3}-1)+\ldots.+x(\varrho^{-\text{ind}\,q-1}-1)-1$$

eine Wurzel der Congruenz

$$X^p \equiv A \bmod \frac{x^q-1}{x-1}$$

sein, wo A eine gewisse, aus ganzen Potenzen von ϱ zusammengesetzte, von x unabhängige Zahl bezeichnet. Die andern Wurzeln, die nach Hinzufügung von ϱ rational sind, werden $\varrho\Xi, \varrho^2\Xi, \ldots..\varrho^{q-1}\Xi$ sein.

13.

Wir kommen endlich zu den *quadratischen Formen*, auf welche sich ohne Mühe eine Reihe der Sätze übertragen lassen, welche *Dirichlet* in diesem Journal (Band 24, S. 324—332) für die complexen, aus 4ten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen entwickelt hat. Nur an einigen Stellen sind Bemerkungen hinzuzufügen, indem nicht sowohl von der Darstellung einer ganzen Function durch eine Form überhaupt, sondern nur von der einer rationalen Function durch rationale Functionen X, Y die Rede sein soll. Wir stellen uns daher unter den Grössen A, B, C rationale Functionen ohne gemeinsamen Theiler vor. Soll nun die durch kein Quadrat theilbare Function M durch die Form (A, B, C) dargestellt werden, so suche man alle Wurzeln der Congruenz

$$Z^2 \equiv D \bmod M,$$

welche $Z_1, Z_2, \ldots.$ sein mögen. Die ersten und dritten Glieder einer Substitution von (A, B, C) in $\left(M, Z, \frac{Z^2-D}{M}\right)$, wo für Z der Reihe nach sämmtliche Werthe $Z_1, Z_2, \ldots.$ gesetzt werden, geben Darstellungen X und Y für M durch die gegebne Form (A, B, C); und diese Darstellungen, auf gehörige Art mit den Wurzeln der Gleichung $P^2 - DQ^2 = 1$ zusammengesetzt, geben sämmtliche Werthe von X und Y.

Sind X und Y gleichzeitig *rational*, so gehören sie zu einer rationalen Wurzel Z. In der That lassen sich dann rationale Functionen X' und Y' von der Beschaffenheit finden, (Nr. 5), dass $XY' - YX' = 1$ ist, und es wird die Darstellung X, Y zu *der* Wurzel Z gehören, die nach dem Modulus M congruent, nemlich

$$AXX' + B(XY' + YX') + CYY',$$

d. h. eine rationale Function ist; woraus folgt, dass diese Wurzel der Congruenz $Z^2 \equiv D \bmod M$ selbst rational ist. (No. 10.) Die Substitution durch welche (A, B, C) in $\left(M, Z, \frac{Z^2 - D}{M}\right)$ verwandelt wird, ist

$$\begin{pmatrix} X, & X' - GX' \\ Y, & Y' - GY \end{pmatrix},$$

wenn GM das ganze Vielfache von M bezeichnet, um welches sich $AXX' + B(XY' + XY') + CYY'$ von der ihm congruenten Wurzel der Congruenz $Z^2 \equiv D \bmod M$ unterscheidet.

Nachdem gezeigt worden, dass rationale Darstellungen nur zu rationalen Wurzeln der Congruenz zweiten Grades gehören, ist klar, dass sämmtliche rationale Darstellungen, die zu derselben Wurzel gehören, aus einer rationalen Darstellung durch Zusammensetzung mit den rationalen Wurzeln der Gleichung $P^2 - DQ^2 = 1$ entstehen. Sind nämlich P und Q irgend welche Auflösungen dieser Gleichung, so sind allgemein

$$X_1 = XP - (BX + CY)Q,$$
$$Y_1 = YP + (AX + BY)Q$$

die Formeln für sämmtliche Werthe X_1, Y_1, die mit X, Y, zu derselben Wurzel gehören. Durch Auflösung vorstehender Gleichungen nach P und Q folgt, dass, wenn X, Y, X_1 Y_1 rational sein sollen, auch P und Q rationale Functionen sind.

Soll also eine Function M, die ein Product von p irreducibeln rationalen Factoren ist, durch (A, B, C) rational dargestellt werden, so muss die Congruenz

$$Z^2 \equiv D \bmod M$$

möglich sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so suche man ihre 2^p Wurzeln $Z_1, Z_2, \ldots$ Für jede derselben Z untersuche man, ob (A, B, C) mit $\left(M, Z, \frac{Z^2 - D}{M}\right)$ *äquivalent* ist. Ist Dies nicht der Fall, so giebt die betreffende Form keine Gruppe von Darstellungen. Im andern Falle suche man eine rationale Substitution der ersten in die andere, und setze dieselbe mit allen rationalen Lösungen der Gleichung $P^2 - DQ^2 = 1$ zusammen. Die ersten und dritten Glieder der Substitutionen sind die verlangten Darstellungen. Die Anzahl der verschiedenen Gruppen ist also höchstens 2^p.

14.

Die Gleichung $P^2 - DQ^2 = 1$.

Ist D eine nicht quadratische *Zahl*, so sieht man leicht, dass die rationalen Wurzeln der vorstehenden Gleichung nur rationale *Zahlen* sein werden; so dass man dieselben nach den bekannten Methoden, der Zahlentheorie finden kann. Ist aber D eine ganze Function von höherem Grade, so reichen unsre Kräfte im Allgemeinen zur Auffindung derWerthe für P und Q nicht aus.

In diesem Journal (Bd. I, p. 188 et s.) zeigt *Abel*, dass die Gleichung möglich sei, wenn der Kettenbruch für $\sqrt{D}$ periodisch ist, und dass sich in diesem Falle auch sämmtliche P und Q finden lassen. Man kann auch für eine Function D von gegebenem Grade die Bedingungen angeben, welche erfüllt werden müssen, damit die Periode beim ersten, zweiten, oder überhaupt einem gegebenen Gliede anfange, ist aber dadurch noch nicht im Stande, zu sagen, ob ein gegebenes D einen periodischen Kettenbruch gebe. Eine andre Behandlungsweise findet sich im II. Bande der Sammlung von *Abel*'s Werken, in einem Bruchstück: „Théorie des transcendantes elliptiques p. 141 et seq", die sich dort allerdings nur auf den Fall bezieht, wo D vom vierten Grade ist, aber ohne Schwierigkeiten auch auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden kann. Die Resultate beider Methoden lassen sich übrigens leicht auf einander zurückführen, wenn man den Grad der Nenner der aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche von $\sqrt{D}$ betrachtet. *Abel* zeigt nämlich, dass, wenn man annimmt, Q sei vom $n$ten Grade, die Constanten welche darin vorkommen, durch ein System linearer Gleichungen bestimmt werden; eine letzte lineare Gleichung zwischen denselben Constanten giebt eine Bedingung, welche durch die Natur von D erfüllt werden muss; wird sie nicht erfüllt, so muss für n ein andrer Werth angenommen und das Verfahren wiederholt werden; so dass man nie auf ein Zeichen für die Unmöglichkeit der Aufgabe kommt.

Jacobi hat für den Fall

$$D = x(x-1)\left(x - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\Delta\alpha^2}\right) = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx$$

die vollständige Kettenbruch-Entwicklung für $\sqrt{D}$ gegeben. (S. d. Journal Bd. 7, p. 42.). Es ist nämlich in diesem Falle $\sqrt{D}$ gleich

$$x^2 - \tfrac{1}{2}ax + i_1 + \cfrac{1}{M_1 x + m_1 + \cfrac{1}{M_2 x + m_2 + \quad \vdots \quad + \cfrac{1}{M_{n-1}x + m_{n-1} + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{D} + x^2 - \frac{1}{2}ax + i_n}{q_n(r_n x - 1)}}}}}},$$

wo die i, m, q und r gewisse, durch elliptische Transcendenten ausgedrückte Constanten, d. h. von x unabhängige Grössen sind, deren Ausdruck man am angeführten Orte findet. Ich erwähne nur, dass, $\alpha = \operatorname{am} u$ gesetzt, r_n folgenden Werth hat:

$$r_n = \frac{\sin\operatorname{am}(2n+2)u \,.\, \sin\operatorname{am} 2nu}{\sin^2\operatorname{am}(2n+1)u}\left[1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} u \,.\, \sin^2\operatorname{am}(2n+1)u\right].$$

Hat D einen höheren Grad, so hangt der Kettenbruch für $\sqrt{D}$ von Multiplicationsformeln höherer Transcendenten ab. Soll der Kettenbruch *periodisch* sein, so ist es nöthig, und hinreichend, dass r_n, aber nicht q_n, gleichzeitig verschwinde, so dass u auf einfache Art von K und K' abhangen muss. Dies ist also zugleich die Bedingung für die Möglichkeit, die Gleichung $P^2 - DQ^2 = 1$ aufzulösen.

15.

Durch die Auflösung der Gleichung $P^2 - DQ^2 = 1$ lässt sich bekanntlich ein Integral, dessen Nenner $\sqrt{D}$ und dessen Zähler eine gewisse ganze Function von x ist, auf einen Logarithmus, d. h. auf ein Integral

$$\int \frac{dt}{(t + t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

zurückführen. Aehnlich lässt sich mittels Auflösung der Gleichung

$$P^m - DQ^m = 1,$$

für irgend einen ganzen positiven Werth m, ein Integral von der Form

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt[m-1]{D^m}},$$

wo $f(x)$ eine gewisse ganze Function von x bezeichnet, auf

$$\int \frac{dt}{(t+t^2)^{\frac{m-1}{m}}}$$

reduciren.

α. In der That: wenn P und Q irgend welche ganze Functionen sind, die der Gleichung

$$P^2 - DQ^2 = 1$$

genügen, so haben $P^2 = 1 + DQ^2$ und $2PP' = Q^2D^1 + 2DQQ^1$ gewiss den Factor P gemein. Ist nun $\delta Q = n$, $\delta D = 2p$, indem δD offenbar eine grade Zahl sein muss, so wird $\delta P = n+p$. Berücksichtigt man, dass P und Q keinen Theiler gemein haben können, so folgt, dass $1 + DQ^2$ und $QD' + 2DQ'$ einen Factor P, also vom Grade $n + p$ haben müssen. Es ist also letzterer Ausdruck gewiss durch P theilbar, und da

$$\delta(QD' + 2DQ') = 2p + n - 1$$

ist, so ergiebt sich die Gleichung

$$(a) \qquad QD' + 2DQ' = Pf(x)\,,$$

wo $f(x)$ eine *ganze* Function vom Grade $p-1$ und offenbar bekannt ist, wenn P, Q und D gegeben sind. Man sieht zugleich, dass wenn δQ nicht 0 sein soll, $p > 1$ sein muss, also dass, wenn nicht D wenigstens vom 2ten Grade ist, die unbestimmte Gleichung für P und Q nur Zahlwerthe geben kann.

Setzt man in (a) für P seinen Werth $\sqrt{(1 + DQ^2)}$ und macht $DQ^2 = t$, so erhält man

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{D}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{(1+t)}}.$$

β. Sind P und Q Wurzeln der Gleichung

$$P^3 - DQ^3 = 1\,,$$

so müssen

$$P^3 = 1 + DQ^3 \quad \text{und} \quad 3P^2P' = (3DQ' + D'Q)Q^2$$

den Factor P^2 gemein haben; also ist der letztere Ausdruck durch P^2, oder auch durch P^2Q^2 theilbar. Ist wieder $\delta Q = n$, $\delta D = 3p$, also $\delta P = n + p$, so kann man

$$3DQ' + D'Q = P^2 f(x)$$

setzen, wo $\delta f(x) = p - n - 1$ ist. Macht man $DQ^3 = t$ und setzt für P seinen Werth, so erhält man schliesslich:

$$\int \frac{f(x)\,dx}{D^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{dt}{(t+t^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Da der Grad von $f(x)$, d. h. der Quotient, welchen man erhält, wenn $3DQ' + D'Q$ durch P^2 getheilt wird, nicht negativ sein kann, so folgt, dass n gleich, oder grösser als $p-1$ sein muss. Deshalb ist der Fall (β) einfacher, als der frühere (α). Ist D gegeben, so darf man nur versuchen, ob sich die unbestimmte Gleichung durch ein Q vom Grade 0, oder 1, bis endlich $p-1$, lösen lässt, während die Aufgabe (α) zu einer unendlichen Anzahl von Versuchen nöthigte. Der Grad von P ergiebt sich hieraus von selbst; er muss resp. entweder p, oder $p+1$, bis endlich $2p-1$ sein, und ist also jedenfalls kleiner als $3p$, d. h. als der von D. Hierdurch ist zugleich die Lösung der unbestimmten Gleichung, auf die der Congruenz

$$P^3 \equiv 1 \bmod D$$

zurückgeführt. Nicht bloss unter ihren Lösungen, sondern sogar unter ihren Wurzeln werden die P vorkommen, welche der unbestimmten Gleichung genügen.

Die Behandlung der Gleichung $P^m - DQ^m = 1$ hat nach dem Obigen keine Schwierigkeit.

16.

Eine zweite Untersuchung, von welcher in (No. 13) die Rede war, lässt sich gleichfalls im Allgemeinen nicht anstellen: die nämlich, ob zwei Formen *äquivalent* sind. Man begegnet dabei derselben Schwierigkeit, wie in (No. 14), die daraus entsteht, dass sich die Wurzel einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten ganze Functionen sind, nicht im Allgemeinen in einen periodischen Kettenbruch entwickeln lässt. *Wir beschränken uns deshalb auf den Fall, dass die Determinante* der gegebnen Form vom 0ten Grade, d. h. *eine Zahl ist:* ein Fall, welcher eine ähnliche Behandlung gestattet, wie der der negativen Determinanten in der Zahlentheorie.

Durch die Substitution $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & \Delta \end{pmatrix}$, wo Δ gehörig ausgewählt ist, geht nämlich die Form (A, B, A_1) in eine äquivalente Form (A_1, B_1, A_2) über, in welcher $\delta B_1 < \delta A_1$, folglich auch $\delta A_2 < \delta B_1$ ist. Es wird nämlich

$$B_1 = A_1\Delta - B.$$

Wäre $\delta A_1 < \delta B$, so hat man nur Δ gleich Null zu setzen, (sonst vom Grade $\delta B - \delta A$) und nur den Potenzen von x in Δ passende Constanten zu geben, die leicht zu finden sind, da $-B_1$ der Rest von B nach dem Modulus A_1 ist. Transformirt man auf ähnliche Weise (A_1, B_1, A_2) in (A_2, B_2, A_3), wo wieder

$$\delta A_3 < \delta B_2 < \delta A_2$$

ist, und fährt so fort, so kommt man zuletzt auf eine Form

$$(P\ ,\ Q\ ,\ R)\ ,$$

in welcher zuerst einer der drei Coefficienten constant ist. Es kann dieser Coefficient offenbar nicht P, sondern muss entweder Q, oder R sein.

α. Ist Q constant, so muss RP, folglich R, gleich Null werden, und die Form wäre dann:

$$(P\ ,\ \sqrt{D}\ ,\ 0)\ .$$

β. Ist R constant, aber natürlich nicht 0, weil dies sonst der Fall (α) wäre, so würde die nächste Transformation eine Form geben, deren erstes Glied constant ist (es sei $= k$), deren zweites Glied also $-\frac{D}{k}$ ist. Diese reducirte Form ist demnach:

$$\left(k\ ,\ 0\ ,\ -\frac{D}{k}\right).$$

Es seien nun A, B, A_1 rational und D *kein* Quadrat. Alsdann wird die Formenreihe offenbar nur rationale Glieder A_m, B_m haben, und es kann demnach kein B gleich der irrationalen Zahl $\sqrt{D}$ sein; so dass der Fall (α) ausgeschlossen ist und man immer auf eine Form

$$\left(k\ ,\ 0\ ,\ -\frac{D}{k}\right)$$

kommt, in welcher k *eine rationale Zahl ist*, die sich ergiebt, wenn A, B, A_1 bekannt sind. Man wird daher auch eine rationale Substitution von (A, B, A_1) in $\left(k\ ,\ 0\ ,\ -\frac{D}{k}\right)$ haben. Es ist leicht zu sehen, dass die letztere Form durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{k}}\ ,\ 0 \\ 0\ ,\ -\sqrt{k} \end{pmatrix}$$

in $(1\ ,\ 0\ ,\ -D)$ übergeht, so dass alle Formen der Zahlendeterminante D, wenn sie rationale Elemente haben (übrigens auch wenn sie nicht rationale Elemente haben), gewiss äquivalent sind, indem sie auf *dieselbe* reducirte Form führen. Da aber die vorstehende Substitution $\sqrt{k}$ enthält, also im Allgemeinen irrational ist, so ist sie nicht zum gegenwärtigen Zwecke dienlich, weil im Falle der Aequivalenz eine rationale Substitution von einer Form zu der andern nöthig ist (13).

17.

Die rationale Function M, welche wir durch die Form der Zahlendeterminante D darstellen, habe 1 zu dem von x unabhängigen Gliede, so dass also

$$M(0) = 1$$

ist. Es lässt sich dann zeigen, dass jede Form

$$\left(M\ ,\ Z\ ,\ \frac{Z^2 - D}{M}\right)\ ,$$

wo Z eine rationale Wurzel der Congruenz

$$Z^2 \equiv D \bmod M$$

ist, durch rationale Substitutionen in die Form

$$(1\ ,\ 0\ ,\ -D)\ ,$$

welche ihr äquivalent sein wird, verwandelt werden kann. Hat man $\left(M, Z, \frac{Z^2-D}{M}\right)$ durch das Verfahren (No. 16) auf die Form

$$\left(k\ ,\ 0\ ,\ -\frac{D}{k}\right)$$

gebracht, so giebt das erste und dritte Glied der umgekehrten Substitution, d. h. von $\left(k\ ,\ 0\ ,\ -\frac{D}{k}\right)$ in $\left(M\ ,\ Z\ ,\ \frac{Z^2-D}{M}\right)$, die also bekannt ist, (Nr. 13), rationale Werthe X, Y, welche M mittels der Form

$$\left(k\ ,\ 0\ ,\ -\frac{D}{k}\right)$$

darstellen; d. h. man erhält rationale Functionen X, Y für die Gleichung

$$kX^2 - \frac{D}{k}Y^2 = M\ .$$

Setzt man hier $x = 0$, so mag X und Y sich resp. in die (rationalen) Zahlen g und h verwandeln. Dann ist folglich, indem $M(0) = 1$ ist:

$$k = g^2 k^2 - D h^2 .$$

Wendet man nun auf $\left(k , 0 , -\frac{D}{k}\right)$ die Substitution

$$\begin{pmatrix} g , \frac{Dh}{k} \\ h , gk \end{pmatrix}$$

an, so verwandelt sich dasselbe in

$$(1 , 0 , -D) ,$$

so dass man eine rationale Transformation von $\left(M, Z, \frac{Z^2 - D}{M}\right)$ in $(1, 0, -D)$ erhält.

Hieraus ergiebt sich folgender Satz: Ist M irgend eine ganze Function von x mit rationalen Coefficienten, und D irgend eine nicht quadratische rationale Zahl, für welche die Congruenz

$$Z^2 \equiv D \bmod M$$

eine rationale Lösung hat, so lassen sich immer ganze Functionen *X und Y mit rationalen Coefficienten* finden, für welche $X^2 - D Y^2 \equiv kM$ und k eine solche Constante ist, dass $kM = 1$ ist, für $x = 0$. Es lässt sich dann also kM in das Product der beiden Factoren von gleich hohem Grade $X + Y\sqrt{D}$ und $X - Y\sqrt{D}$ verwandeln, die keine andere Irrationalität als $\sqrt{D}$ enthalten.

Ist der Coefficient der höchsten Potenz von x in kM gleich 1, so enthalten X und Y keine höheren Nenner (S. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1785: Recherches d'analyse indéterminée par Mr. *Le Gendre* p. 498), als 2, wenn D eine ganze Zahl ist.

Bei dem Beispiele, welches wir zum Schlusse geben, wird man sogleich durch das Verfahren von (No. 16) auf die Form $(1 , 0 , -D)$ kommen, so dass die Zerlegung der Zahl k und die letzte Transformation dort überflüssig ist.

18.

Es soll schliesslich gezeigt werden, was sich aus dem Vorhergehenden für die Darstellung der Function

$$M = \frac{x^q - 1}{x - 1}$$

durch die Form

$$(1\ ,\ 0\ ,\ (-1)^{\frac{1}{2}(q+1)}q)\ ,$$

welche die Determinante $(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}q$ hat, ergiebt; unter der Voraussetzung, dass q eine ungerade Primzahl ist.

Da die Congruenz

$$Z^2 \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}q \bmod \frac{x^q - 1}{x - 1}$$

genau zwei rationale Wurzeln Z und $-Z$ hat (No. 12, a), so sind sämmtliche rationale Transformationen von

$$(1\ ,\ 0\ ,\ \pm q)$$

in $\left(\frac{x^q-1}{x-1}\ ,\ Z,\ \frac{Z^2-D}{M}\right)$ und $\left(\frac{x^q-1}{x-1}\ ,\ -Z\ ,\ \frac{Z^2-D}{M}\right)$

zu suchen. Man sieht leicht, dass wenn

$$\begin{pmatrix} \alpha\ ,\ \beta \\ \gamma\ ,\ \delta \end{pmatrix}$$

eine Transformation von $(1\ ,\ 0\ ,\ \pm q)$ in die erste ist, dass dann

$$\begin{pmatrix} -\alpha\ ,\ \beta \\ \gamma\ ,\ -\delta \end{pmatrix}$$

die gegebne Form in die zweite umgestaltet; so dass sich aus Betrachtung der ersten sämmtliche Darstellungen herleiten lassen, wenn man bloss ihre Zeichen verändert.

Man muss demnach nach (No. 16 und 17) eine Substitution von $\left(\frac{x^q-1}{x-1}\ ,\ Z\ ,\ \frac{Z^2-D}{M}\right)$ in $(1\ ,\ 0\ ,\ \pm q)$ suchen, dieselbe umkehren und ihr erstes und drittes Glied herausnehmen. Sind diese Glieder resp. X und Y, so erhält man eine Darstellung von M, d. h. eine rationale Zerlegung

$$\frac{x^q - 1}{x - 1} = X^2 - (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}q\,Y^2.$$

Die übrigen findet man, wenn man X und Y mit allen rationalen *Zahlen* zusammensetzt, welche der Gleichung

$$y^2 \pm q z^2 = 1$$

genügen; d. h. also, indem man die Wurzeln des vorstehenden Ausdrucks in die Werthe X_1 und Y_1 (No. 13) statt P und Q setzt.

19.

Beispiele.

1. $q = 3$. Hier sind die Zerlegungen von $1 + x + x^2$ in die Form $X^2 + 3Y^2$ zu suchen. Die Wurzeln der Congruenz

$$Z^2 \equiv -3 \bmod 1 + x + x^2$$

sind (No. 12, α)

$$Z = \pm(2x + 1);$$

also ist für $\left(M, Z, \frac{Z^2 - D}{M}\right)$ der Ausdruck

$$(1 + x + x^2 \ , \ 2x + 1 \ , \ 4)$$

zu setzen. Macht man in der Transformationsformel (No. 16)

$$\Delta = \frac{2x + 1}{4},$$

so geht die obige Form in

$$(4 \ , \ 0 \ , \ \tfrac{3}{4})$$

über, und zwar durch

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \ , & 0 \\ 0 \ , & 2 \end{pmatrix},$$

in $(1 \ , \ 0 \ , \ 3)$. Setzt man sämmtliche Substitutionen zusammen, so verwandelt sich

$$(1 + x + x^2 \ , \ 2x + 1 \ , \ 4)$$

durch

$$\begin{pmatrix} 0 \ , & 2 \\ -\frac{1}{2} \ , & \frac{1}{2}(2x + 1) \end{pmatrix}$$

in $(1 \ , \ 0 \ , \ 3)$, folglich letztere Form in erstere durch

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2x + 1) \ , & -2 \\ \frac{1}{2} \ , & 0 \end{pmatrix},$$

so dass $\pm X = \frac{1}{2}(2x + 1)$, $\pm Y = \frac{1}{2}$ eine Lösung ist. Die übrigen findet

man durch Zusammensetzung mit den rationalen Wurzeln der Zahlengleichung $y^2 + 3z^2 = 1$.

2. $q = 5$. Es wird

$$\left(\frac{x^5-1}{x-1} \;,\; 2x^3+2x^2+1 \;,\; 4x^2+4x-4\right)$$

der Reihe nach in

$$(4x^2+4x-4 \;,\; -2x-1 \;,\; 1) \quad , \quad (1 \;,\; 0 \;,\; -5)$$

transformirt, wenn man Δ resp. gleich $\frac{1}{2}x$ und $-2x-1$ setzt. Durch Zusammensetzung und Umkehrung erhält man

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2x^2+x+2) & , & 2x+1 \\ \frac{1}{2}x & , & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$\pm X = \tfrac{1}{2}(2x^2+x+2) \quad , \quad \pm Y = \tfrac{1}{2}x\,.$$

3. $q = 7$. Es seien A, B, A_1, die Glieder der zu transformirenden, A_1, B_1, A_2, die der ersten transformirten Gleichung etc. Es ergiebt sich:

$$A = \frac{x^7-1}{x-1} \quad , \quad B = 2x^4+2x^2+2x+1 \quad ,$$

$$A_1 = 4x^2-48+8 \qquad B_1 = 2x-1 \;,$$

$$A_2 = 1 \quad , \quad B_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 7$$

und der Reihe nach Δ gleich $\frac{1}{2}(x^2+x)$ und $2x-1$. Die Substitution, deren erstes und drittes Glied X und Y sind, giebt:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2x^3+x^2-x-2) & , & 2x-1 \\ -\frac{1}{2}(x^2+x) & , & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $q = 11$.

$$A = \frac{x^{11}-1}{x-1} \quad , \quad B = 2x^9+2x^5+2x^4+2x^3+2x+1 \;,$$

$$A_1 = 4x^8-4x^7+8x^4-8x+13 \;,\; B_1 = -2x^7+2x^5+2x^4-2x^3-4x^2+5$$

$$A_2 = x^6+x^5-x^4-3x^3-2x^2+2x+3 \;,\; B_2 = 2x^5+2x^4-4x^2-2x+1$$

$$A_3 = 4x^4+4x^3+4x^2-4x+4 \quad , \quad B_3 = 2x^3+2x^2+4x-1 \;,$$

$$A_4 = x^2+x+3 \quad , \quad B_4 = 2x+1 \quad , \quad A_5 = 4 \quad , \quad B_5 = 0 \quad , \quad A_6 = \tfrac{11}{4}\,.$$

Die Δ sind der Reihe nach:

$$\tfrac{1}{2}(x+1) \quad , \quad -2x+2 \quad , \quad \tfrac{1}{2}x \quad , \quad 2x \quad , \quad \tfrac{1}{4}(2x+1) .$$

Von der Form $(4 , 0 , \frac{11}{4})$ führt die Substitution

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} , & 0 \\ 0 , & 2 \end{pmatrix}$$

auf $(1 , 0 , 11)$.

Setzt man alle Substitutionen zusammen, so erhält man durch Umkehrung die gesuchte Transformationsformel

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(2x^5+x^4-2x^3+2x^2-x-2) & , & -2x^4+x^3+3x^2-4x+1 \\ \frac{1}{2}(x^4+x) & , & x^3-x^2+1 \end{pmatrix} .$$

5. $q = 13$.

$$A = \frac{x^{13}-1}{x-1} \quad , \quad B = 2x^{11}+2x^8+2x^7+2x^6+2x^5+2x^2+1 ,$$

$$A_1 = 4x^{10}-4x^9+8x^7+4x^4-4x^3+4x^2+12x-12 ,$$

$$B_1 = -2x^9+2x^8+2x^7-2x^6+6x^2-7 \quad , \quad A_2 = x^8-x^7-2x^6+x^4+3x^3+3x^2-3x-3,$$

$$B_2 = 2x^7+2x^6-2x^5-6x^4-6x^3+6x+7 \quad , \quad A_3 = 4x^6+12x^5+16x^4+8x^3-8x^2-16x-12,$$

$$B_3 = -2x^5-6x^4-6x^3+4x+5 \quad , \quad A_4 = x^4+3x^3+2x^2-2x-1 ,$$

$$B_4 = 2x^3+4x^2-2x-5 \quad , \quad A_5 = 4x^2+4x-12 \quad , \quad B_5 = -2x-1,$$

$$A_6 = 1 \quad , \quad B_6 = 0 \quad , \quad A_7 = -13 .$$

Die Δ sind $\frac{1}{2}(x+1) , -2x , \frac{1}{2}(x-2), -2x, \frac{1}{2}(x+1), -2x-1$. Die Glieder der gesuchten Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind

$$2\alpha = 2x^6+x^5+4x^4-x^3+4x^2+x+2 ,$$

$$\beta = 2x^5-x^4+3x^3-3x^2+6x+1 \quad , \quad 2\gamma = x^5+x^3+x ,$$

$$\delta = x^4-x^3+x^2+1 .$$

Man sieht an diesen Beispielen, dass alle A und B ganze Zahlen zu Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x haben; ein Beweis dieser Eigenschaft ist im Vorhergehenden nicht gegeben.

Bonn, im October 1852.

15.

Ueber die Entwickelung von Wurzeln algebraischer Gleichungen in Potenzreihen.

(Von Herrn Prof. Dr. *Heine* zu Bonn.)

In einem Briefe an *Goldbach* macht *Euler* die Bemerkung, dass in der Entwickelung von $\sqrt[n]{(1-n^2 a)}$ nach aufsteigenden Potenzen von a alle Coefficienten *ganze* Zahlen werden *). *Eisenstein* hat diesen Satz verallgemeinert. Er giebt an**), dass in jeder Reihen-Entwickelung dieser Art, „wenn sie nur aus einer *algebraischen Function* stammt, mag dieselbe übrigens explicite oder implicite gegeben sein," nur eine endliche Anzahl bestimmter Primzahlen und deren Potenzen als nothwendige Nenner vorkommen***). Es ist mir gelungen, diesen Satz zu verallgemeinern, indem ich die Methode genauer in's Auge fasste, durch die ich ihn früher auch für den Fall bewies, für welchen nach *Eisenstein*'s (nicht richtiger) Angabe keine Reihen-Entwickelung existirt. In der gegenwärtigen Abhandlung findet man die Ableitung der neuen Resultate. Es ist bei denselben vermieden worden, auf die Entwickelungen der früheren zu verweisen.

Den von *Eisenstein* aufgestellten Satz werde ich in doppelter Beziehung verallgemeinern. Man nehme an, es sei eine algebraische Gleichung $f(y,x) = 0$

---

*) S. Correspondance mathématique et physique, publiée par *Fuss*. St. Pétersbourg 1843 Tome I, Lettre CXLII, pag. 557. (Berlin d. 4. December 1751.) Unter n muss eine ganze Zahl verstanden werden. Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus (§. 1) meiner Abhandlung im 45ten Bande dieses Journals, wenn man die dort in der Anmerkung gegebene, auch sonst bekannte Formel für den Exponenten der höchsten Potenz einer Primzahl p, die das Product $1.2.3.....m$ theilt, so schreibt:

$$\frac{m-(a_0+a_1+.....+a_r)}{p-1}.$$

Dieser Ausdruck ist offenbar kleiner als m.

**) Im Monatsbericht der Berliner Akademie vom Juli 1852, S. 441.

***) Den Beweis dieses Satzes findet man in meiner oben erwähnten Abhandlung (S. 291 – 296). Am Eingange derselben ist die betreffende Stelle des Monatsberichts abgedruckt.

gegeben, und stelle sich, ohne die Art der Gleichung dadurch weiter zu beschränken, $f(y, x)$ als ganze Function von x und y vor. Lässt sich irgend eine Wurzel dieser Gleichung in eine Reihe

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots.$$

entwickeln, deren Coefficienten c rationale Zahlen in ihrer kleinsten Benennung bezeichnen, so behauptet *Eisenstein*, dass diese c, als Nenner, nur eine endliche Anzahl verschiedener Primzahlen enthalten. Ich werde zeigen, dass sämmtliche Nenner sich wegheben müssen, wenn man für x ein gewisses ganzes Vielfache von x setzt, und die Reihe, in der ja auch c_0 gebrochen sein kann, mit einer gewissen ganzen Zahl multiplicirt. Während es also nach dem von *Eisenstein* aufgestellten Satze noch möglich wäre, dass die Reihe

$$y = 1 + \frac{x}{3^1} + \frac{x^2}{3^4} + \frac{x^3}{3^9} + \frac{x^4}{3^{16}} + \ldots..,$$

in der ja *nur eine* Primzahl, nämlich 3, im Nenner vorkommt, die Wurzel einer algebraischen Gleichung sei, so könnte Dies nach der Verallgemeinerung des Satzes nicht mehr der Fall sein; welche ganze Zahl auch k sein mag; es könnten sich nie alle Nenner wegheben, wenn man in die Reihe kx statt x setzt.

Wir erweitern den Satz noch in einer andern Richtung. Wenn *Eisenstein* es auch nicht ausdrücklich bemerkt, so hat er doch unter einer algebraischen Gleichung eine solche verstanden, deren Zahlcoefficienten *rational* sind. Es geht Dies daraus hervor, dass er sagt, die Primzahlen, welche als Nenner auftreten können, seien Divisoren von der *Determinante* der Function $f(y, 0)$. Die Determinante wäre aber im Allgemeinen eine irrationale Zahl, wenn nicht die Zahlcoefficienten von $f(y, x)$ rational sind. Der oben angegebene Satz gilt aber auch noch, wenn diese Coefficienten irrational sind, d. h. Irrationale von der allgemeinsten Art, nicht bloss algebraische Irrationale. Ich werde nämlich in (§. 1) folgenden Satz beweisen:

Ist

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots..$$

die Wurzel einer algebraischen Gleichung $f(y, x) = 0$ mit *irrationalen* Zahlcoefficienten, so genügt sie auch, vorausgesetzt dass die c *rational* sind, einer algebraischen Gleichung $\psi(y, x) = 0$ mit *rationalen* Coefficienten.

§. 1.

Die Function $f(y, x)$ ist ein Aggregat von Gliedern von der Form

$$g\, x^m y^p ,$$

wenn m und p *ganze positive*, g *rationale* oder *irrationale* Zahlen bezeichnen. Es seien r verschiedene derselben, nämlich $g_1, g_2, \ldots . g_r$ irrational, die übrigen rational, oder, gleich einer der r, irrationalen Grössen g. Dann hat offenbar $f(y, x)$ die Form

$$\psi_0(y, x) + g_1\psi_1(y, x) + g_2\psi_2(y, x) + \ldots . + g_r\psi_r(y, x) ;$$

wo die ψ ganze rationale Functionen von y und x *mit rationalen Coefficienten* sind.

Sollte zwischen den irrationalen Zahlen g und irgend welchen rationalen a eine Gleichung

$$a_0 + a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots . + a_r g_r = 0$$

bestehen (natürlich ohne dass *alle* a Null sind), so wird sich eine der Grössen g z. B. g_1, eliminiren lassen, und daher $f(y, x)$ auch die Form

$$g_2\vartheta_2(y, x) + g_3\vartheta_3(y, x) + \ldots . + g_r\vartheta_r(y, x)$$

haben, in welcher die ϑ Functionen wie die ψ bedeuten; d. h. *ganze* Functionen mit *rationalen* Coefficienten. Hier kommen nur $r - 1$ Irrationale vor. Besteht zwischen diesen und den rationalen Zahlen β wiederum eine Gleichung

$$\beta_0 + \beta_2 g_2 + \ldots . + \beta_r g_r = 0 ,$$

so fahre man in der Reduction fort, bis entweder keine irrationalen g übrig bleiben, oder doch nur solche, zwischen denen keine lineare Gleichung von der obigen Art Statt findet. Es lässt sich daher $f(y, x)$ in eine Summe von der Form

$$\psi_0(y, x) + g_1\psi_1(y, x) + g_2\psi_2(y, x) + \ldots . + g_r\psi_r(y, x) = f(y, x)$$

zerlegen, in welcher die ψ ganze Functionen von y und x mit rationalen Coefficienten bedeuten, und die g irrationale Grössen, zwischen welchen keine Gleichung

$$a_0 + a_1 g_1 + \ldots . + a_r g_r = 0$$

mit rationalen a besteht.

Ist nun die Reihe

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots ,$$

in welcher die c rational sind, eine Wurzel der Gleichung $f(y, x) = 0$, so muss, wie wir zeigen werden, derselbe Werth eine Wurzel der Gleichungen

$$\psi_0(y, x) = 0 \quad ; \quad \psi_1(y, x) = 0 \quad ; \quad \ldots\ldots \; \psi_r(y, x) = 0 ,$$

also gewiss einer Gleichung mit *rationalen* Coefficienten sein.

Man substituire für y seinen Werth in $f(y, x)$, und dazu in $\psi_0, \psi_1, \ldots . \psi_r$, und ordne dann nach Potenzen von x. Es möge sich nach dieser Substitution

$$\begin{aligned}
\psi_0(y, x) &= \alpha_0 + \beta_0 x + \gamma_0 x^2 + \ldots\ldots \\
\psi_1(y, x) &= \alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 + \ldots\ldots \\
&\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\
\psi_r(y, x) &= \alpha_r + \beta_r x + \gamma_r x^2 + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

ergeben, wo die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots .$ offenbar rationale Zahlen vorstellen. (Die Coefficienten c in der Entwickelung von y nach Potenzen von x, also auch *die* in den Entwickelungen von jeder ganzen Potenz von y, sind nämlich rational; eben so die Zahlcoefficienten in allen ψ.) Es muss daher

$$\begin{aligned}
f(y, x) = {} & (\alpha_0 + g_1 \alpha_1 + g_2 \alpha_2 + \ldots\ldots + g_r \alpha_r) \\
& + (\beta_0 + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \ldots\ldots + \beta_r g_r) x \\
& + (\gamma_0 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \ldots\ldots + \gamma_r g_r) x^2 \\
& + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

für alle Werthe von x verschwinden, d. h. man hat dann:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots . + \alpha_r g_r &= 0 , \\
\beta_0 + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \ldots . + \beta_r g_r &= 0 , \\
\gamma_0 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \ldots . + \gamma_r g_r &= 0 ;
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass alle $\alpha, \beta, \gamma, \ldots .$ verschwinden, d. h. dass auch $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots .$ durch die Substitution des Werths

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots .$$

für y sich in Null verwandeln. Es ist also

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots .$$

eine Wurzel aller Gleichungen

$$\psi_0 = 0 \quad ; \quad \psi_1 = 0 \; ; \; \ldots\ldots \; \psi_r = 0 \, .$$

Anm. Bedeuten $c_0, c_1, \ldots$ nicht rationale *Zahlen*, sondern nur rationale *Functionen* von gewissen irrationalen Grössen $i_0, i_1, \ldots$, und ist

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots .$$

die Wurzel einer algebraischen Gleichung, so ist sie auch die Wurzel einer solchen algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von $i_0, i_1, \ldots$ sind. Unter rationalen Functionen sind hier natürlich solche zu verstehen, deren Zahlcoefficienten rational sind.

§. 2.

Wir gehen nun dazu über, die andere in der Einleitung angegebene Verallgemeinerung des *Eisenstein*schen Satzes zu beweisen. Zufolge (§. 1) kann man sich vorstellen, dass in der Gleichung $f(y, x) = 0$ selbst, welcher die Wurzel

$$y = c_0 = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots .$$

genügt, nur rationale, oder sogar ganze Zahlcoefficienten vorkommen. Jeder Theil der Reihe für y, wie

$$c_m + c_{m+1} x + c_{m+2} x^2 + \ldots ,$$

wird dann ebenfalls die Wurzel einer Gleichung sein, die, $f = 0$, ganzzahlige Coefficienten hat, die man auch leicht aus $f = 0$ bilden kann, und es wird hinreichen, wenn man den Satz für einen *solchen Theil* der Reihe beweiset. In der That: kann man in diesem alle Nenner wegschaffen, indem man ihn mit einer ganzen Zahl multiplicirt und für x ein ganzes Vielfache von x setzt, so wird das Gleiche auch mit der ganzen Reihe y geschehen können.

Ordnet man $f(y, x)$ nach Potenzen von y, so hat diese Function die Form

$$A y^n + B y^{n-1} + \ldots\ldots + I y^2 + K y + L \, ,$$

wo $A, B, \ldots$ ganze Functionen von x bezeichnen. Es sei

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$
$$B = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots.$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$I = i_0 + i_1 x + i_2 x^2 + \ldots.$$
$$K = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots.$$
$$L = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots.$$

Sämmtliche Zahlen $a, b, c, \ldots.$ sind *ganz*; einige von ihnen können auch *Null* sein.

Aus der Gleichung $f = 0$ mag man die gleichen Wurzeln weggeschafft haben, so dass jede nur einmal vorkommt, also nicht zwei Wurzeln der Gleichung $f = 0$ dieselbe Reihen-Entwickelung in ihrer ganzen Ausdehnung geben. Setzt man dann

$$y = c_0 + x y_1 \quad , \quad y_1 = c_1 + x y_2 \ , \ldots.$$

so wird man leicht die Gleichungen für $y_1, y_2, \ldots.$ bilden können, die sämmtlich, wie die ursprüngliche, vom $n$ten Grade sind und ganze Coefficienten haben, so dass z. B. y_m eine Wurzel der Gleichung

$$A_m y_m^n + B_m y_m^{n-1} + \ldots. + I_m y_m^2 + K_m y_m + L_m = 0$$

ist, in welcher $A_m, B_m, \ldots.$ ganze Functionen von x mit ganzzahligen Coefficienten sind, die ich mir durch Division von jedem Factor, der allen gemein ist, befreit vorstelle. Es können daher $A_m, B_m, \ldots. L_m$ für keinen Werth von x *zugleich* verschwinden. Setzt man in jeder dieser abgeleiteten Gleichungen $x = 0$, so wird, von einem gewissen m an, jede Gleichung *nur einen* Werth von y_m für dieses besondere x geben, weil nicht zwei Wurzeln der Gleichung $f(y, x) = 0$ in ihrer ganzen Entwickelung übereinstimmen. Solche Gleichungen wollen wir *reducirte* nennen. In einer reducirten Gleichung verschwinden daher $A_m, B_m, \ldots I_m$ für $x = 0$; K_m kann nicht für $x = 0$ verschwinden, weil sonst auch L_m gleich Null sein müsste, also alle Coefficienten verschwinden würden; was nicht möglich ist. (S. oben.) L_m kann offenbar Null werden.

Genügt also y der Gleichung $f(y, x) = 0$, so ist ein Theil der Reihen-Entwickelung von y, nämlich

$$y_m = c_m + c_{m+1} x + c_{m+2} x^2 + \ldots.,$$

eine Wurzel einer reducirten Gleichung.

Es reicht daher hin, den Satz für eine Reihe

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots.$$

zu beweisen, welche eine Wurzel der reducirten Gleichung

$$f(y, x) = A y^n + B y^{n-1} + \ldots. + I y^2 + K y + L$$

ist. Die Coefficienten in dieser Gleichung haben, da sie eine reducirte ist, die Form:

$$\begin{aligned} A &= a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.. \\ B &= b_1 x + b_2 x^2 + \ldots.. \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ I &= i_1 x + i_2 x^2 + \ldots.. \\ K &= k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots.. \\ L &= l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots.. \end{aligned}$$

Es sind hier a, b, ... ganze Zahlen, die auch zum Theil Null sein können; k_0, oder wie wir zur Abkürzung schreiben werden, k, ist bestimmt nicht Null.

Es wird ferner nur der Fall zu betrachten sein, wo das von x freie Glied in y *ganz* ist. Hätte nämlich c_0 den Nenner g, so würde

$$g y = g c_0 + g c_1 x + g c_2 x^2 + \ldots.,$$

wo $g c_0$ eine ganze Zahl ist, gleichfalls einer reducirten Gleichung

$$A(gy)^n + Bg(gy)^{n-1} + \ldots. + I g^{n-2}(gy)^2 + K g^{n-1}(gy) + L g^n = 0$$

genügen. Kann man daher den Satz beweisen, dass die Wurzel einer reducirten Gleichung (zu der wir wieder die obige $f(y, x) = 0$ nehmen)

$$y = c_0 + c_2 x + c_2 x^2 + \ldots.$$

in welcher c_0 *ganz* ist und alle c rational sind, durch Vertauschung von x mit einem *ganzen Vielfachen* kx von x, von allen Nennern befreit wird, so ist damit zugleich der in der Einleitung ausgesprochene Satz bewiesen.

§. 3.

Man betrachte die Reihen-Entwickelung der Potenzen von y genauer, als es oben in (§. 1) geschahe. In einer jeden Potenz von y tritt als Factor ir-

gend einer Potenz von x, z. B. x^p, ein Aggregat auf, dessen einzelne Glieder aus Binomialcoefficienten (und das sind ganze Zahlen) und aus Potenzen von c_0, c_1, $\ldots . c_p$ besteht, d. h. aus Gliedern von der Form

$$g\, c_0^{\alpha_0}\, c_1^{\alpha_1} \ldots . c_p^{\alpha_p},$$

wenn g eine ganze Zahl bezeichnet. Man sieht leicht, dass die Exponenten α durch die Gleichung

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots . + p\alpha_p = p$$

verbunden sind. Es ist c_0 eine ganze Zahl. Sollten c_1, c_2, $\ldots . c_p$ resp. nur die Nenner k, k^2, $\ldots . k^p$ enthalten, so wird der Coefficient von x^p nur den Nenner k^p haben.

Setzt man in $f(y, x) = 0$ für y seinen Werth und ordnet nach x, so müssen die Coefficienten jeder Potenz von x für sich verschwinden. Aus dem mit x^1 multiplicirten Gliede zunächst entsteht die Gleichung

$$[a_1 c_0^n + b_1 c^{n-1} + \ldots . + k_1 c_0 + l_1] + k_0 c_1 = 0;$$

woraus folgt, dass $k_0 c_1$ eine ganze Zahl ist, also c_1 nur den Nenner k hat. Das mit x^2 multiplicirte Glied zeigt auf ähnliche Art, dass in c_2 der Nenner k^2 vorkommt. Allgemein wird durch vollständige Induction bewiesen, dass k^m der Nenner von c_m ist. Es sei nämlich der Satz bis zu einem gewissen m wahr, so muss er, wie die Betrachtung des Coefficienten von x^{m+1} lehrt, auch für c_{m+1} gelten. Zu diesem Coefficienten geben nämlich in Ay^n, By^{n-1}, $\ldots . Iy^2$ (da $A, B, \ldots . I$ kein von x freies Glied enthalten), nur diejenigen Glieder in der Entwickelung der Potenzen von y einen Beitrag, welche höchstens mit x^m multiplicirt sind, also nur den Nenner k^m enthalten. Ky giebt einen ähnlichen Beitrag, ausser diesem aber noch $k c_{m+1}$; endlich L giebt den Beitrag l_{m+1}, welches *ganz*, und von einem gewissen m an Null ist. Es enthält $k c_{m+1}$, also nur den Nenner k^m, oder c_{m+1} den Nenner k^{m+1}. Die Reihe für y hat demnach die Form

$$g_0 + \frac{g_1}{k} x + \frac{g_2}{k^2} x^2 + \ldots ,$$

wo sämmtliche g *ganz* sind; sie verwandelt sich daher durch Vertauschung von x mit kx in eine Reihe mit *ganzen* Coefficienten.

§. 4.

Sind die Grössen $A, B, \ldots$ nicht ganze Functionen von x, sondern nach x geordnete unendliche Reihen, so lässt sich nicht mehr annehmen, dass sämmtliche $a, b, \ldots$ *ganz* sind. Es ist leicht zu sehen, dass alsdann die Reihe für y, wenn man wiederum x mit einem ganzen Vielfachen von x vertauscht hat, keine andern Nenner enthalten kann, als die welche in $A, B, \ldots$ selbst vorkommen. In diesem Falle werden die *Primzahlen*, welche in den Nennern auftreten, entscheidend sein können. Enthalten z. B. $A, B, \ldots$ alle Zahlen von der Form $4g+1$ im Nenner, also auch unendlich viele Primzahlen von dieser Form, so wird y keine Wurzel dieser Gleichung sein können, wenn es alle Zahlen $4g+3$ im Nenner enthält.

Ausser obigem Resultate wird man noch einige Sätze finden, die sich zum Theil auf den Fall beziehen, in welchem mit unendlichen Reihen gewisse algebraische Operationen vorgenommen werden; zum Theil auf den Fall, wenn die Coefficienten c in y irrational sind. So z. B. werden in der Potenz einer unendlichen Reihe die Primzahlen, welche im Nenner enthalten sind, an *der* Stelle, an welcher sie zuerst auftreten, im Allgemeinen in derselben Potenz vorkommen, in welcher sie in der ursprünglichen Reihe zuerst auftraten. Es wird überflüssig sein, bei diesen Sätzen zu verweilen, da sie sich unmittelbar durch die Methoden dieser oder der früheren Abhandlung ergeben.

Bonn, im Januar 1854.

16.
Ueber die Zapfenreibung bei stehenden Wellen.

(Von Herrn Dr. *Druckenmüller*, Director des Königl. Gewerbe-Instituts zu Berlin.)

Vor einigen Jahren hat *Schiele* in England ein Patent auf eine neue Construction der Zapfen an stehenden Wellen erhalten, welche als besonders vortheilhaft gerühmt wird, weil die Reibung bei solchen Zapfen nicht allein *geringer* als bei andern, sondern auch in *allen Puncten gleich* sein soll. Man hat deshalb die Erzeugende der Umdrehungsfläche, welche den Zapfen begrenzt, *Antifrictionscurve* genannt.

Legt man die Axe der y eines rechtwinkligen Coordinatensystems, auf welches die Antifrictionscurve bezogen wird, in die Axe der Welle, so ist jene Curve dadurch characterisirt, dass die *Tangente* von einem Punct derselben bis zur Axe der y *constant* bleibt. Demgemäss ist jene Linie eine bekannte *Tractorie*, welche früher mit dem Namen *Lagoïde* bezeichnet worden ist. Wegen ihrer Eigenschaften kann u. A. auf die „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der anal. Geom.", von *L. J. Magnus*, Theil I, p. 551 verwiesen werden.

Im dritten Bande des „Practical Mechanic. Journal" von Glasgow ist eine grosse Zahl von Fällen erörtert, für welche die Anwendung jener Zapfenconstruction empfohlen wird. Zugleich wird auf frühere Nachrichten, welche im ersten Bande enthalten sind, verwiesen. Da ich mir den letztern nicht verschaffen konnte, und andere Mittheilungen über denselben Gegenstand mir nicht zugekommen sind, so ist mir nicht bekannt, worauf sich die Behauptung gründet, dass ein nach der Antifrictionscurve gebildeter Zapfen *gleiche* Reibung *in allen Puncten* erleide und dass das Reibungsmoment bei ihm ein Minimum sei. Man hat mir versichert, der Patent-Inhaber sei durch rein empirische Versuche auf jene Construction geführt worden. Die nachfolgende Untersuchung wird ergeben, in wie fern dieselbe einen Vorzug vor andern hat.

§. 1.

Indem man jeden Seitendruck auf eine stehende Welle ausschliesst, nehme man an, dass keine andere Kraft auf dieselbe wirke, als ein Druck in der Richtung ihrer Axe.

Durch den Zweck des Zapfens ist bedingt, dass er von einer Umdrehungsfläche, deren Axe mit der Axe der Welle zusammenfällt, begrenzt wird. Legt man eine Ebene senkrecht auf die Axe, so wird sie die Zapfen-Oberfläche im Allgemeinen in einer Kreislinie schneiden, deren Puncte bei der Umdrehung gleiche Reibung erleiden. Das ebene Zapfen-Ende kann als besonderer Fall betrachtet werden; alle Puncte einer um den Endpunct der Axe beschriebenen Kreislinie erleiden aber auch hier gleiche Reibung.

Wenn man Ay (Fig. 1) in die Axe der Welle legt und Ax rechtwinklig zu Ay annimmt, so bestimmt die Ebene $x\,Ay$ einen Schnitt der Zapfen-Oberfläche, welcher als die Erzeugende der letztern betrachtet werden kann. Bezogen auf Ay und Ax als positive Arme der Coordinaten-Axen, wollen wir die Erzeugende durch

$$(1.) \qquad f(x\,,\,y) = 0$$

darstellen.

Wenn man einen Bogen der Erzeugenden durch s und einen Bogen des Zapfenschnitts mit dem Radius x durch σ bezeichnet, so ist $ds.d\sigma$ ein Element der Zapfen-Oberfläche. Man suche zunächst den normalen Druck auf dieses Element zu bestimmen.

Bezeichnet man hierzu den verticalen Druck, welcher auf die Flächen-Einheit des Querschnitts der Welle ausgeübt wird, durch p, den verticalen Druck auf die ganze Unterlage aber durch P, und nimmt an, dass zwischen Zapfen und Pfanne von dem Radius $x = \varrho$ bis $x = r$, Berührung Statt finde, so ist

$$(2.) \qquad p = \frac{P}{\pi(r^2 - \varrho^2)}\,,$$

indem der verticale Druck auf gleiche Projectionen des gedrückten Pfannenstücks als gleich angenommen werden muss. Nun sei (Fig. 1) LM die Tangente und MN die Normale in dem Puncte M, welchem x und y als Coordinaten angehören, an die erzeugende Curve, und φ sei der Winkel, den MN mit der Axe der x macht, in dem herkömmlichen Sinne gezählt: dann wird für jede Lage von LM die Projection des Elements $ds.d\sigma$ auf den Querschnitt der Welle durch

$$ds.d\sigma.\sin\varphi$$

ausgedrückt. Indem man also den verticalen Druck, der auf diese Projection oder, was Dasselbe ist, auf das Flächen-Element $ds.d\sigma$ ausgeübt wird, durch dp bezeichnet, ist

$$(3.) \qquad dp = p\sin\varphi.ds.d\sigma\ .$$

Ziehet man ausserdem dasjenige Element in Betracht, welches in dem durch M gehenden Querschnitt des Zapfens mit M auf demselben Durchmesser liegt, so lassen sich die auf diese beiden Elemente wirkenden Kräfte zu einer, nach der Richtung der Axe wirkenden Mittelkraft $2dp$ zusammensetzen. Es sei M' der Endpunct des durch M gehenden Durchmessers: dann ist NM' normal zu dem Element in M', und $2dp$ lässt sich nach den Richtungen NM und NM' in zwei gleiche Seitenkräfte zerlegen. Bezeichnet man jede dieser Seitenkräfte durch dq, so ist

$$(4.) \qquad dq = \frac{dp}{\sin\varphi} = p\,ds.d\sigma.$$

Der Druck, welcher normal auf ein Flächen-Element ausgeübt wird, ist also gleich diesem Flächen-Element selbst, multiplicirt mit dem Druck auf die Flächen-Einheit des Querschnitts der Welle.

Setzt man aus (2) den Werth für p, so geht (5) über in:

$$(5.) \qquad dq = \frac{P}{\pi(r^2-\varrho^2)}.ds.d\sigma\ .$$

Dem Falle, dass die Berührung zwischen Pfanne und Zapfen sich vom Endpunct der Wellen-Axe bis zu dem Kreise mit dem Radius r ausdehnt, entspricht die Formel

$$(6.) \qquad dq = \frac{P}{\pi r^2}.ds.d\sigma\ .$$

§. 2.

Die durch die Reibung verloren gehende mechanische Leistung ist aber die Arbeit der Reibung. Ob dabei Abnutzung des Zapfens Statt finde, hangt davon ab, wie der Zapfen in der Schmiere gehalten wird. Für jede Art von Schmiere kann der Druck im Verhältniss zu der Berührungsfläche nur bis zu

einer gewissen Grenze gesteigert werden, wenn sich eine zusammenhangende Fettlage auf der Berührungsfläche erhalten soll. Ist diese vorhanden, so richtet sich der Reibungscoefficient, gemäss den Versuchen von *Morin*, nicht mehr nach der Beschaffenheit der Materien, zwischen welche die Schmiere gebracht ist, und behält nahezu einen constanten Werth. Unter diesen Umständen werden also Zapfen und Pfanne nicht mehr unmittelbar auf einander gerieben, und es findet nur eine unmerkliche Abnutzung Statt. Findet aber zwischen Zapfen und Pfanne eine unmittelbare Berührung, und bei der Umdrehung also auch Abnutzung Statt, so muss die Arbeit der in jedem Puncte Statt findenden Reibung auch als das Maass der eintretenden Abnutzung betrachtet werden; und die letztere ergiebt sich, wenn man die Arbeit der Reibung mit einem von der Natur des geriebenen Körpers abhängigen Coefficienten multiplicirt.

Ist nun μ der Reibungscoefficient, so wird das Reibungsmoment für das Element in M, welches von der Axe um x entfernt ist, nach (4) durch

$$\mu p x\, ds.d\sigma \tag{7.}$$

dargestellt. Da die durch die Reibung bei einer Umdrehung aufgezehrte Arbeit hieraus gefunden wird, wenn man mit 2π multiplicirt, so legen wir im Folgenden den Ausdruck (7) zu Grunde.

Bezeichnet man das Reibungsmoment für den ganzen Zapfen, soweit derselbe mit der Pfanne in Berührung ist, durch M, so ist

$$M=\int\int \mu p x\, ds.d\sigma\,; \tag{8.}$$

wo die Integration nach σ durch den ganzen Kreis mit dem Radius x zu nehmen ist, die nach s aber nach der frühern Bezeichnung von $x=\varrho$ bis $x=r$. Da x für den ganzen Bogen σ denselben Werth hat, so lässt sich die erste Integration vollziehen und man erhält

$$M=2\pi\mu\int_{x=\varrho}^{x=r} p x^2 ds\,. \tag{9.}$$

Wie die Formel (7) das Maass der durch die Reibung in einem Punct bei einer Umdrehung aufgezehrten Arbeit darstellt, so giebt die Formel (9) dieselbe Grösse in Bezug auf die *ganze* geriebene Fläche. Bei der letztern ist aber hinsichtlich der Grenzen ϱ und r zu bemerken, dass sie einer Aenderung unterworfen sind, wenn Abnutzung Statt findet. Mit ihnen ändert sich dann auch p, indem sich der Druck P auf eine grössere oder geringere Fläche vertheilt. Ausser-

dem wird unterstellt, dass die Berührung zwischen Zapfen und Pfanne innerhalb der eingenommenen Grenzen überall eine *gleich-innige* sei, während in der Wirklichkeit das Auslaufen des Zapfens damit beginnt, dass die Berührung in einzelnen Puncten, ohne ganz aufgehoben zu werden, weniger innig und dadurch die Reibung geringer wird. Allein auch der neue Zapfen wird sich an die Pfanne nicht in allen Puncten gleich dicht anschliessen, wie sorgfältig beide auch gemacht sein mögen; dennoch wird die Formel (9), verbunden mit (7), dazu dienen, die Vortheile und Nachtheile verschiedener Zapfenconstructionen zu vergleichen, indem die erwähnten Umstände bei *allen* ausser Rechnung bleiben.

§. 3.

Wir geben zunächst einige Beispiele von der Anwendung der Formel (9), um sodann zur nähern Untersuchung der nach der Antifrictionscurve gebildeten Zapfen überzugehen.

I. Ist der Zapfen *senkrecht auf die Axe abgeschnitten*, so wird $ds = dx$ und demnach

$$M = \tfrac{2}{3}\pi\mu p(r^3 - \varrho^3) = \tfrac{2}{3}\mu P.\frac{r^3-\varrho^3}{r^2-\varrho^2} = \tfrac{2}{3}\mu P.\frac{r^2+\varrho r+\varrho^2}{r+\varrho}.$$

Dieser Ausdruck wird ein Minimum für $\varrho = 0$, d. h. wenn in allen Puncten der Endfläche des Zapfens Reibung Statt findet und daher das Integral von Rand zu Rand zu nehmen ist. In diesem Falle wird

$$M = \tfrac{2}{3}\mu Pr.$$

II. Hat der Zapfen die *Kegelform*, und ruht vom Radius $\varrho = CD$ bis zu $r = AB$ (Fig. 2) in der Pfanne, so kann man die Abscissen-Axe in die Linie AB legen, so dass an die Stelle der Gleichung (1) die folgende tritt:

$$ry + hx = hr,$$

wenn $h = AE$ ist. Demnach wird

$$ds = \frac{\sqrt{(h^2+r^2)}}{r}dx$$

und daher

$$M = 2\pi\mu p.\frac{\sqrt{(h^2+r^2)}}{r}.(r^3-\varrho^3) = \tfrac{2}{3}\mu P.\frac{\sqrt{(h^2+r^2)}}{r}.\frac{r^3-\varrho^3}{r^2-\varrho^2}$$

$$= \tfrac{2}{3}\mu P.\frac{\sqrt{(h^2+r^2)}}{r}.\frac{r^2+\varrho r+\varrho^2}{r+\varrho}.$$

Dieser Werth wird wieder ein kleinster für $\varrho = 0$, d. h. wenn der Zapfen bis zur Spitze in der Pfanne ruht, und geht dann über in

$$M = \tfrac{2}{3}\mu P\sqrt{(h^2 + r^2)}\,.$$

Er ist immer grösser als der in (I) gefundene, und geht in diesen über, wenn h verschwindet, also der Zapfen eben wird. Die Anwendung *conischer* Zapfen empfiehlt sich also nicht.

Statt h kann man den Winkel $BEA = \alpha$ einführen, indem $\frac{\sqrt{(h^2+r^2)}}{r} = \frac{1}{\sin\alpha}$ ist.

III. Die geriebene Zapfenfläche sei die *Zone einer Kugelfläche* mit dem Radius R; dann kann man für die Gleichung der Erzeugenden

$$x^2 + y^2 = R^2$$

annehmen, wodurch

$$ds = \frac{R}{\sqrt{(R^2 - x^2)}}\,.\,dx \quad \text{und}$$

$$M = 2\pi\mu p R\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{(R^2-x^2)}} = \pi\mu p R\left\{-x\sqrt{(R^2-x^2)} + R^2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{(R^2-x^2)}}\right\}+\text{Const.}$$

sich ergiebt; welches Integral von $x = \varrho$ bis $x = r$ zu nehmen ist, wenn ϱ und r die Radien der die geriebene Zone begrenzenden Kreise sind. Führt man für p seinen Werth aus (2) ein und bestimmt auch hier denjenigen Werth von ϱ, für welchen M ein Minimum wird, so kommt man wieder zu $\varrho = 0$.

Die günstigste Anwendung dieser Zapfenform ist also diejenige, wenn die Zone ein *Kugelsegment* ist, in welchem kein Theil ausser Berührung mit der Pfanne bleibt. Diesem Fall entspricht

$$M = \frac{\mu P R}{r^2}\left\{-r\sqrt{(R^2-r^2)} + R^2\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{\sqrt{(R^2-r^2)}}\right\}.$$

Ist das Segment eine *Halbkugel*, also $R = r$, so wird

$$M = \tfrac{1}{2}\pi\mu P r\,.$$

In allen drei, hier untersuchten Fällen wächst das Reibungsmoment für ein einzelnes Element nach (7) mit x; die Abnutzung nimmt also von der Mitte nach dem Rande hin zu. Zieht man aber nur die Grösse der durch die Reibung auf den ganzen Zapfen erzeugten Arbeit in Betracht, so hat der ebene Zapfen vor den beiden andern den Vorzug.

§. 4.

Die Gleichung der in neuerer Zeit sogenannten *Antifrictionscurve* ist

$$y = \sqrt{(m^2 - x^2)} - \tfrac{1}{2} m \, ln \, \frac{(m - \sqrt{(m^2 - x^2)})^2}{x^2} .$$

Die Curve liegt symmetrisch auf beiden Seiten des positiven Armes der Axe der y, berührt dieselbe asymptotisch und wird von der Axe der x in zwei Puncten berührt, welche vom Anfangspunct der Coordinaten um m entfernt sind, so dass sie ungefähr die in (Fig. 3) angegebene Gestalt hat, wenn $AB = AC = m$ ist. Der im ersten Quadranten des Coordinatenraumes enthaltene Arm der Curve wird für sich durch

$$(10.) \qquad y = \sqrt{(m^2 - x^2)} - m \, ln \, \frac{m - \sqrt{(m^2 - x^2)}}{x}$$

dargestellt, und diese Gleichung tritt für einen Zapfen, der nach dieser Curve gebildet ist, an die Stelle von (1).

Ist ein solcher Zapfen von $x = \varrho$ bis $x = r$ gerieben, so wird das Moment der Gesammtreibung, da hier

$$ds = \frac{m dx}{x}$$

ist, nach (9), indem man für p sogleich seinen Werth setzt:

$$M = \frac{2 \mu P}{r^2 - \varrho^2} \int_{\varrho}^{r} m x \, dx = \mu P m .$$

Das Reibungsmoment ist also bei einem nach der Antifrictionscurve gebildeten Zapfen einer stehenden Welle von der Grösse der geriebenen Zone ganz unabhängig, und behält denselben Werth, wie gross auch der Theil des Zapfens sein mag, der wirklich auf der Pfanne ruht. Demnach wird es immer vorzuziehen sein, den Zapfen bis zu der Linie BC in die Pfanne zu versenken, so dass $m = r$ und $M = \mu P r$ wird.

Dagegen erweiset sich die Behauptung, dass bei einem solchen Zapfen wegen der Reibung ein geringerer Verlust an mechanischer Leistung Statt finde als bei andern, schon hier als unrichtig, indem nach (§. 3, I) der Werth von M bei einem *eben* abgeschnittenen Zapfen bei gleichem Enddurchmesser nur $\frac{2}{3}$ des hier gefundenen ist.

§. 5.

Um die Behauptung zu prüfen, dass ein nach der Antifrictionscurve gebildeter Zapfen in allen Puncten *gleiche* Reibung erleide, müssen wir auf die Formel (8) zurückgehen. Aus ihr folgt, dass überhaupt keine Zapfenform denkbar ist, für welche in allen Puncten *gleiche* Reibung Statt fände; denn diese Eigenschaft würde nur dann da sein, wenn das Reibungsmoment für gleiche Flächen-Elemente gleich wäre, während in (7) das Flächen-Element durch $ds.d\sigma$ ausgedrückt wird und das ihm entsprechende Reibungsmoment also mit x wächst. Wir kommen aber auch hier zu einer sehr bemerkenswerthen Eigenschaft des fraglichen Zapfens, indem wir für ds seinen Werth in (7) einführen. Da nämlich

$$ds = \frac{m dx}{x}$$

ist, so wird das Reibungsmoment für das Element $ds.d\sigma$ gleich

$$\mu p m.dx.d\sigma .$$

Nun ist $dx.d\sigma$ offenbar die Projection von $ds.d\sigma$, woraus folgt:

Bei einem nach der Antifrictionscurve gebildeten Zapfen einer stehenden Welle erleiden solche Flächentheile deren Horizontalprojectionen gleich sind, gleiche Reibung.

Hierbei ist nicht zu übersehen, dass das in der vorstehenden Formel enthaltene p, selbst von r und ϱ abhängig ist. Die Reibungen verschiedener Zapfen folgen, auch wenn die Erzeugende ihrer Oberfläche dieselbe ist, nur dann dem oben ausgesprochenen Gesetze, wenn auch die geriebenen Zonen an ihnen dieselben sind, und es folgt aus dem Gesagten, dass die Reibung in jedem einzelnen Puncte um so geringer wird, je grösser die geriebene Oberfläche ist, während die Gesammtreibung nach (§. 4) dieselbe bleibt.

§. 6.

In (§. 2) ist erörtert, dass die Abnutzung, wenn eine solche Statt findet, auf jedem Element der Zapfen-Oberfläche dem Reibungsmoment des Elements proportional gesetzt werden müsse. Giebt man diesen Grundsatz zu, so lässt sich aus (§. 5) ferner schliessen, dass *eine Antifrictionscurve durch die Abnutzung ihre Gestalt nicht ändert.*

Denn es sei (Fig. 4) AB ein Bogen-Element der Antifrictionscurve, also $AB = ds$, und dem entsprechend, $CB = dx$, $AC = dy$. Dann muss angenommen werden, dass die Abnutzung in einer hinlänglich kleinen Zeit auf dem ganzen Element AB *dieselbe* sei, so dass, wenn $AEFB$ den durch die Abnutzung weggenommenen Theil des entsprechenden Zapfenschnitts darstellt, EF mit AB parallel ist, während AE und BF die abgenutzten Theile der das Element AB begrenzenden Krümmungsradien sind. Bezeichnet man also den Krümmungshalbmesser durch λ und die Veränderung, welche derselbe in der angenommenen Zeit erleidet, durch $\Delta\lambda$, so ist

$$AEFB = ds.\Delta\lambda ;$$

und da diese Grösse dx proportional sein muss, weil die Abnutzung auf dem Flächen-Element $ds.d\sigma$ der Grösse $dx.d\sigma$ proportional und $d\sigma$ constant ist, so kann man

$$ds.\Delta\lambda = k.dx$$

setzen, wo k eine constante Grösse ist, in welche auch μ, p und m übergegangen sind. Man suche hieraus die Veränderung Δy zu bestimmen, welche y im Puncte B durch die Abnutzung erleidet. Ziehet man BH mit AC parallel, so ist $\Delta y = BH$. Nun ist aber, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und BHF:

$$BH : BF = AB : BC \quad \text{oder}$$

$$\Delta y : \Delta\lambda = ds : dx , \quad \text{also}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta\lambda.ds}{dx} = k ;$$

d. h. die Abnutzung, welche den Zapfen nach der Richtung der Axe der y in einer unmessbaren Zeit erleidet, ist für alle Puncte der Erzeugenden *dieselbe*. Die Erzeugende erleidet also durch die Abnutzung nur *eine Verschiebung*, aber *keine Veränderung ihrer Gestalt*.

Dasselbe gilt für die Pfanne, und eine Folge dieser merkwürdigen Eigenschaft wird sein, dass Zapfen und Pfanne, vorausgesetzt, dass beide genau nach derselben Antifrictionscurve geformt seien, auch nach erfolgter Abnutzung genau in einander passen und also *den Uebelständen nicht unterworfen sind, welchen andere Zapfen bei ihrer Abnutzung unterliegen*.

§. 7.

Die in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Eigenthümlichkeiten der nach der Antifrictionscurve gebildeten Zapfen sind nicht allein theoretisch interessant, sondern auch wichtig genug, um diese Zapfenform dem Praktiker zu empfehlen. Dagegen geht ihr, wie oben gezeigt ist, die andere wichtige Eigenschaft ab, dass das Reibungsmoment ein *Minimum* wird.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, diejenige Zapfenform zu ermitteln, welche den zuletzt erwähnten Vorzug hat.

Setzt man $p = \frac{dy}{dx}$, so ist das Reibungsmoment dem Integrale

$$\int x^2 \sqrt{(1+p^3)} . dx$$

proportional. Nach den Regeln der Variationsrechnung lässt sich aber die Form bestimmen, welche die Gleichung (1) annehmen muss, damit das vorstehende Integral, zwischen festen Grenzpuncten genommen, einen *kleinsten* Werth habe. Wenn man der Deutlichkeit wegen vorübergehend $x^2\sqrt{(1+p^2)} = V$ setzt, so ist

$$\delta \int V dx = \int V . \delta dx + \int dx . \delta V = V . \delta x + \int (dx . \delta V - \delta x . dV) .$$

Nun ist

$$dV = 2x\sqrt{(1+p^2)} . dx + \frac{x^2 p}{\sqrt{(1+p^2)}} dp ,$$

$$\delta V = 2x\sqrt{(1+p^2)} . \delta x + \frac{x^2 p}{\sqrt{(1+p^2)}} . \delta p ;$$

folglich

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int \frac{x^2 p}{\sqrt{(1+p^2)}} (dx \delta p - \delta x dp) .$$

Durch eine bekannte Umformung von δp geht aber der letzte Ausdruck in

$$V \delta x + \frac{x^2 p}{\sqrt{(1+p^2)}} (\delta y - p \delta x) - \int \frac{d \cdot \left(\frac{x^2 p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)}{dx} (\delta y - p \delta x)$$

über, und erfordert, damit das zu bestimmende Integral ein Minimum oder ein Maximum sei, die Erfüllung der Bedingung

$$\frac{d \cdot \left(\frac{x^2 p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)}{dx} = 0 ,$$

woraus durch Integration, wenn die hinzutretende willkürliche Constante durch k bezeichnet wird,

$$\frac{x^2 p}{\sqrt{(1+p^2)}} = k$$

folgt. Löset man diese Gleichung nach p auf und setzt für p seinen Werth, so ergiebt sich als Differentialgleichung der gesuchten Curve:

$$dy = \frac{k\,dx}{\sqrt{(x^4 - k^2)}}.$$

Um den Nenner homogen zu machen, schreibe man k^2 statt k. Man muss aber dann zur Erhaltung der Unbestimmtheit des Zeichens, welche der Factor k im Zähler hat, dem Werthe von dy das Doppelzeichen geben. Dadurch wird

$$(11.) \qquad dy = \pm \frac{k^2\,dx}{\sqrt{(x^4 - k^4)}}$$

und daher die Gleichung der gesuchten Curve:

$$(12.) \qquad y = \pm k^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x^4 - k^4)}}.$$

Das vorstehende Integral lässt sich bekanntlich leicht auf eine *elliptische Function von der ersten Art* zurückführen. Indem man

$$(13.) \qquad x = \frac{k}{\cos\varphi} \qquad \text{setzt, wird}$$

$$dx = \frac{-k.\sin\varphi.d\varphi}{\cos^2\varphi} \quad \text{und}$$

$$y = \pm \int \frac{\sin\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-\cos^4\varphi)}} = \pm \frac{k}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}.$$

Nach der bekannten Bezeichnung des elliptischen Integrals erster Art ist also

$$(14.) \qquad y = \pm \frac{k}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) + k';$$

wo k' eine zweite willkürliche Constante bezeichnet und die obern Zeichen in den Formeln (13 und 14) miteinander gehen; wie auch die untern.

Giebt man der eingeführten Hülfsveränderlichen nach und nach beliebige Werthe, so lassen sich mit Hülfe der Gleichungen (13 und 14) beliebig viele Puncte der gesuchten Curve bestimmen.

Für einen Zapfen, dessen Begrenzungsfläche durch Umdrehung dieser Curve erzeugt wird, ist aber das Reibungsmoment *ein Minimum, oder ein Maximum.* Wir werden weiter unten das Reibungsmoment selbst angeben, und nachweisen, dass dasselbe ein *Minimum* ist.

Die Constante k' lässt sich durch Verlegung der Abscissen-Axe beseitigen. Dasselbe gilt aber nicht von k; welches vielmehr, je nach seiner Wahl, die Natur der Curve, von welcher die Zapfenform abhangt, bestimmt. Man erwäge, dass k der *kleinste* Werth ist, den x annehmen kann, indem für ein kleineres x der Werth von dy in (11) *imaginär* wird. Hieraus folgt, dass der Zapfen von $x = 0$ bis $x = k$ keine Reibung erleiden darf, dass also k der Radius des kleinern Kreises ist, welcher die geriebene Zone des Zapfens begrenzt; wesshalb k dem frühern ϱ gleich ist. Geometrisch betrachtet, ist k der Abstand vom Anfangspunct der Coordinaten, in welchem die Curve (14) die Axe der x schneidet.

Ist $k = \varrho = 0$, so läuft der Zapfen in eine *Spitze* aus. Nach der Gleichung (13) muss aber in diesem Falle φ nothwendig constant und gleich $\frac{1}{2}\pi$ sein, weil nur unter dieser Bedingung x selbst andere Werthe als 0 bekommen und beliebig angenommen werden kann. Zugleich geht aber die Gleichung (14) in

$$y = 0$$

über: die gesuchte Curve wird also zu einer *geraden Linie*, welche auf der Axe der y senkrecht steht, und der Zapfen ist demnach *eben abgeschnitten.* Da schon in (§. 3) nachgewiesen ist, dass ein solcher Zapfen ein geringeres Reibungsmoment hat, als ein conischer oder kugelförmiger Zapfen, und demgemäss ein Maximum nicht vorhanden sein kann, so liegt hierin folgender Satz:

Unter allen Zapfen stehender Wellen, deren Reibungsfläche um die Wellen-Axe nicht unterbrochen ist, erleiden, unter übrigens gleichen Umständen, (Dicke, Druck und Material) *die* ***eben abgeschnittenen*** *die geringste Reibung.*

In jedem andern Falle kann man k als Einheit annehmen und darnach x und y bestimmen; dann wird

$$x = \frac{1}{\cos\varphi}\ ,\quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \varphi\right)\ .$$

Aus dem Werthe von y folgt, dass die Curve aus zwei, gegen die Axe der x symmetrischen Armen besteht. Sie beziehen sich auf die beiden zu unterscheidenden Fälle, dass der Zapfen *nach oben*, oder *nach unten* gerichtet sein soll.

Lässt man das obere Zeichen gelten, so liegt die Curve ganz auf der Seite der negativen y und ist nach (11) gegen die Axe der x *concav*.

x lässt sich leicht durch Construction aus φ finden. Da aber eine geometrische Construction der Curve nicht zu erreichen ist, so entnehmen wir für verschiedene Werthe von φ die entsprechenden Werthe von F aus den Tafeln für die elliptischen Functionen, und stellen sie in folgender Tabelle mit den entsprechenden Werthen von x und y zusammen, um eine Vorstellung von dem Verlauf der Curve zu geben. Dabei ist zu bemerken, dass der in Tafel IX der „Exercices de calcul intégral" von *Legendre* vorkommende Winkel $\vartheta = \arcsin c$ ist, und dass, da der Modulus c im gegenwärtigen Falle den Werth $\frac{1}{\sqrt{2}}$ hat, hier $\vartheta = 45^0$ zu setzen ist. Hiernach gehören folgende Werthe zusammen:

φ	F	x	y
0	0	1	0
6	0,104815	1,0054	0,0741
15	0,263297	1,0352	0,1861
30	0,535623	1,1547	0,3787
45	0,826018	1,4142 (= $\sqrt{2}$)	0,5840
54	1,101237	1,7013	0,7158
60	1,142429	2	0,8078
66	1,277270	2,4586	0,9242
75	1,487884	3,8637	1,0521
84	1,706250	9,5668	1,2064
90	1,854075	∞	1,3109

Da y Anfangs im Verhältniss zu x ziemlich rasch wächst, so erhebt sich die Curve hier steil, entfernt sich aber im Ganzen nur um die Grösse **1,3109** von der Axe der x. Aus (11) ergiebt sich, dass sie auf der Axe der x in dem Puncte $x = k = 1$ von einer mit der Axe der y parallelen geraden Linie berührt wird. (Fig. 5) giebt ihre Gestalt ungefähr an.

Es sei noch bemerkt, dass sich der Modulus $\frac{1}{\sqrt{2}}$ rasch so umformen lässt, dass er von der Einheit nur um eine verschwindend-kleine Grösse verschieden ist. Setzt man nämlich

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}\ , \quad c_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}\ , \quad c_2 = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1} \cdots\cdots$$

und daneben

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = c\sin\varphi\ ,$$

$$\sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = c_1\sin\varphi_1\ ,$$

so wird

$$c = 0{,}70711\quad ,\quad c_1 = c{,}98517\quad ,\quad c_2 = 0{,}99998\ ,$$

so dass schon c_2 ohne merklichen Fehler gleich 1 angenommen werden kann. Dann ist

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}} = \frac{2}{1+c}\cdot\frac{2}{1+c_1}\int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{(1-c_2^2\sin^2\varphi_2)}} = \frac{2}{1+c}\cdot\frac{2}{1+c_1}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\varphi_2)}}$$

$$= \frac{2}{1+c}\cdot\frac{2}{1+c_1}\int\frac{d\varphi_2}{\cos\varphi_2}\ .$$

Hieraus ergiebt sich:

$$y = \mp\frac{2\sqrt{2}.k}{1{,}70711.1{,}98517}\,ln\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\pi+\varphi_2)\ ;$$

welche Formel, mit den obigen Hülfsgleichungen, zur unmittelbaren Berechnung der Werthe von y benutzt werden kann.

§. 8.

Wir suchen jetzt das *Reibungsmoment* für einen Zapfen, dessen Oberfläche durch Umdrehung der Linie (14) entstanden ist. Damit die Darstellung in Uebereinstimmung mit den frühern Entwickelungen bleibe, schreibe man ϱ statt k. Wenn man dann berücksichtigt, dass

$$ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^4-\varrho^4)}}$$

ist, und für p seinen Werth in (9) setzt, so ergiebt sich für das Reibungsmoment:

$$M = \frac{2\mu P}{r^2-\varrho^2}\int_\varrho^r\frac{x^4dx}{\sqrt{(x^4-\varrho^4)}}\ .$$

Nun ist

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(x^4-\varrho^4)}} = \tfrac{1}{3}x\sqrt{(x^4-\varrho^4)} + \tfrac{1}{3}\varrho^4\int\frac{dx}{\sqrt{(x^4-\varrho^4)}}\ ;$$

wodurch jenes Integral auf das frühere elliptische Integral zurückgeführt ist.

Bemerkt man nun, dass $\varphi = 0$ sein muss, wenn $x = \varrho$ werden soll, und dass mit φ auch das elliptische Integral der ersten Art verschwindet, so ergiebt sich, dass in dem Werthe von M der von der Grenze $x = \varrho$ herrührende Theil wegfällt. Damit aber x in die andere Grenze r übergehe, muss

$$\cos\varphi = \frac{\varrho}{r}$$

sein. Wenn man also denjenigen Werth von φ, welcher dieser Gleichung genügt, durch φ' bezeichnet, so wird

$$(15.) \qquad M = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu P}{r^2 - \varrho^2} \left\{ r\sqrt{(r^4 - \varrho^4)} + \frac{\varrho^3}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \varphi'\right) \right\} .$$

Setzt man beispielsweise $\varrho = 1$, $r = 2$, so ist $F = 1{,}142429$, und demgemäss

$$M = \tfrac{2}{3}\mu P . 2{,}85064.$$

Den angenommenen Werthen von ϱ und r entsprechen aber auf der erzeugenden Curve die Puncte

$$x = 1 \quad , \quad y = 0 ,$$
$$x = 2 \quad , \quad y = 0{,}8078,$$

und die im vorhergehenden Paragraph enthaltene Entwickelung besagt, dass sich zwischen diesen beiden Puncten keine andere Linie construiren lasse, welche als Erzeugende eines Zapfenstücks, ein geringeres (oder grösseres) Reibungsmoment liefert, als das eben gefundene. Legt man z. B. eine gerade Linie durch jene beiden Puncte, so wird der entsprechende Zapfen *conisch*, und die Höhe des in Betracht kommenden Kegels ist $h = 2.0{,}8078$. Das entsprechende Reibungsmoment ist aber nach (§. 3, II):

$$\tfrac{2}{3}\mu P . \frac{\sqrt{(h^2 + r^2)}}{r} \cdot \frac{r^3 - \varrho^3}{r^2 - \varrho^3} = \tfrac{2}{3}\mu P . 3{,}0503,$$

und daher in der That grösser als das oben gefundene; wodurch zugleich der Nachweis geliefert ist, dass der Ausdruck (15) nicht ein Maximum, sondern ein *Minimum* giebt.

Setzt man in (15) den kleinern Radius $\varrho = 0$, so geht jener Ausdruck in

$$M = \tfrac{2}{3}\mu P r$$

über; was mit (§. 3, I) übereinstimmt, da $\varrho = 0$ dem *eben* abgeschnittenen Zapfen angehört.

Man kann aber auch die Aufgabe stellen: ϱ in **(15)** so zu bestimmen, dass M ein *Minimum minimorum* wird. Um hier die Ableitung von M über ϱ zu bilden, ist zu bemerken, dass

$$\frac{dF}{d\varrho} = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi')}} \cdot \frac{d\varphi'}{d\varrho}$$

ist; und da

$$\cos\varphi' = \frac{\varrho}{r}$$

ist, so geht der vorstehende Ausdruck in

$$\frac{dF}{d\varrho} = \frac{\sqrt{2}}{r} \cdot \sqrt{\left(\frac{r^2-\varrho^2}{r^2+\varrho^2}\right)}$$

über. Demgemäss wird

$$\frac{dM}{d\varrho} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu P}{r^2-\varrho^2} \left\{ -\frac{2\varrho}{r^2-\varrho^2} \left[r\sqrt{(r^4-\varrho^4)} + \frac{\varrho^3}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi'\right) \right] \right.$$

$$\left. -\frac{2r\varrho^3}{\sqrt{(r^4-\varrho^4)}} + \frac{3\varrho^2}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi'\right) + \frac{\varrho^3}{r} \cdot \sqrt{\left(\frac{r^2-\varrho^2}{r^2+\varrho^2}\right)} \right\}$$

$$= \tfrac{2}{3}\mu P \cdot \frac{\varrho}{(r^2-\varrho^2)^2} \left\{ -\frac{2r^2+\varrho^2}{r} \cdot \sqrt{(r^4-\varrho^4} + \frac{\varrho}{\sqrt{2}}(3r^2-5\varrho^2) F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi'\right) \right\}$$

Diese Ableitung wird gleich 0, wenn ϱ verschwindet. Ob es reelle Werthe von ϱ gebe, welche den letzten Factor des vorstehenden Ausdrucks verschwinden machen, lässt sich nicht ermitteln.

Da $\varrho = 0$ dem *eben* abgeschnittenen Zapfen entspricht, so muss diese Zapfenform für stehende Wellen als diejenige angesehen werden, welche der Bewegung das *geringste Hinderniss* entgegensetzt.

Berlin, im Februar 1854.

17.

Ueber eine Function von drei Winkeln,

deren erste Abgeleiteten ebenfalls als Winkel anzusehen und durch algebraische Relationen ihrer Cosinus zu denen der Unabhängigen bestimmt sind.

(Von Herrn Dr. *Schläffli*, Docenten an der Universität zu Bern.)

1.

Definition. Wenn im Folgenden alle Winkel zwischen 0 und π, und alle Quadratwurzeln positiv angenommen werden, und man setzt

$$\cos a = \sin\alpha\cos\gamma : \sqrt{(\sin^2\alpha - \cos^2\beta)},$$

$$\cos b = \cos\alpha\cos\beta\sos\gamma : \sqrt{(\sin^2\alpha - \cos^2\beta)}\sqrt{(\sin^2\gamma - \cos^2\beta)},$$

$$\cos c = \sin\gamma\cos\alpha : \sqrt{(\sin^2\gamma - \cos^2\beta)},$$

so wird man die drei Bedingungen dafür, dass die Formel

$$a\,d\alpha + b\,d\beta + c\,d\gamma$$

ein *vollständiges* Differential sei, erfüllt finden. Wir bezeichnen das Integral mit $f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)$ und bestimmen seine Constante dadurch, dass wir es für

$$\sin\alpha\sin\gamma = \cos\beta$$

verschwinden lassen, weil es dann zugleich mit seinen Abgeleiteten a, b, c verschwindet. Aus dieser Definition erhellet, dass die Function f ihren Werth nicht ändert, wenn man die äussern Argumente α und γ vertauscht; d. h. es ist

$$f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma) = f(\gamma\,,\,\beta\,,\,\alpha)\,.$$

2.

Ein Argument $\frac{1}{2}\pi$. Setzt man $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ und stellt sich β als gegeben und nur α als variabel vor, so ist $a = \frac{1}{2}\varphi$, also:

$$df(\alpha\,,\,\beta\,,\,\tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi\, d\alpha\,.$$

Die Function f verschwindet für $\sin\alpha = \cos\beta$, d. h. für $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \beta$; die Integralgleichung ist also:

$$(1.) \qquad f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi(\alpha + \beta - \tfrac{1}{2}\pi)\,.$$

Setzt man das mittlere Argument $\beta = \frac{1}{2}\pi$, so wird $a = \gamma$, $b = \frac{1}{2}\pi$, $c = \alpha$; folglich ist

$$f(\alpha\,,\,\tfrac{1}{2}\pi\,,\,\gamma) = \alpha\gamma\,.$$

3.

Supplementare Argumente. Wenn γ in $\pi - \gamma$ übergeht, so ändert sich c nicht. Man hat also, wenn α und β als constant gelten, zugleich:

$$df(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma) = +c\,d\gamma \quad,\quad df(\alpha\,,\,\beta\,,\,\pi-\gamma) = -c\,d\gamma\,.$$

Addirt man die beiden Gleichungen, so zeigt sich die Summe der zwei Functionswerthe von γ unabhängig; sie ist daher, unter Anderm, dieselbe, wie wenn $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ ist; also ist auch, nach (1):

$$(2.)\; f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma) + f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\pi-\gamma) = \pi(\alpha + \beta - \tfrac{1}{2}\pi)\,.$$

Wenn, zweitens, das mittlere Argument β in $\pi - \beta$ übergeht, so ändern sich a und c nicht; der Unterschied beider Functionswerthe ist also von α und γ unabhängig und wird daher durch (1) gefunden, indem man z. B. $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ setzt. Es findet sich:

$$(3.) \quad f(\alpha\,,\,\pi-\beta\,,\,\gamma) - f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma) = \pi(\tfrac{1}{2}\pi - \beta)\,.$$

Mittels der Gleichungen (2 und 3) lassen sich die Fälle, wo eins oder mehrere Argumente der Function f im zweiten Quadranten liegen, immer auf den Fall zurückführen, wo alle drei Argumente in den ersten Quadranten fallen.

4.

Geschlossene Kette von sechs Functionswerthen. Die Formel für $\cos a$, nach $\sin\alpha$ aufgelöset, giebt

$$\sin\alpha = \cos a \cos\beta : \sqrt{(\cos^2 a - \cos^2\gamma)} .$$

Diese Gleichung fällt mit der dritten Definitionsformel zusammen, wenn dort

$$\begin{array}{lccccccc} \text{statt} & \alpha & , & \beta & , & \gamma & , & c \\ & \beta & , & \gamma & , & \frac{1}{2}\pi - a & , & \frac{1}{2}\pi - \alpha \end{array}$$

gesetzt werden. Stellt man sich nun β , γ als constant und nur α als variabel vor, so ist

$$df(\alpha , \beta , \gamma) = a\, d\alpha ,$$

$$df(\beta , \gamma , \tfrac{1}{2}\pi - a) = (\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\, d(\tfrac{1}{2}\pi - a) ,$$

und, wenn man addirt, integrirt und die Constante dadurch bestimmt, dass man $a = 0$ setzt, und die Formel **(1)** anwendet:

$$(4.)\quad f(\alpha , \beta , \gamma) + f(\beta , \gamma , \tfrac{1}{2}\pi - a) = \tfrac{1}{2}\pi(\beta + \gamma - \tfrac{1}{2}\pi) - (\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)a .$$

Ist der Werth von $f(\alpha , \beta , \gamma)$ bekannt, so lehrt diese Formel auch den Werth von $f(\beta , \gamma , \frac{1}{2}\pi - a)$ kennen. Man behandle dann diese Function eben so wie die erste, und setze das Verfahren fort, so lange es die Functionswerthe für *neue* Gruppen von Argumenten giebt. Es wird sich zeigen, dass auf diese Art eine geschlossene sechsgliedrige Kette von Werthen entsteht. Wenn man nämlich α , β , γ in den Definitionsformeln durch β , γ , $\frac{1}{2}\pi - a$ ersetzt, so gehen die dortigen a , b , c resp. in $\frac{1}{2}\pi - b$, $\frac{1}{2}\pi - c$, $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ über. Wendet man nun den hierdurch ausgesprochenen allgemeinen Satz immer wieder auf die letzte Reihe von Argumenten und zugehörigen Abgeleiteten an, so erhält man ohne alle Rechnung folgende Tafel:

α , β , γ	$a , b , c ;$
$\beta , \gamma , \frac{1}{2}\pi - a$	$\frac{1}{2}\pi - b , \frac{1}{2}\pi - c , \frac{1}{2}\pi - \alpha ;$
$\gamma , \frac{1}{2}\pi - a , b$	$c , \alpha , \frac{1}{2}\pi - \beta ;$
$\frac{1}{2}\pi - a , b , \frac{1}{2}\pi - c$	$\frac{1}{2}\pi - \alpha , \beta , \frac{1}{2}\pi - \gamma ;$
$b , \frac{1}{2}\pi - c , \alpha$	$\frac{1}{2}\pi - \beta , \gamma , a ;$
$\frac{1}{2}\pi - c , \alpha , \beta$	$\frac{1}{2}\pi - \gamma , \frac{1}{2}\pi - a , \frac{1}{2}\pi - b ;$
α , β , γ	$a , b , c ;$

etc.

Man sieht hieraus, dass der siebente Functionswerth wieder mit dem ersten zusammenfällt. Wenn man nun auf je zwei successive horizontale Zeilen dieser Tafel die Gleichung (4) anwendet und die so entstehende Kette von Relationen benutzt, um jeden neuen Functionswerth durch den ursprünglichen $f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)$ auszudrücken, so finden sich, ausser (4), noch folgende Formeln:

$$\text{(5.)}\quad f(\gamma\,,\,\tfrac{1}{2}\pi-a\,,\,b)-f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)=(\tfrac{1}{2}\pi-\beta)\,b-\alpha\,a\,,$$

$$\text{(6.)}\quad f(\tfrac{1}{2}\pi-a\,,\,b\,,\,\tfrac{1}{2}\pi-c)+f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)=\beta\,b-(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)\,a-(\tfrac{1}{2}\pi-\gamma)c,$$

$$\text{(7.)}\quad f(b\,,\,\tfrac{1}{2}\pi-c\,,\,\alpha)-f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)=(\tfrac{1}{2}\pi-\beta)\,b-\gamma\,c\,,$$

$$\text{(8.)}\quad f(\tfrac{1}{2}\pi-c\,,\,\alpha\,,\,\beta)+f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)=\tfrac{1}{2}\,\pi\,(\alpha+\beta-\tfrac{1}{2}\pi)-(\tfrac{1}{2}\pi-\gamma)c$$

5.

Dreigliedrige Kette. Man versuche nun, zwei entgegengesetzte Glieder dieser geschlossenen Kette zur Coïncidenz zu bringen, so dass sie dann nur noch drei verschiedene Functionswerthe zählt. Ist Dies möglich, so wird die Gleichung (6) den wirklichen Werth von $f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)$ in endlicher Form geben. Soll demnach $f(\frac{1}{2}\pi-\alpha\,,\,b\,,\,\frac{1}{2}\pi-c)$ mit $f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)$ zusammenfallen, so müssen die mittlern Argumente b und β gleich sein.

Aus $b=\beta$ folgt aber vermöge der zweiten Definitionsformel:

$$\sin^2\beta\cos^2\beta\,(\sin^2\beta-\cos^2\alpha-\cos^2\gamma)=0\,,$$

und wenn man die speciellen Fälle $\beta=0$ und $\beta=\frac{1}{2}\pi$ von der Betrachtung ausschliesst:

$$\text{(9.)}\qquad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\,.$$

Ist diese Gleichung erfüllt, so geben die erste und dritte der Definitionsformeln:

$$a=\tfrac{1}{2}\pi-\alpha\quad,\quad c=\tfrac{1}{2}\pi-\gamma\,,$$

und die Werthe $f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)$ und $f(\frac{1}{2}\pi-a\,,\,b\,,\,\frac{1}{2}\pi-c)$ fallen mithin wirklich zusammen. Aus (6) folgt nun, dass, wenn (9) besteht,

$$\text{(10.)}\quad f(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)=\tfrac{1}{2}\,(\beta^2-(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)^2-(\tfrac{1}{2}\pi-\gamma)^2))$$

ist.

6.

Anwendung auf rationale Argumente. Soll die Gleichung (9) durch rationale Bruchtheile des Kreis-Umfanges, mit Ausschluss des Quadranten, befriedigt werden, so sind, abgesehen von Permutationen, nur folgende zwei Lösungen möglich:

$$\alpha = \tfrac{1}{3}\pi \quad , \quad \beta = \tfrac{1}{3}\pi \quad , \quad \gamma = \tfrac{1}{4}\pi \, ,$$

$$\text{und } \alpha = \tfrac{1}{5}2\pi \, , \quad \beta = \tfrac{1}{5}\pi \quad , \quad \gamma = \tfrac{1}{3}\pi \, .$$

Die Anwendung von (10) auf die erste Lösung giebt:

$$(11.) \qquad f(\tfrac{1}{3}\pi \, , \, \tfrac{1}{3}\pi \, , \, \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\pi^2}{96} \, ,$$

$$(12.) \qquad f(\tfrac{1}{3}\pi \, , \, \tfrac{1}{4}\pi \, , \, \tfrac{1}{3}\pi) = \frac{\pi^2}{288} \, ;$$

diejenige auf die zweite Lösung giebt:

$$(13.) \qquad f(\tfrac{2}{5}\pi \, , \, \tfrac{1}{5}\pi \, , \, \tfrac{1}{3}\pi) = \frac{\pi^2}{900} \, ,$$

$$(14.) \qquad f(\tfrac{1}{5}\pi \, , \, \tfrac{1}{3}\pi \, , \, \tfrac{2}{5}\pi) = \frac{\pi^2}{180} \, ,$$

$$(15.) \qquad f(\tfrac{1}{3}\pi \, , \, \tfrac{2}{5}\pi \, , \, \tfrac{1}{5}\pi) = \frac{19\pi^2}{900} \, .$$

Bedient man sich der Gleichung (2), um in der Form (15) das letzte Argument $\frac{1}{5}\pi$ in sein Supplement $\frac{4}{5}\pi$ zu verwandeln, so ergiebt sich

$$(16.) \qquad f(\tfrac{1}{3}\pi \, , \, \tfrac{2}{5}\pi \, , \, \tfrac{4}{5}\pi) = \frac{191\pi^2}{900} \, ;$$

was sogleich wird benutzt werden können.

7.

Die Formeln (13 und 16) geben den Fall, *wo das eine äussere Argument* $\frac{1}{3}\pi$ *ist, das andere aber doppelt so gross, als das mittlere.* Um diesen Fall näher zu betrachten, setze man in den Definitionsformeln $\alpha = \frac{1}{3}\pi$, $\gamma = 2\beta$. Dies giebt, nach gehöriger Reduction:

$$\cos c = \frac{\frac{1}{2}\sin\beta}{\sqrt{(\sin^2\beta - \frac{1}{4})}} = \frac{\sin\beta\cos\frac{1}{3}\pi}{\sqrt{(\sin^2\beta - \cos^2\frac{1}{3}\pi)}},$$

$$\cos b = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin^2\beta}{\sin^2\beta - \frac{1}{4}} = \cos 2c\,.$$

Der Ausdruck für c fällt, wie man sieht, mit dem für die dritte Abgeleitete der Function $f(\frac{1}{3}\pi\,,\,\frac{1}{3}\pi\,,\,\beta)$ zusammen. Wenn man also β als Variable ansieht, so hat man gleichzeitig:

$$df(\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\beta\,,\,2\beta) = 2c\,d\beta + c\,d.2\beta = 4c\,d\beta\,,$$

$$df(\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\beta) = c\,d\beta.$$

Integrirt man Dies und erwägt, dass beide Functionswerthe zugleich mit c verschwinden, so erhält man:

$$(17.) \qquad f(\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\beta\,,\,2\beta) = 4f(\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\beta)\,.$$

8.

Rationale Argumente. Man wende die letzte Formel zuerst auf die Auswerthung von $f(\frac{1}{3}\pi\,,\,\frac{1}{3}\pi\,,\,\frac{1}{3}\pi)$ an. Die Gleichung (2) giebt

$$f = (\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{1}{3}\pi) + f(\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{2}{3}\pi) = \tfrac{1}{6}\pi^2\,;$$

die Gleichung (17) giebt, indem man $\beta = \frac{1}{3}\pi$ setzt,

$$f(\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{2}{3}\pi) = 4f(\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{1}{3}\pi)\,.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$(18.) \qquad f(\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{1}{3}\pi) = \frac{\pi^2}{30}\,.$$

Wenn man, zweitens, die Gleichung (17) mit (13 und 16) zusammenhält, so ergeben sich die Werthe

$$(19.) \qquad f(\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{1}{5}\pi) = \frac{\pi^2}{3600}\,,$$

$$(20.) \qquad f(\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{1}{3}\pi\,,\,\tfrac{2}{5}\pi) = \frac{191\pi^2}{3600}\,.$$

9.

Ketten mit incommensurabeln Argumenten. Man wende endlich alle Gleichungen (4 bis 8) auf die Functionswerthe (18 und 19) an, und setze der Kürze wegen

$$\cos 2\lambda = \tfrac{1}{4},$$

so dass die Function $f(\frac{1}{3}\pi\ ,\ \frac{1}{3}\pi\ ,\ \frac{1}{3}\pi)$ die Abgeleiteten

$$\tfrac{1}{2}\pi - \lambda\ \ ,\ \ 2\lambda\ \ ,\ \ \tfrac{1}{2}\pi - \lambda\ ,$$

und die Form $f(\frac{1}{3}\pi\ ,\ \frac{1}{3}\pi\ ,\ \frac{1}{5}\pi)$ die Abgeleiteten

$$\lambda - \tfrac{1}{6}\pi\ ,\ \tfrac{1}{3}\pi - \lambda\ ,\ \tfrac{1}{10}\pi$$

erhält. Dies giebt folgende zwei Ketten ausgewertheter Functionen:

$$f(\tfrac{1}{3}\pi\ ,\ \tfrac{1}{3}\pi\ ,\ \tfrac{1}{3}\pi) = \tfrac{1}{30}\pi^2\ ,$$
$$f(\tfrac{1}{3}\pi\ ,\ \tfrac{1}{3}\pi\ ,\ \lambda) = -\tfrac{1}{30}\pi^2 + \tfrac{1}{6}\pi\lambda\ ,$$
$$f(\tfrac{1}{3}\pi\ ,\ \lambda\ ,\ 2\lambda) = -\tfrac{2}{15}\pi + \tfrac{2}{3}\pi\lambda,$$
$$f(\lambda\ ,\ 2\lambda\ ,\ \lambda) = -\tfrac{1}{5}\pi^2 + \pi\lambda\ ;$$

der fünfte Functionswerth fällt mit dem dritten, der sechste mit dem zweiten zusammen.

$$f(\tfrac{1}{3}\pi\ ,\ \tfrac{1}{3}\pi\ ,\ \tfrac{1}{5}\pi) = \frac{\pi^2}{3600}\ ,$$

$$f(\tfrac{1}{3}\pi\ ,\ \tfrac{1}{5}\pi\ ,\ \tfrac{2}{3}\pi - \lambda) = \frac{53\pi^2}{1200} - \tfrac{1}{6}\pi\lambda\ ,$$

$$f(\tfrac{1}{5}\pi\ ,\ \tfrac{2}{3}\pi - \lambda\ ,\ \tfrac{1}{3}\pi - \lambda) = \frac{401\pi^2}{3600} - \tfrac{1}{2}\pi\lambda\ ,$$

$$f(\tfrac{2}{3}\pi - \lambda\ ,\ \tfrac{1}{3}\pi - \lambda\ ,\ \tfrac{2}{5}\pi) = \frac{391\pi^2}{3600} - \tfrac{1}{2}\pi\lambda\ ,$$

$$f(\tfrac{1}{3}\pi - \lambda\ ,\ \tfrac{2}{5}\pi\ ,\ \tfrac{1}{3}\pi) = \frac{43\pi^2}{1200} - \tfrac{1}{6}\pi\lambda\ ,$$

$$f(\tfrac{2}{5}\pi\ ,\ \tfrac{1}{3}\pi\ ,\ \tfrac{1}{3}\pi) = \frac{191\pi^2}{3600}\ .$$

10.

Verwandt mit (§. 7) ist der Fall, wo *die äussern Argumente einander gleich sind und das mittlere doppelt so gross ist.* Als Abgeleitete von $f(\alpha, 2\alpha, \alpha)$ findet man $a, 2a, a$, wenn $\cos a = \frac{1}{2}\sin\alpha : \sqrt{(\sin^2\alpha - \frac{1}{4})}$ gesetzt wird. Dasselbe a ist aber auch die erste Abgeleitete von $f(\alpha, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$. Daher ist

$$(21.) \qquad f(\alpha, 2\alpha, \alpha) = 6f(\alpha, \tfrac{1}{3}\pi, \tfrac{1}{3}\pi) .$$

Setzt man $\alpha = \frac{1}{5}\pi, \frac{2}{5}\pi$, so erhält man aus (19 und 20):

$$(22.) \qquad f(\tfrac{1}{5}\pi, \tfrac{2}{5}\pi, \tfrac{1}{5}\pi) = \frac{\pi^2}{600},$$

$$f(\tfrac{2}{5}\pi, \tfrac{4}{5}\pi, \tfrac{2}{5}\pi) = \frac{191\pi^2}{600},$$

und indem man in der letzten Formel das mittlere Argument nach (3) durch sein Supplement ersetzt:

$$(23.) \qquad f(\tfrac{2}{5}\pi, \tfrac{1}{5}\pi, \tfrac{2}{5}\pi) = \frac{11\pi^2}{600}.$$

Die Functionswerthe (22 und 23) bilden eine *zweigliedrige Kette;* nach der Erklärung in (§. 3).

11.

Imaginäre Abgeleiteten. Wenn die Bedingung $\sin\alpha\sin\gamma > \cos\beta$ nicht erfüllt wird, so hören die Abgeleiteten a, b, c der Function $f(\alpha, \beta, \gamma)$ auf, reelle Kreisbogen zu sein. Und wenn nur $\sqrt{(\sin^2\alpha\sin^2\gamma - \cos^2\beta)}$ imaginär wird, die zwei andern Quadratwurzeln, welche in den Ausdrücken für $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ vorkommen, dagegen reell bleiben, so sind die Abgeleiteten reelle Logarithmen, multiplicirt mit dem Factor $\sqrt{-1}$. Indem wir nun diesen Fall betrachten und überdiess noch $\beta + \gamma = \frac{1}{2}\pi$ annehmen, lassen wir im Werthe der Function den Factor $\frac{1}{2}\sqrt{-1}$ weg. Dies giebt

$$f(\ ,\ \tfrac{1}{2}\pi - \gamma\ ,\ \gamma) = \int_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{1}{2}\pi} \log\frac{\sin(\varphi+\gamma)}{\sin(\varphi+\gamma)} . d\varphi\ ;$$

wo $\alpha \gtrless \gamma$ sein soll.

Theilt man, um ein Beispiel von solchen Functionen zu geben, den Quadranten in $\frac{1}{6}\pi$ und $\frac{1}{3}\pi$ ab, so gehören hieher folgende aus (17 und 21) sich ergebende Formeln:

$$f(\tfrac{1}{3}\pi\ ,\ \tfrac{1}{3}\pi\ ,\ \tfrac{1}{6}\pi) = \tfrac{1}{4}f(\tfrac{1}{3}\pi\ ,\ \tfrac{1}{6}\pi\ ,\ \tfrac{1}{3}\pi) = \tfrac{1}{6}f(\tfrac{1}{6}\pi\ ,\ \tfrac{1}{3}\pi\ ,\ \tfrac{1}{6}\pi)\,.$$

Man kann sie direct verificiren, indem man alle Integrale auf die Form $\int \log\sin x\,.\,dx$ oder $\int \log\cos x\,.\,dx$, und die Bogen immer in das erste Sechstel des Halbkreises zu verlegen sucht. Ich bemerke hiezu, dass der bekannten Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\sin x\,.\,dx = -\tfrac{1}{2}\pi\log 2$$

noch die andre

$$2\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \log(2\sin x)\,dx + 3\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \log(2\cos x)\,dx = 0$$

zur Seite steht. Ob für eine der drei obigen Gruppen von Argumenten ein schliesslicher Functionswerth existirt, hangt also davon ab, ob das bestimmte Integral $\int \log\sin x\,.\,dx$ für $0 < x < \frac{1}{6}\pi$ einen schliesslichen Ausdruck hat, oder nicht. Die Nicht-Existenz ist wahrscheinlicher, und ich glaube überhaupt, dass in der gegenwärtigen Betrachtung die Fälle erschöpft sind, wo die Function $f(\alpha,\beta,\gamma)$ einen schliesslichen Ausdruck ihres Werths gestattet. Solcher negativer Behauptungen lassen sich freilich in der Mathematik viele aufstellen; aber die Beweise davon werden lange vergeblich gesucht werden.

12.

Schlussbemerkung. Die hier betrachtete Function geht aus einer allgemeinern hervor, indem man von ihren *sechs* Argumenten drei dem Quadranten gleich setzt; und diese Gattung von Functionen ist wiederum in einer Classe enthalten, in welcher eine Function überhaupt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Argumente hat und alle Abgeleiteten ähnliche Functionen von einer niedrigern Gattung mit bloss $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Argumenten sind. In allen Gattungen giebt es einige Gruppen von rationalen Argumenten, für welche der Werth der Function mit einer Potenz von π commensurabel ist. Es ist mir aber noch nicht gelungen, die betreffenden Integralformeln mit den gewöhnlichen Hülfsmitteln zu beweisen.

Bern, den 12. März 1852.

18.

Observationes quaedam in theoria numerorum.

(Auct. Dr. *E. Meissel*, Berol.)

In tomo IX. hujus diarii Cl.^{mi} *Moebii* exstat commentatio inscripta. „*Ueber eine besondere Art der Umkehrung von Reihen.*" Qua commentatione commotus quum serierum reversionem accuratius examinassem, ad novas quasdam formulas in theoriam numerorum radices agentes perveni, quas breviter exponere in sequenti commentatione propositum mihi est.

§. 1.

Si per a_k designemus valorum quempiam $-1, +1; 0$, prout numerus k aut ex impari aut ex pari numero divisorum inter se diversorum primorum consistat; aut per quadratum divisibilis sit; ex aequatione

$$F(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\varphi(sx)}{s^n}$$

sequitur

$$\varphi(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_s F(sx)}{s^n},$$

ut Cl. *Moebius* loco supra citato demonstraverat. Inter quantitates illas a_1, a_2, a_3, ... a_n relatio linearis exsistit, ad quam hoc modo facile pervenimus. Ex formula nota:

$$\tfrac{1}{2}\cot(\tfrac{1}{2}kx) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \sin(skx)$$

fluit, si utrimque summationem ratione ipsius k inter limites $k = 1$ et $k = n$ instituamus:

$$(1.)\quad \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n}\cot(\tfrac{1}{2}kx) = \sin x + 2\sin 2x + 2\sin 3x + \cdots + b_m \sin mx + \cdots$$

In dextera ejus aequationis parte coëfficiens generalis b_m indicat, quot numeri inter 1 et n numerum m metiantur. Si formulam (1.) utrimque multiplicemus per

$$\frac{2}{x}\sin mx\,dx,$$

deinde integrationem inter $x = 0$ et $x = \pi$ instituamus, sequitur:

$$(2.) \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin mx\,dx \,.\, \sum_1^n \cot\left(\tfrac{1}{2}kx\right).$$

Instituta summatione omnium quantitatum b_m inter limites $m = 1$ et $m = m$, eruitur:

$$(3.) \qquad \sum_1^m b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin mx \sin(m+1)x}{\sin x}\,dx \cdot \sum_1^n \cot(kx).$$

Si cum III°. *Legendre* per $E(\alpha)$ denotemus maximum ipsius α numerum integrum, ex proprietate supra commemorata quantitatis b_m demonstratur esse:

$$(4.) \qquad \sum_1^m b_m = E(m) + E\left(\tfrac{1}{2}m\right) + E\left(\tfrac{1}{3}m\right) + \ldots\ldots + E\left(\frac{m}{n}\right)$$

Comparatis igitur inter sese aequationibus (3. et 4.), erit:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin mx \sin(m+1)x}{\sin x}\,dx \cdot \sum_1^n \cot(kx) = \sum_1^n E\left(\frac{m}{k}\right);$$

vel, si in ea formula loco n ponamus $n - 1$ et a praecedente aequatione subtrahamus:

$$(5.) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin mx \sin(m+1)x}{\sin x}\cot nx\,dx = E\left(\frac{m}{n}\right).$$

Ex aequatione

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}{}' \sin sx = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x$$

eruitur secundum formulam Cl.mi *Moebii:*

$$2\sin 2x = \sum_{k=1}^{k=\infty}{}' a_k \cot kx,$$

qua formula multiplicata utrimque per

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin mx \sin(m+1)x}{\sin x}\,dx,$$

institutaque integratione inter $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}\pi$, dextera aequationis superioris pars virtute formulae (5.) abit in:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} a_k E\left(\frac{m}{k}\right).$$

Sinistra pars

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin 2x \cdot \frac{\sin mx \sin(m+1)x}{\sin x}\, dx\ ,$$

quum pro omni numero integro m unitati aequalis sit, habebimus:

$$1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k E\left(\frac{m}{k}\right).$$

Quum porro expressio $E\left(\frac{m}{k}\right)$ abeat in cyphram, si pro k ponamus numerum numero m majorem, summatio in dextera praecedentis aequationis parte restringi potest inter limites $k = 1$ et $k = m$; unde concluditur fore:

$$(6.)\quad 1 = a_1 E(m) + a_2 E(\tfrac{1}{2}m) + a_3 E(\tfrac{1}{3}m) + \cdots + a_m E\left(\frac{m}{m}\right)\ ,$$

quae est relatio supra commemorata linearis inter quantitates $a_1, a_2, a_3, \cdots a_m$.

§. 2.

De serie quadam generali, cujus termini signo E affecti sint.

Si per $(x|\varphi x)$ functionem symmetricam quantitatum x et $\varphi(x)$ designemus; functio ipsius x „$\varphi(x)$" determinata ex aequatione $(x|\varphi x) = 0$, generaliter proprietate gaudebit, ut sit $\varphi\varphi(x) = x$. Posito functionem $\varphi(x)$ huic conditioni satisfacere, proponimus seriem:

$$(1.)\qquad F(s) = E\varphi 1 + E\varphi 2 + E\varphi 3 \cdots + E\varphi s\ ,$$

ubi $\varphi(x)$ crescente argumenti x valore decrescat. Exsistere tum theorema additionis functionum F demonstrabimus sequens:

$$F(s) + FE\varphi s = F(\infty) + sE\varphi s.$$

Fluit enim ex formula (1.), si a denotet numerum integrum, numero s inferiorem:

$$(2.)\quad F(s) = F(a) + E\varphi(a+1) + E\varphi(a+2) + \cdots + E\varphi s.$$

Valorem ipsius numeri a ita propius determinemus ut sit:

$$E\varphi(a) = \mu \quad ; \quad E\varphi(a+1) = \mu - 1 .$$

Ex systemate aequationum indeterminatarum numero $(k+1)$:

$$(3.)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\mu - 1 = E\varphi(a+1), E\varphi(a+2), \ldots & E\varphi(a+\lambda_1) \\
\mu - 2 = E\varphi(a+\lambda_1+1), E\varphi(a+\lambda_1+2), \ldots & E\varphi(a+\lambda_1+\lambda_2) \\
\mu - 3 = E\varphi(a+\lambda_1+\lambda_2+1), E\varphi(a+\lambda_1+\lambda_2+2), \ldots & E\varphi(a+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) \\
\multicolumn{2}{c}{\text{etc.}} \\
\mu - i = E\varphi(a+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{i-1}+1), \ldots & E\varphi(a+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i) \\
\multicolumn{2}{c}{\text{etc.}} \\
1+E\varphi s = \mu - k = \ldots & E\varphi(a+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k) \\
E\varphi s = \mu - k - 1 = E\varphi(a+\lambda_1+\lambda_2+\ldots\lambda_k+1), \ldots & E\varphi(s-1), E\varphi s,
\end{array}\right.$$

perspicitur quantitatum $E\varphi(a+1)$, $E\varphi(a+2)$, ... $E\varphi s$ λ_1 esse aequales numero $(\mu-1)$; λ_2 aequales $(\mu-2)$; etc. λ_k aequales $(\mu-k)$; $(s-a-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_k)$ aequales numero $(\mu-k-1 = E\varphi s$; quare patet aequationem (2.) hanc induere formam:

$$(4.)\quad F(s) = F(a) + (\mu-1)\lambda_1 + (\mu-2)\lambda_2 + (\mu-3)\lambda_3 + \ldots\ldots + (\mu-k)\lambda_k + (\mu-k-1)\{s-a-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_k\}.$$

Eruitur vero ex aequationibus simultaneis:

$$E\varphi(a) = \mu \quad ; \quad E\varphi(a+1) = \mu - 1$$

quantitatem $\varphi(a)$ vel aequalem vel majorem esse numero μ, quantitatem $\varphi(a+1)$ autem numero μ minorem; sive numerum a vel aequalem esse quantitati $\varphi(\mu)$, vel ea minorem, numerum vero $(a+1)$ quantitate $\varphi(\mu)$ esse majorem; unde dijudicatur numerum a maximum esse integrum ipsius $\varphi(\mu)$; vel secundum nostram significationem:

$$a = E\varphi(\mu).$$

Simili modo ex systemate aequationum simultanearum (cfr. (3.)):

$$E\varphi(a+\lambda_1) = \mu - 1; \; E\varphi(a+\lambda_1+1) = \mu - 2 ,$$
$$E\varphi(a+\lambda_1+\lambda_2) = \mu - 2; \; E\varphi(a+\lambda_1+\lambda_2+1) = \mu - 3 ,$$
$$\text{etc.}$$

$$E\varphi(a+\lambda_1+\lambda_2+\ldots\ldots+\lambda_i)=\mu-i;\ E\varphi(a+\lambda_1+\lambda_2+\ldots\ldots+\lambda_i+1)=\mu-i-1$$

etc.

concluditur fore:

$$a+\lambda_1=E\varphi(\mu-1)$$
$$a+\lambda_1+\lambda_2=E\varphi(\mu-2)$$

etc.

$$a+\lambda_1+\lambda_2+\ldots\ldots\lambda_i=E\varphi(\mu-i)$$

etc.

Substitutis ex illis aequationibus quantitatum λ et a valoribus in aequationem (4.), erit:

$$\begin{aligned}(5.)\ F(s)=&F(a)+(\mu-1)\{E\varphi(\mu-1)-E\varphi\mu\}+(\mu-2)\{E\varphi(\mu-2)-E\varphi(\mu-1)\}\\&+\ldots\ldots+(\mu-k)\{E\varphi(\mu-k)-E\varphi(1+\mu-k)\}+(\mu-k-1)\{s-E\varphi(\mu-k)\}\\=&F(a)-\mu E\varphi\mu+E\varphi\mu+E\varphi(\mu-1)+\ldots\ldots+E\varphi(\mu-k)+s(\mu-k-1).\end{aligned}$$

Quum porro sit, virtute formulae (1.):

$$E\varphi\mu+E\varphi(\mu-1)+\ldots\ldots+E\varphi(\mu-k)=F(\mu)-F(\mu-k-1)$$

ex (5.) habebimus:

$$F(s)=F(a)-\mu E\varphi\mu+F(\mu)-F(\mu-k-1)+s(\mu-k-1);$$

vel quum sit

$$\mu-k-1=E\varphi(s)\ ,\quad a=E\varphi(\mu):$$

$$(6.)\quad F(s)+FE\varphi(s)=FE\varphi(\mu)-\mu E\varphi(\mu)+F(\mu)+sE\varphi(s).$$

Crescente in ea aequatione numero indefinito μ in infinitum, quum evanescat $E\varphi(\infty)$, simulque $FE\varphi(\infty)$; quumque $\mu E\varphi(\mu)$ pro $\mu=\infty$ abeat in cyphram, erit ex aequatione (6.):

$$(7.)\qquad F(s)+FE\varphi(s)=F(\infty)+sE\varphi(s);\ \text{q. e. d.}$$

Designante quantitate η radicem aequationis

$$\varphi(\eta)=\eta$$

ex formula (7.) facile probatur esse:

$$(8.)\qquad F(\infty)=2FE\eta-(E\eta)^2.$$

Exemplum: Sit $\varphi(s) + \frac{n}{s}$;

tum erit $\varphi(x)$ functio ipsius x decrescens, crescente argumente x valore, quae satisfacit conditioni $\varphi\varphi(x) = x$. Scribamus porro loco $F(s)$; $\zeta(n, s)$, quum summa $\zeta(n, s)$ et a quantitate s et a parametro n pendeat. Fluunt ex (7. et 8.) formulae sequentes:

$$(7_a.) \qquad \zeta(n,s) + \zeta\left(n, E\tfrac{n}{s}\right) = \zeta(n,\infty) + sE\left(\tfrac{n}{s}\right),$$

$$(8_a.) \qquad \zeta(n,\infty) = 2\zeta(n, E\sqrt{n}) - (E\sqrt{n})^2;$$

vel quum $\zeta(n, \infty)$ aequalis sit quantitati $\zeta(n,n)$:

$$(7_b.) \qquad \zeta(n,s) + \xi\left(n, E\tfrac{n}{s}\right) = \zeta(n,n) + sE\left(\tfrac{n}{s}\right)$$

$$(8_b.) \qquad \zeta(n,n) = 2\zeta(n, E\sqrt{n}) - (E\sqrt{n})^2.$$

Differentia $\zeta(n, s) - \zeta(n-1, s)$ indicat quot numeri ab 1 usque ad s incl., numerum n metiantur, unde e. g. sequitur, radices aequationis

$$\zeta(p,p) = 2 + \zeta(p-1, p-1)$$

numeros esse primos.

Summa

$$\zeta(n,n) = En + E(\tfrac{1}{2}n) + \ldots\ldots + E\left(\tfrac{n}{n}\right),$$

quum quantitate numero n minore a quantitate

$$n\left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\right)$$

abhorreat, si per ϑ numerum unitate inferiorem designemus, erit:

$\zeta(n, n) = n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\right) - \vartheta n$, eodemque modo:

$$\zeta(n, E\sqrt{n}) = n\left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{E\sqrt{n}}\right) - \vartheta' E\sqrt{n}.$$

Quibus expressionibus substitutis in $(8_b.)$, institutaque divisione per numerum n, qui infinite magnus fiat, habebimus:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \vartheta'' = 2\left\{1 + \tfrac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{E\sqrt{n}}\right\}$$

ubi ϑ'' unitate inferior est. Facile ex ea formula intelligitur expressionem

$$1+\tfrac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n},$$

crescente valore numeri n in infinitum, logarithmica ratione ipsam infinitiam fieri.

De functione $\zeta(n, s)$ etiam exsistit theorema sequens curiosum sed inutile, cujus demonstratio satis facile contingit. Si ponamus

$$f(n, s) = \zeta(2n, 2s) - \zeta(n, s) \text{ erit:}$$

$$f(n\ , s) = f\left\{c, E\left(\tfrac{1}{2}+\frac{n}{1+E\frac{2n}{2s-1}}\right)\right\}+\left\{s-E\left(\tfrac{1}{2}+\frac{n}{1+E\frac{n}{2s-1}}\right)\right\}E\left(\frac{n}{2s-1}\right).$$

§. 3.

De relatione generali in serierum reversione.

Sit $\psi(x)$ functio ipsius x continua, cujus differentiale ratione ipsius x sumptum sit positivum. Sit porro, salva generalitate, $\psi(1) = 1$. Eam functionem, quae opposita sit functioni ψ, designemus per „rev", ita ut exsistant aequationes simultaneae:

$$\text{rev}\,\psi(x) = \psi\,\text{rev}(x) = x\ .$$

Reversio seriei infinitae

$$(1.)\quad f(x) = \varphi(xE\psi 1) + \varphi(xE\psi 2) + \varphi(xE\psi 3) + \ldots\ldots$$

praebeat hanc evolutionem:

$$(2.)\quad \varphi(x) = \Phi(1)f(x) + \Phi(2)f(2x) + \Phi(3)f(3x) + \ldots\ldots$$

ubi perspicuum est functionem Φ pendere tantum a natura functionis ψ. Quibus constitutis, si loco functionis $\varphi(u)$ ponamus $\sin(u)$, erit:

$$(1_a.)\quad f(x) = \sin(xE\psi 1) + \sin(xE\psi 2) + \sin(xE\psi 3) + \ldots\ldots$$

$$(2_a.)\quad \sin(x) = \Phi(1)f(x) + \Phi(2)f(2x) + \Phi(3)f(3x) + \ldots\ldots$$

Ex aequatione (a.) eruitur:

$$f(kx) = \sin(kxE\psi 1) + \sin(kxE\psi 2) + \sin(kxE\psi 3) + \ldots\ldots$$

Posito pro k omnibus numeris integris inter **1** et n, institutaque deinde summatione omnium earum aequationum, fit:

$$(3.)\quad \sum_1^n f(kx) = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(2x) + \ldots\ldots + c_m \sin(mx) + \ldots\ldots$$

ubi exsistit inter coëfficientes c relatio:

$$(4.)\quad \sum_1^m c_s = \boldsymbol{E}\mathrm{rev}\, m + \boldsymbol{E}\mathrm{rev}\, \boldsymbol{E}\tfrac{1}{2} m + \ldots + \boldsymbol{E}\mathrm{rev}\, \boldsymbol{E}\frac{m}{n}\,.$$

Ad demonstrandam eam relationem, observo functionem $\psi(x)$ ipsam crescere, crescente argumenti x valore, quum differentiale ipsius $\psi(x)$ semper sit positivum. Si igitur praesto sint aequationes

$$\boldsymbol{E}\psi(k) \leqq \alpha \quad ; \quad \boldsymbol{E}\psi(k+1) > \alpha\,,$$

in quibus k denotet numerum integrum, erit:

$$\psi(k) \leqq \boldsymbol{E}(\alpha) \quad ; \quad \psi(k+1) > \boldsymbol{E}(\alpha)$$

vel

$$k \leqq \mathrm{rev}\, \boldsymbol{E}(\alpha) \quad ; \quad k+1 > \mathrm{rev}\, \boldsymbol{E}(\alpha)$$

ideoque

$$(4_a.)\qquad k = \boldsymbol{E}\mathrm{rev}\, \boldsymbol{E}(\alpha)\,.$$

Determinemus nunc n numeros $k_1, k_2, \ldots k_n$ ita, ut satisfaciant conditionibus sequentibus:

$$(5.)\qquad \boldsymbol{E}\psi(k_1) \leqq m \quad ; \quad \boldsymbol{E}\psi(1+k_1) > m\,,$$

$$2\,\boldsymbol{E}\psi(k_2) \leqq m \; ; \quad 2\,\boldsymbol{E}\psi(1+k_2) > m,$$

etc.

$$n\,\boldsymbol{E}\psi(k_n) \leqq m \quad ; \quad n\boldsymbol{E}\psi(1+k_n) > m\,,$$

tum ope relationis (4_a) pro numerorum $k_1, k_2, \ldots k_n$ valoribus eruimus:

$$(6.)\; k_1 = \boldsymbol{E}\mathrm{rev}\, m \; ; \quad k_2 = \boldsymbol{E}\mathrm{rev}\, \boldsymbol{E}\tfrac{1}{2} m \; ; \quad \ldots k^n = \boldsymbol{E}\mathrm{rev}\, \boldsymbol{E}\frac{m}{n}\,.$$

Sequitur vero ex aequatione (1_a):

$$\begin{cases} f(x) = \sin(xE\psi 1)+\sin(xE\psi 2)+\ldots+\sin(xE\psi k_1)+\sin(xE\psi(1+k_1))+\ldots \\ f(2x) = \sin(2xE\psi 1)+\sin(2xE\psi 2)+\ldots+\sin(2xE\psi k_2)+\sin(2xE\psi(1+k_2))+\ldots \\ f(3x) = \sin(3xE\psi 1)+\sin(3xE\psi 2)+\ldots+\sin(3xE\psi k_3)+\sin(3xE\psi(1+k_3))+\ldots \\ \qquad\qquad \text{etc.} \\ f(nx) = \sin(nxE\psi 1)+\sin(nxE\psi 2)+\ldots+\sin(nxE\psi k_n)+\sin(nxE\psi(1+k_n))+\ldots \end{cases}$$

Quarum aequationum in prima occurrunt k_1, in secunda k_2, in tertia k_3, etc. in n^{ta} k_n sinus, quorum argumenta non sint majora quantitate mx, ut perspicitur ex aequationibus (5). Si igitur in summatione superiorum n aequationum signum Σ tantum extendamus ad omues sinus, quorum argumenta non majora sint quantitate mx, ex comparatione cum formula (3) invenimus, summam illam esse $\sum_1^m c_s$, vel ut antea vidimus:

$$= (k_1 + k_2 + \ldots\ldots + k_n) .$$

Substitutis igitur ex formula (6) loco quantitatum $k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$ valores

$$E\,\text{rev}\,m \quad ; \quad E\,\text{rev}\,E\frac{m}{2} \quad ; \quad \ldots\ldots E\,\text{rev}\,E\frac{m}{n}, \text{ sequitur:}$$

$$\sum_1^m c_s = E\,\text{rev}\,m + E\,\text{rev}\,E\frac{m}{2} + \ldots\ldots + E\,\text{rev}\,E\frac{m}{n} ;$$

quae est relatio data in formula (4).

Si aequationem (3) multiplicemus utrimque per

$$\frac{2}{\pi}\sin mx\,dx ,$$

deinde instituamus integrationem inter $x = 0$ et $x = \pi$, eruimus:

$$c_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin mx\,dx\sum_1^n f(kx) ,$$

sive instituta omnium quantitatum c_m summatione inter $m = 1$ et $m = m$:

$$(7.) \quad \sum_1^m c_s = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin mx\sin(m+1)x}{\sin x}dx.\sum_1^n f(2kx) .$$

Comparatis inter sese formulis (4 et 7) sponte sequitur:

$$\sum_1^n E\,\mathrm{rev}\,E\frac{m}{k} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin mx \sin(m+1)x}{\sin x}\,dx . \sum_1^n f(2kx) \ ,$$

vel posito $n-1$ loco n, institutaque subtractione a formula praecedente, habebitur:

$$(8.) \quad E\,\mathrm{rev}\,E\frac{m}{n} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin mx \sin(m+1)x}{\sin x} f(2nx)\,dx \ .$$

Substituto in aequatione (2.) $2x$ pro x; multiplicato deinde per

$$\frac{4}{\pi}\,\frac{\sin mx \sin(m+1)x}{\sin x}\,dx \ ,$$

institutaque integratione inter limites $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}\pi$, virtute formulae (8) sequitur:

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin 2x \sin mx \sin(m+1)x}{\sin x}\,dx = \Phi(1)\,E\,\mathrm{rev}\,m + \Phi(2)\,E\,\mathrm{rev}\,E_{\frac{1}{2}}m + \Phi(3)\,E\,\mathrm{rev}\,E_{\frac{1}{3}}m + \ldots ,$$

sive, quum sinistra hujus aequationis pars unitati aequalis sit:

$$1 = \Phi(1)\,E\,\mathrm{rev}\,m + \Phi(2)\,E\,\mathrm{rev}\,E_{\frac{1}{2}}m + \Phi(3)\,E\,\mathrm{rev}\,E_{\frac{1}{3}}m + \ldots ,$$

Evanescente vero $E\left(\frac{m}{k}\right)$, si k numero m major sit, ideoque abeunte $E\,\mathrm{rev}\,E\frac{m}{k}$ in cyphram pro omnibus ipsius k valoribus numerum m excedentibus, series infinita in dextera superioris aequationis parte $a(m+1)^{\mathrm{to}}$ termino negligi potest et relatio supra data scribitur:

$$(9.) \quad 1 = \Phi(1)\,E\,\mathrm{rev}\,m + \Phi(2)\,E\,\mathrm{rev}\,E_{\frac{1}{2}}m + \ldots + \Phi(m)\,E\,\mathrm{rev}\,E\frac{m}{m} .$$

§. 4.

Applicatio formulae nonae articuli praecedentis ad demonstrandum theorema quoddam de numeris primis.

Ponimus in articulo praecedente pro functione ipsius n, „$\psi(n)$" numerum primum $n$tum. Erit igitur e. g.

$$\psi(1) = 1 \ ; \quad \psi(2) = 2 \ ; \quad \psi(3) = 3 \ ; \quad \psi(4) = 5 \ ; \quad \psi(5) = 7 \ ; \quad \text{etc.}$$

Denotat tum signum $E\,\mathrm{rev}(m)$, quot numeri primi in serie numerorum naturalium ab **1** usque ad m incl. siti sint. Ad usum formulae **(9)** art. praec. consideremus jam propius indolem functionis Φ. Si detur series

$$\textbf{(1.)}\quad F(x) = \varphi(x) + \varphi(2x) + \varphi(3x) + \ldots + \varphi(px) + \ldots = \overset{p}{\Sigma}\varphi(px)\,,$$

ubi summatio in omnes ipsius p valores primos extendatur, erit vice versa:

$$\textbf{(2.)}\quad \varphi(x) = \Phi(1)F(x) + \Phi(2)F(2x) + \Phi(3)F(3x) + \ldots = \overset{s=\infty}{\underset{s=1}{\Sigma}}\Phi(s)F(sx).$$

Ex formula **(2)** concluditur fore:

$$\varphi(px) = \overset{s=\infty}{\underset{s=1}{\Sigma}}\Phi(s)F(spx)\,,$$

vel instituta summatione ratione omnium numerorum primorum p:

$$\overset{p}{\Sigma}\varphi(px) = \overset{p}{\Sigma}\overset{s=\infty}{\underset{s=1}{\Sigma}}\Phi(s)F(spx)$$

sive ope formulae **(1)**:

$$\textbf{(2}_{\text{a}}\textbf{.)}\qquad F(x) = \overset{p}{\Sigma}\overset{s=\infty}{\underset{s=1}{\Sigma}}\Phi(s)F(spx)\,.$$

Dexteram ejus aequationis partem secundum functiones „F" multiplorum ipsius x hoc modo evolvere licet:

$$X(1)F(x) + X(2)F(2x) + X(3)F(3x) + \ldots + X(M)F(Mx) + \ldots,$$

quae evolutio identica cum $F(x)$ non erit, nisi ponamus:

$$\textbf{(2}_{\text{b}}\textbf{.)}\quad X(1) = 1\quad,\quad X(2) = 0\quad,\quad X(3) = 0\,,\ \ldots\ldots X(M) = 0\,.$$

Ad determinandum coëfficientem ipsius $F(Mx)$, „$X(M)$", necesse est, ut ponamus in dextera aequationis **(2**$_{\text{a}}$**)** parte $sp = M$. Inventis tum omnibus numeris primis p, qui numerum M metiantur, ut e. g. **1**, p_1, p_2, p_m, habebimus pro numeris s:

$$s = \frac{M}{1}\ ,\ \frac{M}{p_1}\ ,\ \frac{M}{p_2}\ ,\ \ldots\ldots\frac{M}{p_m}\,.$$

Quum vero coëfficiens $X(M)$ sit summa omnium $\Phi(s)$, concluditur fore:

$$\textbf{(3.)}\quad X(M) = \Phi(M) + \Phi\left(\frac{M}{p_1}\right) + \Phi\left(\frac{M}{p_2}\right) + \ldots\ldots + \Phi\left(\frac{M}{p_m}\right) = 0,$$

ubi $1, p_1, p_2, \cdots p_m$ omnes sunt numeri primi, qui numerum M metiantur; sive quod convenit in idem, ubi numerus M hoc modo ope divisorum primorum $p_1, p_2, \cdots p_m$ formari potest:

$$(3_a.) \qquad M = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}.$$

Porro quum sit {cfr. $(2_b.)$} $X(1) = 1$, ideoque $\Phi(1) = 1$, erit virtute formulae (3.) $\Phi(p_1) + \Phi(1) = 0$, vel $\Phi(p_1) = -1$; eodem modo habebimus aequationem $\Phi\left(p_1^{n_1}\right) + \Phi\left(p_1^{n_1-1}\right) = 0$, sive $\Phi\left(p_1^{n_1}\right) = -\Phi\left(p_1^{n_1-1}\right)$, itaque ex inductione $\Phi\left(p_1^{n_1}\right) = (-1)^m \Phi\left(p_1^{n_1-m}\right) = (-1)^{n_1}$. Si inductionis viam longius persequamur, eruimus paullatim:

$$\Phi\left(p_1^{n_1} p_2^{n_2}\right) = \frac{1.2.3 \ldots\ldots (n_1+n_2)}{1.2.3 \ldots n_1 . 1.2.3 \ldots n_2} (-1)^{n_1+n_2},$$

vel designato producto secundum Cl.mum *Gauss* $1.2.3 \ldots n$ per $\Pi(n)$:

$$\Phi\left(p_1^{n_1} p_2^{n_2}\right) = \frac{\Pi(n_1+n_2)}{\Pi n_1 \, \Pi n_2} (-1)^{n_1+n_2};$$

$$\Phi\left(p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}\right) = \frac{\Pi(n_1+n_2+n_3)}{\Pi n_1 \, \Pi n_2 \Pi n_3} (-1)^{n_1+n_2+n_3};$$

etc. et generaliter:

$$(4.) \quad \Phi\left(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}\right) = \frac{\Pi(n_1+n_2+\ldots\ldots+n_m)}{\Pi n_1 \, \Pi n_2 \ldots\ldots \Pi n_m} (-1)^{n_1+n_2+\ldots+n_m}.$$

Justitia formulae (4.) facile probari potest a posteriori, substituta dextera ejus parte in relationem (3.). Fit enim secundum formulam (4):

$$\Phi\left(\frac{M}{p_1}\right) = \Phi\left(p^{n_1-1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}\right) = \frac{\Pi(n_1-1+n_2+\ldots\ldots+n_m)}{\Pi(n_1-1)\,\Pi n_2 \ldots\ldots \Pi n_m} (-1)^{n_1-1+n_2+\ldots+n_m}$$

$$= -\frac{n_1}{n_1+n_2+\ldots\ldots+n_m} \cdot \frac{\Pi(n_1+n_2+\ldots\ldots+n_m)}{\Pi n_1 \, \Pi n_2 \ldots\ldots \Pi n_m} (-1)^{n_1+n_2+\ldots+n_m}$$

ex indole functionum Π. Eruimus igitur

$$\Phi\left(\frac{M}{p_1}\right) = -\frac{n_1}{n_1+n_2 \ldots\ldots+n_m} \Phi(M),$$

eodemque modo commutatis indicibus ipsorum p_1 et n_1 in $2, 3, \ldots\ldots m$:

$$\Phi\left(\frac{M}{p_2}\right) = -\frac{n_2}{n_1+n_2+\ldots+n_m}\Phi(M)$$

etc.

$$\Phi\left(\frac{M}{p_m}\right) = -\frac{n_2}{n_1+n_2+\ldots+n_m}\Phi(M).$$

Substitutis pro sinistris earum aequationum partibus, dextris in relationem (3), erit identice:

$$\Phi(M)\left\{1-\frac{n_1}{n_1+n_2+\ldots+n_m}-\frac{n_2}{n_1+n_2+\ldots+n_m}-\ldots-\frac{n_m}{n_1+n_2+\ldots+n_m}\right\}=0.$$

Functione Φ ita rite determinata, sequens theorema de numeris primis exstabit:

Si denotemus signo $E\mathrm{rev}(m)=\vartheta(m)$, quot numeri primi in serie numererum naturalium ab 1 usque ad m incl. siti sint; si porro per $\Phi(p_1^{n_1}p_1^{n_2}\ldots.p_m^{n_m})$ designemus functionem $\frac{\Pi(n_1+n_2+\ldots+n_m)}{\Pi n_1\,\Pi n_2\,\ldots.\,\Pi n_m}(-1)^{n_1+n_2+\ldots n_m}$ enuntiare licet formulam sequentem (cfr. form. (9) art. praec.)

$$(4_a.)\quad 1=\Phi(1)\vartheta(m)+\Phi(2)\vartheta E\tfrac{1}{2}m+\Phi(3)\vartheta E\tfrac{1}{3}m+\ldots.+\Phi(m)\vartheta E\frac{m}{m}.$$

Veritatem ejus formulae ipso calculo probabimus in casu speciali

$$m=25.$$

Erit:

$\Phi(1)=+1$	$\vartheta E25=\vartheta 25=10$	$\Phi 1\ \vartheta 25=+10$
$\Phi(2)=-1$	$\vartheta E\frac{25}{2}=\vartheta 12=6$	$\Phi 2\ \vartheta 12=-6$
$\Phi(3)=-1$	$\vartheta E\frac{25}{3}=\vartheta 8=5$	$\Phi 3\ \vartheta 8=-5$
$\Phi(4)=+1$	$\vartheta E\frac{25}{4}=\vartheta 6=4$	$\Phi 4\ \vartheta 6=+4$
$\Phi(5)=-1$	$\vartheta E\frac{25}{5}=\vartheta 5=4$	$\Phi 5\ \vartheta 5=-4$
$\Phi(6)=+2$	$\vartheta E\frac{25}{6}=\vartheta 4=3$	$\Phi 6\ \vartheta 4=+6$
$\Phi(7)=-1$	$\vartheta E\frac{25}{7}=\vartheta 3=3$	$\Phi 7\ \vartheta 3=-3$
$\Phi(8)=-1$	$\vartheta E\frac{25}{8}=\vartheta 3=3$	$\Phi 8\ \vartheta 3=-3$
$\Phi(9)=+1$	$\vartheta E\frac{25}{9}=\vartheta 2=2$	$\Phi 9\ \vartheta 2=+2$
$\Phi(10)=+2$	$\vartheta E\frac{25}{10}=\vartheta 2=2$	$\Phi 10\,\vartheta 2=+4$
$\Phi(11)=-1$	$\vartheta E\frac{25}{11}=\vartheta 2=2$	$\Phi 11\,\vartheta 2=-2$
$\Phi(12)=-3$	$\vartheta E\frac{25}{12}=\vartheta 1=1$	$\Phi 12\,\vartheta 2=-6$
$\Phi(13)=-1$	$\vartheta E\frac{25}{13}=\vartheta 1=1$	$\Phi 13\,\vartheta 1=-1$

$\Phi(14) = +2$	$\vartheta E\frac{25}{14} = \vartheta 1 = 1$	$\Phi 14\,\vartheta 1 = +2$
$\Phi(15) = +2$	$\vartheta E\frac{25}{15} = \vartheta 1 = 1$	$\Phi 15\,\vartheta 1 = +2$
$\Phi(16) = +1$	$\vartheta E\frac{25}{16} = \vartheta 1 = 1$	$\Phi 16\,\vartheta 1 = +1$
$\Phi(17) = -1$	$\vartheta E\frac{25}{17} = \vartheta 1 = 1$	$\Phi 17\,\vartheta 1 = -1$
$\Phi(18) = -3$	$\vartheta E\frac{25}{18} = \vartheta 1 = 1$	$\Phi 18\,\vartheta 1 = -3$
$\Phi(19) = -1$	$\vartheta E\frac{26}{19} = \vartheta 1 = 1$	$\Phi 19\,\vartheta 1 = -1$
$\Phi(20) = -3$	$\vartheta E\frac{25}{20} = \vartheta 1 = 1$	$\Phi 20\,\vartheta 1 = -3$
$\Phi(21) = +2$	$\vartheta E\frac{25}{21} = \vartheta 1 = 1$	$\Phi 21\,\vartheta 1 = +2$
$\Phi(22) = +2$	$\vartheta E\frac{25}{22} = \vartheta 1 = 1$	$\Phi 22\,\vartheta 1 = +2$
$\Phi(23) = -1$	$\vartheta E\frac{25}{23} = \vartheta 1 = 1$	$\Phi 23\,\vartheta 1 = -1$
$\Phi(24) = +4$	$\vartheta E\frac{25}{24} = \vartheta 1 = 1$	$\Phi 24\,\vartheta 1 = +4$
$\Phi(25) = +1$	$\vartheta E\frac{25}{25} = \vartheta 1 = 1$	$\Phi 25\,\vartheta 1 = +1$
		Summa $= +1$.

Nota. Ex reversione seriei:

$$\varphi(x) = \Phi(1)\,F(x) + \Phi(2)\,F(2x) + \Phi(3)\,F(3x) + \ldots = \sum_{s=1}^{s=\infty} \Phi(s)\,F(sx)$$

prodire:

$$F(x) = \varphi(x) + \varphi(2x) + \varphi(3x) + \varphi(sx) + \ldots + \varphi(px) + \ldots = \sum^{p} \varphi(px)$$

iterum observare mihi visum est.

Berol. 1850.

Appendix ad: Observationes q. in th. num.

I. Demonstratio rigorosa formulae (8).

Si ponamus $\eta = \varphi(\eta)$,

sequitur ex indole functionis φ, quum sit $E\eta \leqq \eta$, $1 + E\eta > \eta$

(1.) $\varphi E\eta \geqq \eta$,

(2.) $\varphi(1 + E\eta) < \eta$.

Fit porro

$$(3.) \qquad E\varphi E\eta = a + E\eta \ ,$$

ubi a denotet numerum integrum positivum, exclusa cyphra (quam statuendo pro a ipso intuito justitia formulae nostrae apparet), assumendo po m numerorum quempiam ab 1 incl. usque ad a incl., quum sit virtute formulae (3):

$$\varphi E\eta \geqq a + E\eta \ , \text{ erit a fortiori:}$$

$$(4.) \qquad \varphi E\eta \geqq m + E\lambda \ , \quad \text{quumque ex relatione (2),}$$

$$(5.) \qquad \varphi(m + E\eta) < \eta < 1 + E\eta$$

habebuntur ex (4 et 5) relationes:

$$(4_a.) \qquad E\eta \leqq \varphi(m + E\eta) \ ,$$

$$(5_a.) \qquad 1 + E\eta > \varphi(m + E\eta) \ ,$$

unde fluit ex indole characteristicae E:

$$(6.) \qquad E\varphi(m + E\eta) = E\eta \quad ; \quad \{a \geqq m \geqq 1\} \ .$$

Si ponamus in formula (7) loci citati,

$$s = E\eta \ \text{ eruitur}$$

$$FE\eta + F(a + E\eta) = F(\infty) + E\eta(a + E\eta) \ .$$

Quum vero $F(a + E\eta) = FE\eta + E\varphi(1 + E\eta) + \ldots + E\varphi(a + E\eta)$

$$= FE\eta + \sum_1^a E\varphi(m + E\eta), \ \text{sequitur}$$

$$2FE\eta + \sum_1^a E\varphi(m + E\eta) = F(\infty) + (E\eta)^2 + aE\eta \ ,$$

vel applicando formulam (6), quum sit

$$\sum_1^a E\varphi(m + E\eta) = \sum_1^a E\eta = aE\eta :$$

$$(8.) \qquad 2FE\eta = F(\infty) + (E\eta)^2 \ ;$$

quae est relatio loco citato proposita.

II. Extensio formulae (7) *in functiones quaslibet.*

Nota: Sit $f(x)$ functio quaepiam ipsius x continua, quae crescat, ipso x crescente; sit porro

$$f\,\mathrm{rev}\,x = \mathrm{rev}\,f\,x = x \qquad \text{et}$$

$$Ef\,1 + Ef\,2 + \ldots\ldots \qquad + Ef\,n = f(n),$$

$$E\,\mathrm{rev}\,1 + E\,\mathrm{rev}\,2 + \ldots + E\,\mathrm{rev}\,(2) = \varphi(n),$$

demonstratur esse:

$$F(m) + \varphi\, Ef(m) = F(\infty) + m\,Ef\,m,$$

$$\varphi(m) + F\,E\,\mathrm{rev}\,(m) = \varphi(\infty) + m\,E\,\mathrm{rev}\,m\,,$$

unde concluditur fore $\varphi(\infty) = F(\infty)$.

Berol. mense Mart. 1853.

19.

Zur Theorie der Tautochronen.

(Von Herrn Dr. phil. *Meissel* in Berlin.)

Laplace beschäftigt sich in seiner „*Mécanique céleste*" mit den Curven, welche die Eigenthümlichkeit haben, dass ein materieller Punct, welcher von einem beliebigen ihrer Puncte ohne Anfangsgeschwindigkeit ausgeht, dieselbe *constante Zeit* gebraucht, um zu ihrem tiefsten Puncte zu gelangen. Er nimmt bei der Auflösung Rücksicht auf eine *constante Schwerkraft* und einen *Luftwiderstand*, welcher eine ganze Function zweiter Ordnung von der Geschwindigkeit ist. Es lässt sich dieses Problem noch vollständig auflösen, wenn man auch noch die *Reibung* des Punctes gegen die Curve berücksichtigt.

Ich habe die Gestalt der Tautochrone gesucht, unter der Voraussetzung, dass der materielle Punct eine volle Schwingung in constanter Zeit vollenden soll; und bin dabei auf eine interessant scheinende *Umformung* der Bedingungsgleichung gestossen, welche ich weiter unten mittheilen werde.

Zuerst aber will ich die Verallgemeinerung eines Problems geben, welches *Abel* für eine constante Schwerkraft gelöset hat. Er sucht nämlich die Gestalt der Curven, bei welcher eine halbe Oscillationsdauer eine gegebene Function von der Fallhöhe ist. (Man vergleiche: *Oeuvres complètes de N. H. Abel, tom.* 1. *pag.* 27. „*Résolution d'un problème mécanique.*")

Es sei in (Fig. 1. Taf. II) C ein anziehendes festes Centrum, welches in der Entfernung der Einheit einen gewissen materiellen Punct mit der Kraft $= \alpha$ anzieht. $ADBE$ sei eine gewisse Curve, auf welcher sich von A aus mit der Anfangsgeschwindigkeit = Null ein materieller Punct zufolge der Einwirkungen des festen Centrums bewegt. Es sei die kürzeste Verbindungslinie von Curve und Centrum $BC = k$. $AC = a$. $CD = r$, Wink. $BCD = \varphi$. Dann ist die Bewegungsdauer des Punctes zwischen A und B:

$$(1.) \qquad T = \int_k^a \frac{\sqrt{\left[1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right]}}{\sqrt{\left[2\alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)\right]}} dr .$$

Aus dieser Gleichung soll, dem *Abel*schen Problem entsprechend, φ so als Function von r ausgedrückt werden, dass T eine gegebene Function von a nämlich:

$$(1^a.) \qquad T = \sqrt{\frac{a}{2\alpha}} \cdot f(a)$$

ist; d. h. es soll die Gleichung:

$$(2.) \qquad f(a) = \int_k^a \frac{\sqrt{\left[1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right]}}{\sqrt{\left[\frac{a}{r} - 1\right]}} dr$$

erfüllt werden.

Man setze:

$$(2^a.) \qquad \sqrt{\left[1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right]} dr = \tfrac{1}{2} \frac{F r . dr}{\sqrt{(r^2 - kr)}}$$

in (2). Dies giebt:

$$(3.) \quad f(a) = \tfrac{1}{2} \int_k^a \frac{F(r)\,dr}{\sqrt{(r-k)}.\sqrt{(a-r)}} = \tfrac{1}{2} \int_0^{a-k} \frac{F(u+k)\,du}{\sqrt{u}.\sqrt{(a-k-u)}}.$$

Es sei

$$a - k = \omega, \text{ so wird:}$$

$$(4.) \quad f(k+\omega) = \tfrac{1}{2} \int_0^{\omega} \frac{F(u+k)\,du}{\sqrt{u}.\sqrt{(\omega - u)}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} F(k + \omega \sin^2\eta)\, d\eta ,$$

wo ω ganz willkürlich ist.

Man differentiire die Gleichung (4) zweimal nach ω und setze, nach erfolgter Differentiation, $\omega = 0$, so erhält man:

$$(5.) \qquad f^N(k) = F^N(k) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\eta . d\eta$$

d. h., da nach der Bezeichnung von *Gauss*

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\eta . d\eta = \tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{\Pi 2n}{4^n (\Pi n)^2} \text{ ist:}$$

$$(6.) \qquad f^N(k) = \tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{\Pi 2^n}{4^n (\Pi^n)^2} F^N(k)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\omega^n F^N(k)}{\Pi^n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4^n \Pi n}{\Pi 2n} \omega^n f^N(k),$$

oder, indem man zwischen $n = 0$ und $n = a$ auf alle ganzen n die Summation ausdehnt:

$$\Sigma \frac{\omega^n F^N(k)}{\Pi n} = \frac{2}{\pi} \cdot \Sigma \frac{\Pi n}{\Pi 2n} (4\omega)^n f^N(k)$$

d. h.:

$$(7.) \qquad F(k+\omega) = \frac{2}{\pi} \cdot \Sigma \frac{\Pi n}{\Pi 2n} (4\omega)^n f^N(k),$$

oder, wenn man $\omega = \frac{1}{4}x$ setzt:

$$(7^a.) \qquad F(k+\tfrac{1}{4}x) = \frac{2}{\pi} \cdot \Sigma \frac{\Pi n}{\Pi 2n} x^n f^N(k).$$

Es zeigt sich, dass sich die Seite rechts durch ein *bestimmtes Integral* ausdrücken lässt, nämlich:

$$\frac{2}{\pi} \cdot \Sigma \frac{\Pi n}{\Pi 2n} x^n f^N(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [\sin\varphi \,.\, f(k + \tfrac{1}{4}x\sin^2\varphi) + \tfrac{1}{2}x \sin^3\varphi \,.\, f'(k + \tfrac{1}{4}x\sin^2\varphi)]\, d\varphi;$$

wie sich dies am bequemsten a posteriori durch Entwickelung nach Potenzen von x ergiebt. Nach Einführung der eben aufgestellten Gleichung (7^a) erhält man schliesslich, indem man $4x$ statt x setzt:

$$(8.) \qquad \tfrac{1}{2}\pi F(k+x) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [\sin\varphi \,.\, f(k + x\sin^2\varphi) + 2x\sin^3\varphi \,.\, f'(k + x\sin^2\varphi)]\, d\varphi.$$

Aus (2^a) lässt sich mit Hülfe dieser Gleichung der polare Winkel φ durch r durch Quadratur finden. Setzt man z. B. T constant, d. h. sucht man die *Tautochronen* für eine nach dem *Newton*'schen Gesetze wirkende Schwerkraft, so erhält man leicht für die Gleichung dieser Curve:

$$\varphi = \int_k^r \sqrt{\left(\frac{\frac{2akT^2}{\pi^2} - r^4 + kr^3}{r^2 - kr}\right)} \frac{dr}{r^2};$$

wogegen sich die entsprechende *Brachistochrone* durch elliptische Functionen folgendermassen darstellen lässt:

$$\varphi = \int_k^r \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{k^3(a-r)}{r^3(a-k) - k^3(a-r)}}.$$

Es werde jetzt das analytisch interessante Problem gestellt, eine Curve *CDE* (Fig. 2) so zu bestimmen, dass ein materieller Punct unter dem Einflusse einer *constanten Schwerkraft* und eines *Luftwiderstandes*, welcher dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, auf ihr eine volle *Schwingungs-Amplitude* in einer von der Grösse der Amplitude unabhängigen Zeit macht.

Es sei D der tiefste Punct der Curve, AB die Richtung der Schwerkraft und die Axe der Abscisse x, welche von D nach B gezählt werden. Die *Bogen-Amplitude* CD sei eine willkürliche Grösse a, die *Bogen-Amplitude* ED sei gleich b, welche der materielle Punct in der zweiten Hälfte der Schwingungsdauer ansteigend zu durchlaufen hat.

Die Bewegungsgleichung des materiellen Punctes ist, wenn s einen von D nach C positiv gezählten Bogen bedeutet, und λ den Widerstandsfactor ausdrückt:

$$\frac{d^2s}{d\tau^2} + g\frac{dx}{ds} - \lambda\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{ds}{d\tau} = -\sqrt{2g}\,.\,e^{\lambda s}\sqrt{\left(\int_s^a e^{-2\lambda s}dx\right)}, \tag{9.}$$

oder es ist die Zeit des Falles bis zum tiefsten Puncte der Curve:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2g}}\cdot\int_0^a \frac{e^{-\lambda s}\,ds}{\sqrt{\left(\int_s^a e^{-2\lambda s}\,dx\right)}}\,. \tag{10.}$$

Die Geschwindigkeit in diesem Puncte ist

$$V = \sqrt{2g}\sqrt{\left(\int_0^a e^{-2\lambda s}dx\right)}. \tag{10a.}$$

Unter Berücksichtigung der symmetrischen Lage beider Curvenzweige zur Axe der x ergiebt sich für die Zeit des Ansteigens in der zweiten Hälfte der Schwingungsdauer:

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{2g}}\cdot\int_0^b \frac{e^{\lambda s}\,ds}{\sqrt{\left(\int_s^b e^{2\lambda s}\,dx\right)}} \tag{11.}$$

und für die Geschwindigkeit V, die in D nöthig ist, damit der materielle Punct eine Amplitude b erreicht:

$$(11^a.) \qquad V = \sqrt{2g}\sqrt{\left(\int_0^b e^{2\lambda s}\,dx\right)}.$$

Setzt man nun $T_1 + T_2$, die Zeit der vollen Schwingung, $= T$ und benutzt die vier letzten Gleichungen, so erhält man:

$$(12.) \qquad T\sqrt{2g} = \int_0^a \frac{e^{-\lambda s}\,ds}{\sqrt{\left(\int_s^a e^{-2\lambda s}\,dx\right)}} + \int_0^b \frac{e^{\lambda s}\,ds}{\sqrt{\left(\int_s^b e^{2\lambda s}\,dx\right)}} = \text{Const.}$$

$$(13.) \qquad \int_0^a e^{-2\lambda s}\,dx = \int_0^b e^{2\lambda s}\,dx.$$

Es sei jetzt:

$$(14.) \qquad \left.\begin{aligned} \int_0^s e^{-2\lambda s}\,dx &= f(s) \\ \int_0^s e^{2\lambda s}\,dx &= \psi(s) \end{aligned}\right\} \qquad \psi(\vartheta z) = f(z)\,,$$

so ergiebt sich aus **(13)**:

$$(14^a.) \qquad f(a) = \psi(b) \text{ oder } b = \vartheta a$$

und aus **(12)**:

$$(15.) \qquad T\sqrt{2g} = \int_0^a \frac{e^{-\lambda s}\,ds}{\sqrt{(fa - fs)}} + \int_0^b \frac{e^{\lambda s}\,ds}{\sqrt{(\psi b - \psi s)}}.$$

Setzt man in dem zweiten dieser Integrale

$$s = \vartheta(z)$$

und erwägt, dass für $s = 0$, $z = 0$, **(14)**

für $s = b$, $z = a$ wird, so geht die Gleichung **(15)** in:

$$T\sqrt{2g} = \int_0^a \frac{e^{-\lambda s}\,ds}{\sqrt{(fa - fs)}} + \int_0^a \frac{e^{\lambda \vartheta z}\,d\vartheta z}{\sqrt{(fa - fz)}} \text{ oder in:}$$

$$\lambda T\sqrt{2g} = \int_0^a \frac{d(e^{\lambda \vartheta z} - e^{-\lambda z})}{\sqrt{(fa - fz)}}$$

über. Damit in dieser Gleichung T von a unabhängig sei, ist Bedingung:

$$(16.) \qquad e^{\lambda\vartheta z} - e^{-\lambda z} = \frac{2}{\pi}\lambda T\sqrt{2g}\sqrt{f(z)}$$

nöthig, zu welcher aus (14):

$$(17.) \qquad dfz = e^{4\lambda\vartheta z}\, df\vartheta z$$

hinzukommt.

Setzt man den aus (16) erhaltenen Ausdruck von fz in (17), so folgt:

$$(18.) \qquad d.[e^{\lambda\vartheta z} - e^{-\lambda z}]^2 = e^{4\lambda\vartheta z}\, d.[e^{\lambda\vartheta\vartheta z} - e^{-\lambda\vartheta z}]^2.$$

Um in dieser Gleichung die von der Form des bewegten Körperchens abhängende Constante λ zu entfernen, sei:

$$(19.) \qquad \vartheta(z) = \frac{1}{\lambda}\varphi(\lambda z)\ .$$

Dann erhält man schliesslich folgendes System von Gleichungen, welche das Problem vollständig auflösen:

$$(A.) \qquad d.[e^{\varphi z} - e^{-z}]^2 = e^{4\varphi z}\, d.[e^{\varphi\varphi z} - e^{-\varphi z}]^2\ ,$$

$$(B.) \qquad f(s) = \frac{\pi^2}{8\lambda^2 g T^2}[e^{\varphi(\lambda s)} - e^{-\lambda s}]^2 = \int_0^s e^{-2\lambda s}\, dx\ .$$

Aus (B) würde, wenn die Function „φ" bekannt wäre, x direct in s und y durch s durch Quadratur bestimmt werden können. Mit Hülfe der Gleichung (A) ist man im Stande $\varphi(z)$ nach Potenzen von z bequem zu entwickeln. Die ersten Glieder der Entwicklung lauten:

$$\varphi(z) = z - \frac{4}{3}z^2 + \frac{16}{9}z^3 - \frac{64}{27}z^4 + \ldots\ ,$$

wo man für kleinere „λ", wie aus dem Argument λs in (B) zu sehen, bald abbrechen kann. Lässt man die fünften Potenzen von λ weg, so ist sehr nahe:

$$\varphi(z) = \frac{z}{1 + \frac{4}{3}z}\ ,$$

also nach (19):

$$\vartheta(z) = \frac{z}{1 + \frac{4}{3}\lambda z}\ ;$$

und da $\vartheta(a) = b$ ist, so findet man, dass die Bogen-Amplitude der Ansteigung b an die Amplitude des Falles a durch die Gleichung:

$$b = \frac{a}{1 + \frac{4}{3}\lambda a}$$

sehr nahe geknüpft ist. Setzt man den gefundenen Näherungswerth von $\varphi(z)$ in (B), so erhält man leicht die Gestalt der Curve.

Die Gestalt der Gleichung (A), so implicirt in ihr auch „φz" liegt, giebt sofort ein Integral, welches indessen bei dem gegenwärtigen Problem zu verwerfen ist, nämlich:

$$\varphi(z) = l.[e^{-z} + \text{Const.}].$$

Berlin, im März 1853.

20.

Beitrag zur Theorie der *n*fach unendlichen Θ Reihen.

(Von dem Herrn Dr. phil. *Meissel* zu Berlin.)

Die Abhandlung von *Goepel* „Transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis" im 35. Bande dieses Journals S. 277, in welcher derselbe auf die doppelt unendlichen Θ Reihen die Umkehrungen der *Abel*schen Integrale erster Ordnung zurückführt, veranlasste mich zu Untersuchungen über die *n* fach unendlichen Θ Reihen, deren Mittheilung ich mir vorbehalte. Inzwischen erlaube ich mir den Freunden derartiger Spekulationen eine Relation vorzulegen, zu welcher man auf dem gewöhnlichen Wege der Multiplication von zwei oder vier Θ Reihen nur mittelst einer sehr mühsamen Elimination gelangt. Dieselbe entspricht der Formel für einfache Θ Reihen:

$$\sqrt{K'}\Theta(iK'x\,,-q)=\sqrt{K}e^{\frac{x^2KK'}{\pi}}\Theta(Kx\,,-r)\,,$$

wo

$$q=e^{-\frac{\pi K'}{k}}\,,\quad r=e^{-\frac{\pi K}{k'}}\text{ ist.}$$

Um später nicht aufgehalten zu werden, setze ich die Reproduction der bekannten Transformation einer Form zweiten Grades mit *n* Variabelen in eine Summe von *n* Quadraten her.

Es sei:

$$f(x_1\,,x_2\,,\ldots.x_n)=f=\Sigma a_{s,k}x_sx_k\,,$$

wo $a_{s,k}=a_{k.s}$, und k, so wie s, alle Werthe von 1 bis n durchlaufen.

Durch Bildung der partiellen Differentialquotienten erhält man das System der *n* Gleichungen:

$$(1.) \qquad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right) = y_s = a_{s,1}x_1 + a_{s,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{s,n}x^n \,.$$

Die Determinante dieses Systems sei

$$(2.) \qquad \Sigma(\pm) a_{1.1}\, a_{2,2} \ldots\ldots a_{n.n} = D \,.$$

Ihre Bildung geschieht durch Vertauschung der Zeiger links, während die Zeiger rechts in der natürlichen Reihenfolge bleiben.

Aus dem System (1) stelle man sich nun die Grössen x durch die Grössen y mittels des folgenden Systems bestimmt vor:

$$(3.) \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_s}\right) = x_s = a'_{s,1}y_1 + a'_{s,2}y_2 + \ldots\ldots + a'_{s,n}y_n \,,$$

dessen Determinante

$$(4.) \qquad D' = \frac{1}{D} \text{ ist.}$$

Nach dem *Euler*'schen Satze von den homogenen Functionen lassen sich aus (1 und 3) die Formen „f" und „F" mittels der Gleichung

$$(5.) \quad x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots\ldots + x_ny_n = f(x_1\,,\, x_2\,,\, \ldots\ldots x_n) = F(y_1\,,\, y_2\,,\, \ldots\ldots y_n)$$

ableiten. Zwischen den Grössen a und a' findet folgendes System von Gleichungen Statt:

$$(6.) \qquad \begin{cases} a_{1,k}a'_{1,k} + a_{2,k}a'_{2,k} + \ldots\ldots + a_{n,k}a'_{n,k} = 1 \\ a_{1,s}a'_{1,k} + a_{2,s}a'_{2,k} + \ldots\ldots + a_{n,s}a'_{n,k} = 0 \end{cases}$$

wenn k von s verschieden sind.

Durch angemessene Wahl der Grössen „α" lässt sich durch das lineare System

$$(7.) \qquad x_s = \alpha^s_1 z_1 + \alpha^s_2 z_2 + \alpha^s_3 z_3 + \ldots\ldots + \alpha^s_n z_n$$

die Form „f" auf die Form:

$$(8.) \qquad f = \varphi(z_1\,,\, z_2\,,\, \ldots\ldots z_n) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots\ldots + z_n^2$$

reduciren. Um diese Reduction für die gegenwärtigen Zwecke zu umgehen, führe man folgendes System der n^2 Gleichungen ein:

$$(9.) \qquad a_m \, , \, \alpha'_k + a_{m,2}\alpha''_k + \ldots\ldots + a_{m,n}\alpha_k^N = \mathfrak{A}_k^M \, ,$$

wo m und k die Zahlen von **1** bis n durchlaufen.

Aus diesem System lässt sich, mit Berücksichtigung der sich umkehrenden Systeme (**1** und **3**) folgendes umgekehrte System ableiten:

$$(10.) \quad a'_{m,1}\mathfrak{A}'_k + a'_{m,2}\mathfrak{A}''_k + \ldots\ldots + a'_{m,n}\mathfrak{A}_k^N = \alpha_k^M \, .$$

Die in (1) definirten Grössen „y" hangen von den Grössen „z" mittels des Systems

$$(11.) \qquad y_s = \mathfrak{A}_1^s z_1 + \mathfrak{A}_2^s z_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{A}_n^s z_n$$

ab. Da nun nach (**5** und **8**)

$$f = F = \varphi$$

ist, so ergiebt sich, dass die Substitution des Systemes (**11**) in die Form „F" dieselbe in φ transformirt, so dass die Gleichung:

$$(12.) \qquad F = \Sigma a'_{s,k} y_s y_k = z_1^2 + z_2^2 + \ldots\ldots + z_n^2$$

Statt findet. Die Bedingungen der Transformation (**7** und **8**) liegen in dem System:

$$(13.) \quad \begin{cases} \alpha'_k \mathfrak{A}'_k + \alpha''_k \mathfrak{A}''_k + \ldots\ldots + \alpha_k^N \mathfrak{A}_k^N = \mathbf{1} \, , \\ \alpha'_s \mathfrak{A}'_k + \alpha''_s \mathfrak{A}''_k + \ldots\ldots + \alpha_s^N \mathfrak{A}_k^N = \mathbf{0} \;\; (k, s \text{ verschieden}). \end{cases}$$

Es sei nun die Determinante des linearen Systems (**7**):

$$(14.) \qquad \Sigma(\pm)\alpha'_1\alpha''_2 \ldots\ldots \alpha_n^N = \delta \, ,$$

und die des linearen Systems (**11**):

$$(15.) \qquad \Sigma(\pm)\mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}''_2 \ldots\ldots \mathfrak{A}_n^N = \Delta \, ,$$

wo in beiden sich die Versetzungen auf die unteren Zeiger erstrecken. Die Bestimmung von δ und Δ geschieht mit Hülfe des Fundamental-Satzes aus der Theorie der Determinanten, nemlich:

Wenn die Systeme

$$(I.) \qquad x_s = a_1^s z_1 + a_2^s z_2 + \ldots\ldots + a_n^s z_n$$

$$(II.) \qquad z_s = \beta_1^s u_1 + \beta_2^s u_2 + \ldots\ldots + \beta_n^s u_n$$

mit ihren Determinanten A und B gegeben sind und man durch Substitution von (II) in (I) das neue System

$$\text{(III.)} \qquad x_s = \gamma_1^s u_1 + \gamma_2^s u_2 + \ldots\ldots + \gamma_n^s u_n$$

mit der Determinante C herleitet, so ist:

$$C = A.B\,.$$

Wendet man diesen Satz auf die linearen Systeme

(1.) mit der Determinante D
(7.) „ „ „ δ
(11.) „ „ „ Δ

an, so ergiebt sich:

$$\text{(16.)} \qquad \Delta = D.\delta.$$

Kehrt man ferner die Systeme (7 und 11) um, so erhält man folgende beiden Systeme:

$$\text{(17.)} \qquad z_k = \alpha'_k y_1 + \alpha''_k y_2 + \ldots\ldots + \alpha_k^N y_n$$

$$\text{(18.)} \qquad z_k = \mathfrak{A}'_k x_1 + \mathfrak{A}''_k x_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{A}_k^N x_n\,.$$

Führt man nun das System (17) mit der Determinante δ in das System (7) mit der Determinante δ ein, so muss sich das System (3) mit der Determinante $D' = \frac{1}{D}$ (vermöge 4) ergeben. Daher ist:

$$\text{(16.)} \qquad \delta^2 = \frac{1}{D}\,, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{D}}\,, \quad \Delta = \sqrt{D}$$

oder:

$$\text{(19.)} \qquad \delta = \Sigma(\pm)\alpha'_1 \alpha''_n \ldots\ldots \alpha_n^N = \frac{1}{\sqrt{D}}\,,$$

$$\text{(20.)} \qquad \Delta = \Sigma(\pm)\mathfrak{A}'_1 \mathfrak{A}''_2 \ldots\ldots \mathfrak{A}_n^N = \sqrt{D}\,.$$

Man setze nun in die Gleichungen

$$f = F = \varphi \quad \text{(5 und 8)}$$

$$\text{(21.)} \qquad y_1 = a_{m,1}\ ;\ y_2 = a_{m,2}\ ;\ \ldots\ldots\ y_n = a_{m,n}\,,$$

so folgt aus (9 und 17):

(22.) $$z_k = \mathfrak{A}_k^M ;$$

ferner aus (18) dass

(23.) Alle x Null sind, mit Ausnahme von $x_m = 1$.

Benutzt man diese speciellen Werthe der Variabeln für die Gleichungen (11 und 7), so erhält man die Systeme:

(24.) $$y_s = a_{m,s} = \mathfrak{A}_1^s \mathfrak{A}_1^M + \mathfrak{A}_2^s \mathfrak{A}_2^M + \ldots\ldots + \mathfrak{A}_n^s \mathfrak{A}_n^M ,$$

(25.) $$\begin{cases} 1 = \alpha_1^M \mathfrak{A}_1^M + \alpha_2^M \mathfrak{A}_2^M + \ldots\ldots + \alpha_n^M \mathfrak{A}_n^M , \\ 0 = \alpha_1^s \mathfrak{A}_1^M + \alpha_2^s \mathfrak{A}_2^M + \ldots\ldots + \alpha_n^s \mathfrak{A}_n^M \quad (m , s \text{ verschieden}). \end{cases}$$

Macht man ferner

$$x_1 = a'_{m,1} \quad ; \quad x_2 = a'_{m,2} \quad ; \quad \ldots\ldots x_n = a'_{m,n} ,$$

so folgt aus (10 und 18):

$$z_k = \alpha_k^M .$$

Ferner folgt aus (17) dass:

Alle y Null sind, mit Ausnahme von $y_m = 1$.

Durch Einführung dieser Specialwerthe in (7) erhält man das neue System:

(26.) $$a'_{m,s} = \alpha_1^s \alpha_1^M + \alpha_2^s \alpha_2^M + \ldots\ldots + \alpha_n^s \alpha_n^M .$$

Diese Vorbereitungen reichen hin, um die angekündigte Relation abzuleiten. Es sei

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \Sigma a_{s,k} (m_s + \xi_s)(m_k + \xi_k)} = \Theta(\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots \xi_n)$$

eine n fach unendliche Summe, in welcher die äusseren n Summationen sich auf die n Buchstaben m_1, m_2, ... m_n von $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnen, die inneren zwei Summationen im Exponenten sich auf die beiden Grössen s, k zwischen den Grenzen 1 und n beziehen, und die Grössen „ξ" n Veränderliche bedeuten.

Man sieht sogleich aus den Periodicitäts-Verhältnissen der Function „Θ," welche sich nicht ändert, wenn die Argumente derselben „ξ" sich um ganze Zahlen ändern, dass sich ihr folgende Gestalt geben lässt:

(27.) $$\Theta = \sum_{-\infty}^{+\infty} V_{(m_1, m_1, \ldots m_n)} \cdot \cos 2\pi (m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + \cdots + m_n \xi_n)$$

wo V nicht von den Grössen „ξ," sondern nur von den summatorischen Buchstaben m und den Grössen a abhängig ist.

Man multiplicire nun die Gleichung (27) auf beiden Seiten mit

$$\cos 2\pi\,(m'_1\,\xi_1 + m'_2\,\xi_2 + \ldots\ldots + m'_n\,\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots\ldots d\xi_n$$

und dehne das $n$fache Integral rechts und links zwischen den Grenzen

$$0 \leqq \xi \leqq \tfrac{1}{2}$$

aus, so erhält man:

$$(28.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}} \Theta \cdot \cos 2\pi (m'_1\xi_1 + m'_2\xi_2 + \ldots\ldots + m'_n\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots\ldots d\xi_n$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} V_{(m_1, m_2, \ldots m_n)} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi (m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + \ldots + m_n\xi_n)$$
$$\times \cos 2\pi (m'_1\xi_1 + m'_2\xi_2 + \ldots + m'_n\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n .$$

Die Seite rechts dieser Gleichung reducirt sich auf:

$$\frac{1}{2^n} V_{(m'_1, m'_2, \ldots m'_n)} ,$$

daher wird:

$$(29.)\quad V_{(m'_1, m'_2, \ldots m'_n)} = 2^n \int_0^{\frac{1}{2}} \Theta \cos 2\pi (m'_1\xi_1 + m'_2\xi_2 + \ldots + m'_n\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n .$$

Setzt man hierin für „Θ" seinen Werth, so ergiebt sich:

$$V_{(m'_1, m'_2, \ldots m'_n)} = 2^n \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\pi \Sigma a_{k,s}(m_k+\xi_k)(m_s+\xi_s)} \cos 2\pi (m'_1\xi_1 + m'_2\xi_2 + \ldots + m'_n\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n .$$

Jetzt vertausche man die Veränderlichen „ξ" mittels des Substitutions-Systems:

$$\xi_k \infty \xi_k - {}^m k ,$$

so ändert sich der Cosinus unter dem Zeichen nicht und es folgt, wenn man die Summe von bestimmten Integralen in ein Integral zusammenzieht:

$$V_{(m'_1, m'_2, \ldots m'_n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \sum_1^n a_{k,s}\xi_k\xi_s} \cos 2\pi (m'_1\xi_1 + m'_2\xi_2 + \ldots + m'_n\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n$$

oder durch Weglassung der oberen Zeiger aller „m":

$$(30.)\quad V_{(m_1, m_2, \ldots m_n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \Sigma a_{k,s}\xi_k\xi_s} \cos 2\pi (m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + \ldots + m_n\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n .$$

Hieraus ist ersichtlich, dass wenn an der Stelle des Cosinus der Sinus unter dem Zeichen stände, das Integral Null werden müsste. Daraus ergiebt sich:

$$V_{(m_1,m_2,\ldots m_n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi[2im_1x_1+2im_2x_2+\ldots+2im_nx_n+\Sigma a_{k,s}x_kx_s]}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n .$$

In dieser Gleichung bediene man sich des Substitutions-Systems (7) nämlich:

$$x_s = \alpha_1^s z_1 + \alpha_2^s z_2 + \ldots\ldots + \alpha_n^s z_n ,$$

dessen Determinante:

$$(19.) \qquad \delta = \frac{1}{\sqrt{D}}$$

war, so geht dieselbe in:

$$V_{(m_1,m_2,\ldots m_n)} = \frac{1}{\sqrt{D}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi[z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2+2i\Sigma z_s(m_1\alpha'_s+m_2\alpha''_s+\ldots+m_n\alpha_s^N)]}\,dz_1\,dz_2\ldots dz_n$$

über oder nach erfolgter Factorenzerfällung der Seite rechts in

$$V_{(m_1,m_2,\ldots m_n)} = \frac{1}{\sqrt{D}} \prod_{s=1}^{s=n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi[z_s^2+2iz_s(m_1\alpha_s'+m_2\alpha_s''+\ldots+m_n\alpha_s^N)]}\,dz_s$$

d. h. in

$$(31.) \qquad V_{(m_1,m_2,\ldots m_n)} = \frac{1}{\sqrt{D}}\, e^{-\pi\Sigma[m_1\alpha_s'+m_2\alpha_s''+\ldots+m_n\alpha_s^N]^2}.$$

Man setze jetzt in (17)

$$y_s = m_s ,$$

woraus sich:

$$z_s = \alpha'_s m_1 + \alpha''_s m_2 + \ldots\ldots + \alpha_s^N m_n$$

ergiebt. Beide Systeme führe man in die Gleichungen (5 und 8) ein, so erhält man

$$F(m_1 , m_2 , \ldots . m_n) = \Sigma a'_{s,k} m_s m_k = \Sigma[m_1\alpha'_s + m_2\alpha''_s + \ldots . + m_n\alpha_s^N]^2.$$

Benutzt man diese Gleichung für (31), so erhält man:

$$(32.) \qquad V_{(m_1,m_2,\ldots m_n)} = \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot e^{-\pi\Sigma a'_{s,k} m_s m_k} .$$

Als Neben-Product erhält man durch Vergleichung von (1, 2, 3, 30 und 32) folgende Regel:

Um das n fache bestimmte Integral:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \sum_1^n a_{k,s} x_k x_s} \cos 2\pi [m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n] \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

anzugeben, setze man:

$$f = \sum_1^n a_{k,s} x_k x_s$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right) = y_s = a_{s,1} x_1 + a_{s,2} x_2 + \ldots + a_{s,n} x_n$$

und kehre letzteres System, dessen Determinante $= D$ sein mag, mittels des Systems:

$$x_s = \alpha'_{s,1} y_1 + \alpha'_{s,2} y_2 + \ldots + \alpha'_{s,n} y_n$$

um, so ergiebt sich stets

$$V = \frac{1}{\sqrt{D}} e^{-\pi \sum_1^n a'_{s,k} m_s m_k} .$$

Führt man die Gleichung **(32)** in **(27)** ein, so erhält man:

$$(33.) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \sum_1^n a_{s,k} (m_k + \xi_k)(m_s + \xi_s)} = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \sum_1^n a'_{k,s} m_k m_s} \cos 2\pi (m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + \ldots + m_n \xi_n):$$

eine Gleichung, durch welche die Verwandlung aller imaginären „ξ" in reelle erfolgt.

Ich bemerke hierbei, *dass auf demselben Wege, mit Hülfe von partialen Eliminationen und partialen Determinanten, eine Verwandlung beliebig vieler imaginärer „ξ" in reelle ausgeführt werden kann.*

Macht man in **(33)** alle „ξ" gleich Null, so erhält man, da $DD' = 1$ ist, die Gleichung

$$(34.) \quad \sqrt[4]{D} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \sum_1^n a_{k,s} m_k m_s} = \sqrt[4]{D'} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \sum_1^n a'_{k,s} m_k m_s} .$$

Hier hangt D eben so von den Grössen a ab, wie D' von den Grössen a'. Schliesslich ist klar, dass man durch zweimalige Anwendung von **(34)** wieder auf die Seite links zurückkommt.

Berlin, den 8. Oktober 1853.

21.

Multiplications-Formeln für die elliptischen Functionen mit complexen Vielfachen des Argu-guments und dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

(Von Herrn Dr. *H. Hoffmann* in Danzig.)

Das erneute Interesse, welches die *Lemniscatentheilung* durch den Aufsatz des Herrn Dr. *Eisenstein:* „Ueber die Irreductibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Theilung der ganzen Lemniscate abhängt" (Cr. Journ. XXXIX) gewonnen hat, wird der folgenden Betrachtung, welche sich mit der Bildung dieser Gleichung beschäftigt, vielleicht einige Aufmerksamkeit zuwenden.

Stellt man die elliptischen Functionen von amnu mittels der *Euler*'schen Fundamentalformeln auf, indem man $n = n_1 + n_2$ setzt, so ist es nicht gleichgültig, was man für n_1 und n_2 setzt, weil von dieser Wahl der Grad eines dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Factors abhängt, dessen Wegschaffung durch die gewöhnlichen Methoden weitläufige Rechnungen erfordert. Für ein reelles n hat *Abel* (Cr. Journ. IV, pag. 258, Gl. 45 und 46) gezeigt, dass dieser gemeinschaftliche Factor ganz vermieden werden kann, wenn man für ein *gerades* n, $n_1 - n_2 = 0$, für ein *ungerades* n, $n_1 - n_2 = 1$ setzt.

Im Folgenden soll der Fall betrachtet werden, wenn n eine Zahl von der Form $a + bi$ und $\sqrt{\frac{1}{2}}$ der Modul der elliptischen Function ist. Es zeigt sich, dass die *Abel*'sche Regel im Allgemeinen auch auf die Zusammensetzung von $a + bi$ aus $a_1 + b_1 i$ und $a_2 + b_2 i$ Anwendung findet. Bloss wenn a und b *ungerade* sind, muss man, zur Vermeidung eines gemeinschaftlichen Factors, einen andern Weg einschlagen. Das Verfahren bei der Untersuchung lehrt gleichzeitig, von welchem Grade Zähler und Nenner der elliptischen Functionen von am$(a+bi)u$ mod $\sqrt{\frac{1}{2}}$ sein müssen.

Als *Beispiel* wird schliesslich der Werth von $\cos\mathrm{am}(u+i)u$ und $\cos\mathrm{am}(1+ui)u \bmod \sqrt{\frac{1}{2}}$ aufgestellt werden.

§. 1.

Es sei

$$\sin\mathrm{am}\,u = x \qquad \cos\mathrm{am}\,u = x' \qquad \Delta\mathrm{am}\,u = x''.$$

Man setze als einfachste Formen für die elliptischen Functionen gleichsam als Normalformen:

1) wenn *a gerade, b gerade* ist:

$$\sin\mathrm{am}(a+bi)u = x\,x'\,x''\frac{S_{n-u}}{N_n},\ \cos\mathrm{am}(a+bi)u = \frac{C_n}{N_n},\ \Delta\mathrm{am}(a+bi)u = \frac{\Delta_n}{N_n};$$

2) wenn *a gerade, b ungerade* ist:

$$\sin\mathrm{am}(a+bi)n = \frac{x}{x_1}\cdot\frac{S_{n-1}}{N_{n-1}},\ \cos\mathrm{am}(a+bi)u = \frac{1}{x_1}\cdot\frac{C_{n-1}}{N_{n-1}},\ \Delta\mathrm{am}(a+bi)u = \frac{x''}{x'}\cdot\frac{\Delta_{n-1}}{N_{n-1}};$$

3) wenn *a ungerade, b gerade* ist:

$$\sin\mathrm{am}(a+bi)u = x\frac{S_{n-1}}{N_{n-1}},\ \cos\mathrm{am}(a+bi)u = x'\frac{C_{n-1}}{N_{n-1}},\ \Delta\mathrm{am}(a+bi)u = x''\frac{\Delta_{n-1}}{N_{n-1}};$$

4) wenn *a ungerade, b ungerade* ist:

$$\sin\mathrm{am}(a+bi)u = x\,x''\frac{S_{n-2}}{N_n},\ \cos\mathrm{am}(a+bi)u = \frac{C_n}{N_n},\ \Delta\mathrm{am}(a+bi)u = x'\frac{\Delta_{n-2}}{N_n};$$

wo $n = a^2 + b^2$ und S, C, Δ, N ganze rationale Functionen der Grössen x, x', x'' von dem Grade des beigefügten Index sind.

Stellt man sich die Functionen von $\mathrm{am}(a+bi)u$ mittels der Additionsformeln aus den Functionen von $\mathrm{am}\,au$ und $\mathrm{am}\,bui$ zusammengesetzt vor, und nimmt als bewiesen an, dass Zähler und Nenner dieser Functionen, wie es wirklich der Fall ist, mit Ausschluss der Factoren x, x', x'' und deren Producte, nur die geraden Potenzen der Grössen x, x', x'' enthalten, so folgt das Gleiche auch für die Grössen S, C, Δ, N. Es soll jedoch statt diesen Beweis aufzusuchen, auf directem Wege gezeigt werden, dass dies der Fall ist.

Der obigen Bezeichnung gemäss ist nämlich:

$$\sin\mathrm{am}(-u) = -x \qquad \cos\mathrm{am}(-u) = x' \qquad \Delta\mathrm{am}(-u) = x''$$

$$\sin\mathrm{am}(u+2K) = -x \qquad \cos\mathrm{am}(u+2K) = -x' \qquad \Delta\mathrm{am}(u+2K) = x''$$

$$\sin\mathrm{am}(u+2Ki) = x \qquad \cos\mathrm{am}(u+2Ki) = -x' \qquad \Delta\mathrm{am}(u+2Ki) = -x''$$

Erwägt man nun, dass

$$\sin\mathrm{am}(-a-bi)u = -\sin\mathrm{am}(a+bi)u \qquad \cos\mathrm{am}(-a-bi)u = \cos\mathrm{am}(a+bi)u$$

$$\sin\mathrm{am}(a+bi)(u+2K) = (-1)^a \sin\mathrm{am}(a+bi)u$$

$$\cos\mathrm{am}(a+bi)(u+2K) = (-1)^{a+b} \cos\mathrm{am}(a+bi)u$$

$$\sin\mathrm{am}(a+bi)(u+2Ki) = (-1)^b \sin\mathrm{am}(a+bi)u$$

$$\cos\mathrm{am}(a+bi)(u+2Ki) = (-1)^{a+b} \cos\mathrm{am}(a+bi)u$$

$$\Delta\mathrm{am}(-a-bi)u = \Delta\mathrm{am}(a+bi)u$$

$$\Delta\mathrm{am}(a+bi)(u+2K) = (-1)^b \Delta\mathrm{am}(a+bi)u$$

$$\Delta\mathrm{am}(a+bi)(u+2Ki) = (-1)^a \Delta\mathrm{am}(a+bi)u$$

und substituirt der Reihe nach $-u$, $u+2K$, $u+2Ki$ statt u in die Normalformen, so zeigt sich, dass in allen für a und b angenommenen vier Fällen die Normalformen ungeändert bleiben. Es müssen demnach Zähler und Nenner der Brüche $\frac{S}{N}$, $\frac{C}{N}$, $\frac{\Delta}{N}$ ihren absoluten Werth behalten und ihr Zeichen gar nicht oder gleichzeitig gewechselt haben. Setzt man nun:

$$S = S^{I} + xS^{II} + x^{I}S^{III} + x^{II}S^{IV} + xx^{I}S^{V} + xx^{II}S^{VI} + x^{I}x^{II}S^{VII} + xx^{I}x^{II}S^{VIII}$$

$$N = N^{I} + xN^{II} + x^{I}N^{III} + x^{II}N^{IV} + xx^{I}N^{V} + xx^{II}N^{VI} + x^{I}x^{II}N^{VII} + xx^{I}x^{II}N^{VIII}$$

wo $S^{I}, S^{II}, \ldots S^{VIII}$ und $N^{I}, N^{II}, \ldots N^{VIII}$ nur die geraden Potenzen von x, x^{I}, x^{II} enthalten, so ist es einleuchtend, dass bei der Substitution von $-u$ statt u der absolute Werth von S und N nur dann ungeändert bleibt, wenn $S^{II} = S^{V} = S^{VI} = S^{VIII} = 0$ und $N^{II} = N^{V} = N^{VI} = N^{VIII} = 0$ ist. Aus der Substitution von $u+2K$ statt u folgt dann, dass $S^{III} = S^{VII} = 0$ und $N^{III} = N^{VII} = 0$ sein muss. Die Substitution von $u+2Ki$ statt u endlich zeigt, dass auch S^{IV} und N^{IV} gleich 0 sein müssen. Man hat also nur

$$S = S^{I} \qquad \text{und} \qquad N = N^{I}.$$

Ebenso wird bewiesen, dass C und Δ nur von der Form

$$C = C' \qquad \text{und} \qquad \Delta = \Delta'$$

sein können, dass also auch sie nur die geraden Potenzen von x, x', x'' enthalten können.

§. 2.

Setzt man für a und b in die Normalformen kleine Zahlenwerthe, so lässt sich ihre Uebereinstimmung mit den in diesen Fällen leicht zu entwickelnden Ausdrücken zeigen.

Für $a = 2$, $b = 0$ oder für $a = 0$, $b = 2$ erhält man aus den Normalformeln:

$$\left.\begin{matrix}\sin\mathrm{am}\,2u\\ \sin\mathrm{am}\,2ui\end{matrix}\right\} = xx'x''\frac{S_0}{N_4}\,, \qquad \left.\begin{matrix}\cos\mathrm{am}\,2u\\ \cos\mathrm{am}\,2ui\end{matrix}\right\} = \frac{C^4}{N_4}\,, \qquad \left.\begin{matrix}\Delta\mathrm{am}\,2u\\ \Delta\mathrm{am}\,2ui\end{matrix}\right\} = \frac{\Delta_4}{N_4}\,,$$

welche die Ausdrücke:

$$\sin\mathrm{am}\,2u = \frac{4xx'x''}{1+2x'^2-x'^4}\,, \quad \cos\mathrm{am}\,2u = \frac{x'^4+2x'^2-1}{1+2x'^2-x'^4}\,, \quad \Delta\mathrm{am}\,2u = \frac{1+x'^4}{1+2x'^2-x'^4}\,,$$

$$\sin\mathrm{am}\,2ui = \frac{4xx'x''i}{x'^4+2x'^2-1}\,, \quad \cos\mathrm{am}\,2ui = \frac{1+2x'^2-x'^4}{x'^4+2x'^2-1}\,, \quad \Delta\mathrm{am}\,2u = \frac{x'^4+1}{x'^4+2x'^4-1}$$

darstellen. Setzt man $a = 0$, $b = 1$, so ist:

$$\sin\mathrm{am}\,iu = \frac{x}{x'}\cdot\frac{S_0}{N_0}\,, \quad \cos\mathrm{am}\,iu = \frac{1}{x'}\cdot\frac{C_0}{N_0}\,, \quad \Delta\mathrm{am}\,iu = \frac{x''}{x'}\cdot\frac{\Delta_0}{N_0}$$

und nimmt man $S_0 = iN_0 = iC_0 = i\Delta_0$, so erhält man die bekannten Formeln für die Functionen von imaginairen Argumenten:

$$\sin\mathrm{am}\,iu = i\frac{x}{x'}\,, \quad \cos\mathrm{am}\,iu = \frac{1}{x'}\,, \quad \Delta\mathrm{am}\,iu = \frac{x''}{x'}\,.$$

Für $a = 1$, $b = 0$ geben die Normalformen:

$$\sin\mathrm{am}\,u = x\frac{S_0}{N_0}\,, \quad \cos\mathrm{am}\,u = x'\frac{C_0}{N_0}\,, \quad \Delta\mathrm{am}\,u = x''\frac{\Delta_0}{N_0}\,,$$

in welchen also $S_0 = N_0 = C_0 = \Delta_0$ zu setzen ist, um identische Gleichungen zu erlangen.

Endlich sind noch die drei letzten Normalformen zu prüfen, indem man $a = 1$ und $b = 1$ annimmt. Man erhält dann:

$$\sin\mathrm{am}(1+i)u = xx''\frac{S_0}{N_2}, \quad \cos\mathrm{am}(1+i)u = \frac{C_2}{N_2}, \quad \Delta\,\mathrm{am}(1+i)u = x'\frac{\Delta_0}{N_2}.$$

Bildet man diese Functionen durch Zusammensetzung aus den Functionen von u und iu, so erhält man allerdings:

$$\sin\mathrm{am}(1+i)u = xx''\frac{2(1+ix'^2)}{1+x'^4}, \quad \cos\mathrm{am}(1+i)u = \frac{(x'^2-i)(1+ix'^2)}{1+x'^4},$$

$$\Delta\,\mathrm{am}(1+i)u = x'\frac{(1-i)(1+ix'^2)}{1+x'^4}.$$

Da sie aber im Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor $1+ix'^2$ haben und daher wie folgt geschrieben werden können:

$$\sin\mathrm{am}(1+i)u = \frac{2xx''}{1-ix'^2}, \quad \cos\mathrm{am}(1+i)u = \frac{x'^2-i}{1-ix'^2}, \quad \Delta\mathrm{am}(1+i)u = x'\frac{1-i}{1-ix'^2},$$

so nehmen auch sie eine der Normalformen entsprechende Gestalt an.

Zugleich sieht man, dass in diesen Fällen kein gemeinschaftlicher Factor im Zähler und Nenner vorhanden ist, durch welchen der Grad dieser Grössen verkleinert werden könnte; sodass also hier die Normalformen die elliptischen Functionen in ihrer einfachsten Gestalt darstellen.

§. 3.

Mittels der Functionen von kleineren $a+bi$ lassen sich die Functionen mit grösserem $a+bi$ immer so bilden, dass auch sie den Grad der Normalformen bekommen.

Um dies zu beweisen sei:

1) *a gerade, b gerade.* Man nehme a_1+b_1i und a_2+b_2i so, dass $a_1+a_2=a$, $b_1+b_2=b$. Dann können 4 Fälle Statt finden:

1.) a_1 gerade, b_1 gerade, a_2 gerade, b_2 gerade.

2.) a_1 gerade, b_1 ungerade, a_2 gerade, b_2 ungerade.

3.) a_1 ungerade, b_1 gerade, a_2 ungerade, b_2 gerade.

4.) a_1 ungerade, b_1 ungerade, a_2 ungerade, b_2 ungerade.

Es können daher auch für jede der elliptischen Functionen vier Ausdrücke gebildet werden; nämlich:

für $\sin\mathrm{am}(a+bi)u$

$$x\,x'x''\frac{S_{n_1\text{-}4}N_{n_1}C_{n_2}\Delta_{n_2}+S_{n_2\text{-}4}N_{n_2}C_{n_1}\Delta_{n_1}}{N_{n_1}^2N_{n_2}^2-\frac{1}{2}x^4x'^4x''^4S_{n_1\text{-}4}^2S_{n_2\text{-}4}^2},$$

$$x\,x'x''\frac{S_{n_1\text{-}1}N_{n_1\text{-}1}C_{n_2\text{-}1}\Delta_{n_2\text{-}1}+S_{n_2\text{-}1}N_{n_2\text{-}1}C_{n_1\text{-}1}\Delta_{n_1\text{-}1}}{x'^4N_{n_1\text{-}1}^2N_{n_2\text{-}1}^2-\frac{1}{2}x^4S_{n_1\text{-}1}^2S_{n_2\text{-}1}^2},$$

$$x\,x'x''\frac{S_{n_2\text{-}1}N_{n_1\text{-}1}C_{n_2\text{-}1}\Delta_{n_2\text{-}1}+S_{n_2\text{-}1}N_{n_2\text{-}1}C_{n_1\text{-}1}\Delta_{n_1\text{-}1}}{N_{n_1\text{-}1}^2N_{n_2\text{-}1}^2-\frac{1}{2}x^4S_{n_1\text{-}1}^2S_{n_2\text{-}1}^2},$$

$$x\,x'x''\frac{S_{n_1\text{-}2}N_{n_1}C_{n_2}\Delta_{n_2\text{-}2}+S_{n_2\text{-}2}N_{n_2}C_{n_1}\Delta_{n_1\text{-}2}}{N_{n_1}^2N_{n_2}^2-\frac{1}{2}x^4x''^4S_{n_1\text{-}2}^2S_{n_2\text{-}2}^2},$$

für $\cos\mathrm{am}(a+bi)u$

$$\frac{C_{n_1}N_{n_1}C_{n_2}N_{n_2}-x^2x'^2x''^2S_{n_1\text{-}4}\Delta_{n_1}S_{n_2\text{-}4}\Delta_{n_2}}{N_{n_1}^2N_{n_2}^2-\frac{1}{2}x^4x'^4x''^4S_{n_1\text{-}4}^2S_{n_2\text{-}4}^2},$$

$$\frac{x'^2C_{n_1\text{-}1}N_{n_1\text{-}1}C_{n_2\text{-}1}N_{n_2\text{-}1}-x^2x''^2S_{n_1\text{-}1}\Delta_{n_1\text{-}1}S_{n_2\text{-}1}\Delta_{n_2\text{-}1}}{x'^4N_{n_1\text{-}1}^2N_{n_2\text{-}1}^2-\frac{1}{2}x^4S_{n_1\text{-}1}^2S_{n_2\text{-}1}^2},$$

$$\frac{x'^2C_{n_1\text{-}1}N_{n_1\text{-}1}C_{n_2\text{-}1}N_{n_2\text{-}1}-x^2x''^2S_{n_1\text{-}1}\Delta_{n_1\text{-}1}S_{n_2\text{-}1}\Delta_{n_2\text{-}1}}{N_{n_1\text{-}1}^2N_{n_2\text{-}1}^2-\frac{1}{2}x^4S_{n_1\text{-}1}^2S_{n_2\text{-}1}^2},$$

$$\frac{C_{n_1}N_{n_1}C_{n_2}N_{n_2}-x^2x'^2x''^2S_{n_1\text{-}2}\Delta_{n_1\text{-}2}S_{n_2\text{-}2}\Delta_{n_2\text{-}2}}{N_{n_1}^2N_{n_2}^2-\frac{1}{2}x^4x''^4S_{n_1\text{-}2}^2S_{n_2\text{-}2}^2},$$

für $\Delta\mathrm{am}(a+bi)u$

$$\frac{\Delta_{n_1}N_{n_1}\Delta_{n_2}N_{n_2}-\frac{1}{2}x^2x'^2x''^2S_{n_1\text{-}4}C_{n_1}S_{n_2\text{-}4}C_{n_2}}{N_{n_1}^2N_{n_2}^2-\frac{1}{2}x^4x'^4x''^4S_{n_1\text{-}4}^2S_{n_2\text{-}4}^2},$$

$$\frac{x'^2x''^2\Delta_{n_1\text{-}1}N_{n_1\text{-}1}\Delta_{n_2\text{-}1}N_{n_2\text{-}1}-\frac{1}{2}x^2S_{n_1\text{-}1}C_{n_1\text{-}1}S_{n_2\text{-}1}C_{n_2\text{-}1}}{x'^4N_{n_1\text{-}1}^2N_{n^2\text{-}1}^2-\frac{1}{2}x^4S_{n_1\text{-}1}^2S_{n_2\text{-}1}^2},$$

$$\frac{x''^2\Delta_{n_1\text{-}1}N_{n_1\text{-}1}\Delta_{n_2\text{-}1}N_{n_2\text{-}1}-\frac{1}{2}x^2x'^2S_{n_1\text{-}1}C_{n_1\text{-}1}S_{n_1\text{-}1}}{N_{n_1\text{-}1}^2N_{n_2\text{-}1}^2-\frac{1}{2}x^4S_{n_1\text{-}1}^2S_{n_2\text{-}1}^2},$$

$$\frac{x'^2\Delta_{n_1\text{-}2}N_{n_1}\Delta_{n_2\text{-}1}N_{n_2}-\frac{1}{2}x^2x''^2S_{n_1\text{-}2}C_{n_1}S_{n_2\text{-}2}C_{n_2}}{N_{n_1}^2N_{n_2}^2-\frac{1}{2}x^4x''^4S_{n_1\text{-}2}^2S_{n_2\text{-}2}^2},$$

wo $n_1=a_1^2+b_1^2$, $n_2=a_2^2+b_2^2$ gesetzt ist.

Damit diese Ausdrücke die Normalformen annehmen, muss die Bedingungsgleichung

$$2n_1 + 2n_2 = n$$

erfüllt werden, deren Bedeutung ersichtlich wird, wenn man sie mittels der beiden Gleichungen:

$$a_1 + a_2 = a \quad , \quad b_1 + b_2 = b$$

vereinfacht. Subtrahirt man nämlich die Quadratsumme dieser beiden Gleichungen von der vorhergehenden, so erhält man:

$$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 0 \, ,$$

die nur durch:

$$(a_1 - a_2)^2 = 0 \quad , \quad (b_1 - b_2)^2 = 0$$

erfüllt werden kann.

2) Es sei *a gerade, b ungerade.* Hier werden zwei Zusammensetzungs-Arten möglich sein, nämlich:

1.) a_1 gerade, b_1 gerade,	2) a_1 ungerade, b_1 gerade,
a_2 gerade, b_2 ungerade,	a_2 ungerade, b_2 ungerade.

Demnach ergeben sich folgende beiden Ausdrücke:

für $\sin\mathrm{am}(a+bi)u$

$$\frac{x}{x'} \cdot \frac{x''^2 S_{n_1-4} N_{n_1} C_{n_2-1} \Delta_{n_2-1} + S_{n_2-1} N_{n_2-1} C_{n_1} \Delta_{n_1}}{N_{n_1}^2 N_{n_2-1}^2 - \frac{1}{2} x^4 x''^2 S_{n_1-4}^2 S_{n_2-1}^2} \, ,$$

$$\frac{x}{x'} \cdot \frac{S_{n_1-1} N_{n_1-1} C_{n_2} \Delta_{n_2-2} + x''^2 S_{n_2-2} N_{n_2} C_{n_1-1} \Delta_{n_1-1}}{\frac{1}{x'^2} \cdot \left(N_{n_1-1}^2 N_{n_2}^2 - \frac{1}{2} x^4 x''^2 S_{n_1-1}^2 S_{n_2-2}^2\right)} \, ,$$

für $\cos\mathrm{am}(a+bi)u$

$$\frac{1}{x'} \cdot \frac{C_{n_1} N_{n_1} C_{n_2-1} N_{n_2-1} - x^2 x''^2 S_{n_1-4} \Delta_{n_1} S_{n_2-1} \Delta_{n_2-1}}{N_{n_1}^2 N_{n_2-1}^2 - \frac{1}{2} x^4 x''^2 S_{n_1-4}^2 S_{n_2-1}^2} \, ,$$

$$\frac{1}{x'} \cdot \frac{C_{n_1-1} N_{n_1-1} C_{n_2} N_{n_2} - x^2 x''^2 S_{n_1-1} \Delta_{n_1-1} S_{n_2-2} \Delta_{n_2-2}}{\frac{1}{x'} \cdot \left(N_{n_1-1}^2 N_{n_2}^2 - \frac{1}{2} x^4 x''^2 S_{n_1-1}^2 S_{n_2-2}^2\right)} \, ,$$

für $\Delta \operatorname{am}(a+bi)u$

$$\frac{x''}{x'} \cdot \frac{\Delta_{n_1} N_{n_1} \Delta_{n_2-1} N_{n_2-1} - \frac{1}{2} x^2 S_{n_1-4} C_{n_1} S_{n_2-1} C_{n_2-1}}{N^2_{n_1} N^2_{n_2-1} - \frac{1}{2} x^4 x''^2 S^2_{n_1-4} S^2_{n_2-1}},$$

$$\frac{x''}{x'} \cdot \frac{\Delta_{n_1-1} N_{n_1-1} \Delta_{n_2-2} N_{n_2} - \frac{1}{2} x^2 S_{n_1-1} C_{n_1-1} S_{n_2-2} C_{n_2}}{\frac{1}{x'^2} \cdot \left(N^2_{n_1-1} N^2_{n_2} - \frac{1}{2} x^4 x''^2 S^2_{n_1-1} S^2_{n_2-2}\right)}.$$

Sowohl Zähler als Nenner geben hier durch Vergleichung mit den Normalformen:

$$2n_1 + 2n_2 = n + 1 ;$$

woraus, wie vorher,

$$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 1$$

oder

$$(a_1 - a_2)^2 = 0 \quad , \quad (b_1 - b_2)^2 = 1$$

folgt. Allein es ist hier noch nachzuweisen, dass der Nenner

$$\frac{1}{x'^2}\left(N^2_{n_1} N^2_{n_2} - \frac{1}{2} x^4 x''^3 S^2_{n_1-1} S^2_{n_2-2}\right)$$

eine ganze Function ist. Zu dem Ende lässt sich zeigen, dass bei der Entwickelung der Grösse in der Parenthese das constante Glied verschwindet.

Da nämlich die Functionen S, N, C, Δ nur die geraden Potenzen von x, x', x'' enthalten, so kann man sie als rationale Functionen von x'^2 betrachten. Bezeichnet man die constanten Glieder dieser Function durch $s, \varepsilon, c, \delta$, und führt sie in die beiden Gleichungen:

$$\sin^2 \operatorname{am}(a_1 + b_1 i)u + \cos^2 \operatorname{am}(a_1 + b_1 i)u = 1 ,$$

$$\tfrac{1}{2} \sin^2 \operatorname{am}(a_2 + b_2 i)u + \Delta^2 \operatorname{am}(a_2 + b_2 i)u = 1$$

ein, so erhält man, da $x^2 = 1 - x'^2$, $x''^2 = \frac{1}{2}(1 + x'^2)$ ist:

$$(1 - x'^2)(s_1 + \ldots.)^2 + x'^2(c_1 + \ldots.)^2 = (\varepsilon_1 + \ldots.)^2 ,$$

$$\tfrac{1}{4}(1 - x'^4)(s_2 + \ldots.)^2 + x'^2(\delta_1 + \ldots.)^2 = (\varepsilon_2 + \ldots.)^2 .$$

Da diese Gleichungen für jedes beliebige x', also auch für $x' = 0$ gelten, so ergiebt sich aus denselben:

$$s_1^2 = \varepsilon_1^2 \quad , \quad \tfrac{1}{4} s_2^2 = \varepsilon_2^2$$

und als Product dieser Relationen:

$$\tfrac{1}{4}s_1^2 s_2^2 = c_1^2 c_2^2 .$$

Entwickelt man nun auch die Grösse in der Parenthese nach x', so erhält man:

$$(c_1 + \ldots.)^2 (c_2 + \ldots.)^2 - \tfrac{1}{4}(1 - x'^2)^2 (1 + x'^2)(s_1 + \ldots.)^2 (s_2 + \ldots.)^2 ,$$

woraus sich, als constantes Glied,

$$c_1^2 c_2^2 - \tfrac{1}{4}s_1^2 s_2^2$$

ergiebt, welches gemäss der soeben gefundenen Relation gleich Null ist. Demnach ist die Grösse in der Parenthese durch x'^2 theilbar und der Nenner

$$\frac{1}{x'^2}(N_{n_1-1}^2 N_{n_2}^2 - \tfrac{1}{2}x^4 x''^2 S_{n_1-1}^2 S_{n_2-2}^2)$$

eine ganze Function.

3) Es sei ferner *a ungerade, b gerade.* Die Zusammensetzung kann dann auf zwei Arten geschehen:

1.) a_1 gerade, b_1 gerade, a_2 ungerade, b_2 gerade,

2.) a_1 gerade, b_1 ungerade, a_2 ungerade, b_2 ungerade,

und hieraus ergeben sich wieder je zwei Ausdrücke, nämlich:

für $\operatorname{sin am}(a + bi)u$

$$x \cdot \frac{x'^2 x''^2 S_{n_1-4} N_{n_1} C_{n_2-1} \Delta_{n_2-1} + S_{n_2-1} N_{n_2-1} C_{n_2} \Delta_{n_2}}{N_{n_1}^2 N_{n_2-1}^2 - \tfrac{1}{2}x^4 x'^2 x''^2 S_{n_1-4}^2 S_{n_2-1}^2} ,$$

$$x \cdot \frac{x'^2 S_{n_1-1} N_{n_1-1} C_{n_2} \Delta_{n_2-2} + x''^2 S_{n_2-2} N_{n_2} C_{n_1-1} \Delta_{n_1-1}}{x'^2 N_{n_1-1}^2 N_{n_2}^2 - \tfrac{1}{2}x^4 x''^2 S_{n_1-1}^2 S_{n_2-2}^2} ,$$

für $\operatorname{cos am}(a + bi)u$

$$x' \cdot \frac{C_{n_1} N_{n_1} C_{n_2-1} N_{n_2-1} - x^2 x''^2 S_{n_1-4} \Delta_{n_1} S_{n_2-1} \Delta_{n_2-1}}{N_{n_1}^2 N_{n_2-1}^2 - \tfrac{1}{2}x^4 x'^2 x''^2 S_{n_1-4}^2 S_{n_2-1}^2} ,$$

$$x' \cdot \frac{C_{n_1-1} N_{n_1-1} C_{n_2} N_{n_2} - x^2 x''^2 S_{n_1-1} \Delta_{n_1-1} S_{n_2-2} \Delta_{n_2-2}}{x'^2 N_{n_1-1}^2 N_{n_2}^2 - \tfrac{1}{2}x^4 x''^2 S_{n_1-1}^2 S_{n_2-2}^2} ,$$

für $\Delta \operatorname{am}(a+bi)u$:

$$x''.\frac{\Delta_{n_1} N_{n_1} \Delta_{n_2-1} N_{n_2-1} - \frac{1}{2}x^2 x'^2 S_{n_1-4} C_{n_1} S_{n_2-1} C_{n_2-1}}{N_{n_1}^2 N_{n_2-2} - \frac{1}{2}x^4 x'^2 x''^2 S_{n_1-4}^2 S_{n_2-1}^2},$$

$$x''.\frac{x'^2 \Delta_{n_1-1} N_{n_1-1} \Delta_{n_2-2} N_{n_2} - \frac{1}{2}x^2 S_{n_1-1} C_{n_1-1} S_{n_2-2} C_{n_2}}{x'^2 N_{n_1-1}^2 N_{n_2}^2 - \frac{1}{2}x^4 x''^2 S_{n_1-1}^2 S_{n_2-2}^2}.$$

Aus diesen Ausdrücken erhält man die Bedingungsgleichung:

$$2n_1 + 2n_2 = 1 \qquad \text{oder} \qquad (a_1 - a_1)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 1,$$

und daraus:

$$(a_1 - a_2)^2 = 1 \quad , \quad (b_1 - b_2)^2 = 0.$$

Denn der Nenner:

$$x'^2 N_{n_1-1}^2 N_{n_2}^2 - \tfrac{1}{2}x^4 x''^2 S_{n_1-1}^2 S_{n_2-2}^2,$$

welcher dieser Bedingung zu widersprechen scheint, ist nur vom $(2n_1+2n_2-2)^{\text{ten}}$ Grade, weil der Coefficient von $x'^{2(n_1+n_2)}$ in der Entwickelung nach x' verschwindet.

Bezeichnet man nämlich in den Entwickelungen der Functionen S, N, C, Δ nach x'^2 die Coefficienten der höchsten Potenzen durch s, c, c, δ und benutzt die Relationen

$$\sin^2 \operatorname{am}(a_1 + b_1 i)u + \cos^2 \operatorname{am}(a_1 + b_1 i)u = 1,$$

$$\tfrac{1}{2}\sin^2 \operatorname{am}(a_2 + b_2 i)u + \Delta^2 \operatorname{am}(a_2 + b_2 i)u = 1,$$

so erhält man:

$$(1 + x'^2)(s_1 x'^{n_1-1} + \ldots)^2 + (c_1 x'^{n_1-1} + \ldots)^2 = x'^2(c_1 x'^{n_1-1} + \ldots)^2,$$

$$\tfrac{1}{4}(1 - x'^4)(s_2 x'^{n_2-2} + \ldots)^2 + x'^2(\delta_2 x'^{n_2-2} + \ldots)^2 = (c_2 x'^{n_2} + \ldots)^2.$$

Da in diesen Gleichungen nach einer bekannten Schlussfolgeruug die Coefficienten gleicher Potenzen von x' auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich sind, so erhält man für die $2n_2^{\text{te}}$ Potenz aus der zweiten Gleichung die Relationen:

$$-s_1^2 = c_1^2 \quad , \quad -\tfrac{1}{4}s_2^2 = c_2^2$$

und als Product derselben:

$$\tfrac{1}{4}s_1^2 s_2^2 = c_1^2 c_2^2.$$

Die Entwickelung des Nenners selbst giebt nun:

$$x'^2(c_1 x'^{n_1-1} + \ldots)^2 (c_2 x'^{n_2} + \ldots)^2 - \tfrac{1}{4}(1 - x'^2)^2(1 + x'^2)(s_1 x'^{n_1-1} + \ldots)(s_2 x'^{n_2-2} + \ldots)^2,$$

woraus man als Coefficienten von $x'^{2(n_1+n_2)}$,

$$c_1^2 c_2^2 - \tfrac{1}{4} s_1^2 s_2^2$$

erhält, indem nach dem Vorhergehenden $= 0$ ist. Es ist also der Nenner:

$$x'^2 N_{n_1-1}^2 N_{n_2}^2 - \tfrac{1}{2} x^4 x'^2 S_{n_1-1}^2 S_{n_2-2}^2$$

nur vom $(2n_1 + 2n_2 - 2)^{\text{ten}}$ Grade.

4) Es ist endlich der Fall, wo *a ungerade, b ungerade* ist, zu untersuchen. Er führt zu den beiden Annahmen:

1.) a_1 gerade, b_1 gerade, a_2 ungerade, b_2 ungerade,

2.) a_1 gerade, b_1 ungerade, a_2 ungerade, b_2 gerade;

welchen folgende Ausdrücke entsprechen:

für $\sin\mathrm{am}(a + bi)u$:

$$x\,x''.\frac{x'^2 S_{n_1-4} N_{n_1} C_{n_2} \Delta_{n_2-2} + S_{n_2-2} N_{n_2} C_{n_1} \Delta_{n_1}}{N_{n_1}^2 N_{n_2}^2 - \tfrac{1}{2} x^4 x'^2 x''^4 S_{n_1-4}^2 S_{n_2-2}^2},$$

$$x\,x''.\frac{x'^2 S_{n_1-1} N_{n_1-1} C_{n_2-1} \Delta_{n_2-1} + S_{n_2-1} N_{n_2-1} \Delta_{n_1-1}}{x'^2 N_{n_1-1}^2 N_{n_2-1}^2 - \tfrac{1}{2} x^4 S_{n_1-1}^2 S_{n_2-1}^2},$$

für $\cos\mathrm{am}(a + bi)u$:

$$\frac{C_{n_1} N_{n_1} C_{n_2} N_{n_2} - x^2 x'^2 x''^2 S_{n_1-4} \Delta_{n_1} S_{n_2-2} \Delta_{n_2-2}}{N_{n_1}^2 N_{n_2}^2 - \tfrac{1}{2} x^4 x'^2 x''^4 S_{n_1-4}^2 S_{n_2-2}^2},$$

$$\frac{x'^2 C_{n_1-1} N_{n_1-1} C_{n_2-1} N_{n_2-1} - x^2 x''^2 S_{n_1-1} \Delta_{n_1-1} S_{n_2-1} \Delta_{n_2-1}}{x'^2 N_{n_1-1}^2 N_{n_2-1}^2 - \tfrac{1}{2} x^4 S_{n_1-1}^2 S_{n_2-1}^2},$$

für $\Delta\mathrm{am}(a + bi)u$:

$$x'.\frac{\Delta_{n_1} N_{n_1} \Delta_{n_2-2} N_{n_2} - \tfrac{1}{2} x^2 x''^2 S_{n_1-4} C_{n_1} S_{n_2-2} C_{n_2}}{N_{n_1}^2 N_{n_2}^2 - \tfrac{1}{2} x^4 x'^2 x''^4 S_{n_1-4}^2 S_{n_2-2}^2},$$

$$x'.\frac{x''^2 \Delta_{n_1-1} N_{n_1-1} \Delta_{n_2-1} N_{n_2-1} - \tfrac{1}{2} x^2 S_{n_1-1} C_{n_1-1} S_{n_2-1} C_{n_2-1}}{x'^2 N_{n_1-1}^2 N_{n_2-1}^2 - \tfrac{1}{2} x^4 S_{n_1-1}^2 S_{n_2-1}^2}.$$

Alle diese Ausdrücke führen zu der Bedingungsgleichung

$$2n_1 + 2n_2 = n \qquad \text{oder} \qquad (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 0 ,$$

welche nicht erfüllt werden kann. Unter der Voraussetzung jedoch, dass Zähler und Nenner noch einen gemeinschaftlichen Factor vom zweiten Grade haben, wird man auch hier die Normalform erhalten, indem dann die Bedingungsgleichung

$$2n_1 + 2n_2 = n + 2 \qquad \text{oder} \qquad (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 2$$

ist, welche durch:

$$(a_1 - a_2)^2 = 1 \quad , \quad (b_1 - b_2)^2 = 1$$

erfüllt wird.

Die gemachte Voraussetzung bestätigte sich in (§. 2) für den Fall $a = 1$, $b = 1$, wo man erst nach Verschaffung des gemeinschaftlichen Factors $1 + ix^{12}$ den Grad der Normalformen erhält. Es kommt aber darauf an zu zeigen, dass die Voraussetzung auch im Allgemeinen begründet ist; was geschehen sein wird, wenn nachgewiesen ist, dass die Normalformen für diesen Fall auch unmittelbar durch Vermeidung des gemeinschaftlichen Factors erlangt werden können.

Schreibt man nämlich:

$$a + bi = (1 + i)\left(\tfrac{1}{2}(a + b) - \tfrac{1}{2}(a - b)i\right) ,$$

wo $\frac{1}{2}(a + b)$ und $\frac{1}{2}(a - b)$ bei unserer Annahme von a und b ganze Zahlen sind, so hat man bei der Bildung der Functionen von $\left(\frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b)i\right)u$ zu unterscheiden, ob $\frac{1}{2}(a + b)$ und $\frac{1}{2}(a - b)$ *gerade* oder *ungerade* sind. Es finden hier aber nur zwei Fälle Statt: entweder ist eine der Grössen a und b von der Form $4m + 1$, die andere von der Form $4m + 3$; dann ist:

$$\tfrac{1}{2}(a + b) \text{ gerade} \quad , \quad \tfrac{1}{2}(a - b) \text{ ungerade} ;$$

oder beide haben dieselbe Form; dann ist:

$$\tfrac{1}{2}(a + b) \text{ ungerade} \quad , \quad \tfrac{1}{2}(a - b) \text{ gerade} .$$

Für beide Annahmen ist:

$$n' = \tfrac{1}{4}(a + b)^2 + \tfrac{1}{4}(a - b)^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) = \tfrac{1}{2}n$$

und für beide erhält man für die elliptischen Functionen Ausdrücke, welche, wie in diesem Paragraphen bewiesen, mit den entsprechenden Normalformen übereinstimmen.

Um endlich die Functionen von $(a + bi)u$ selbst zu bekommen, hat man

in den (§. 2) aufgestellten Functionen von $(1+i)u$, $(\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)i)u$ statt n zu setzen und dadurch die Ausdrücke

für $\sin\mathrm{am}(a+bi)u$:

$$x\,x''.\frac{2S_{n'-1}\Delta_{n'-1}}{x'^2N_{n'-1}^2-iC_{n'-1}^2} \quad \text{und} \quad x\,x''.\frac{2S_{n'-1}\Delta_{n'-1}}{N_{n'-1}^2-ix'^2C_{n'-1}^2},$$

für $\cos\mathrm{am}(a+bi)u$:

$$\frac{C_{n'-1}^2-ix'^2N_{n'-1}^2}{x'^2N_{n'-1}^2-iC_{n'-1}^2} \quad \text{und} \quad \frac{x'^2C_{n'-1}^2-iN_{n'-1}^2}{N_{n'-1}^2-ix'^2C_{n'-1}^2},$$

für $\Delta\mathrm{am}(a+bi)u$:

$$x'.\frac{(1-i)C_{n'-1}N_{n'-1}}{x'^2N_{n'-1}^2-iC_{n'-1}^2} \quad \text{und} \quad x'.\frac{(1-i)C_{n'-1}N_{n'-1}}{N_{n'-1}^2-ix'^2C_{n'-1}^2}$$

zu bilden, Ausdrücke, welche den Grad der Normalformen haben.

Während also in den drei ersten Annahmen für a und b die Bedingung, dass $(a_1-a_2)^2$ und $(b_1-b_2)^2$ Minima sein sollen, unmittelbar zu den aufgestellten Normalformen führt, bringt sie bei der vierten Annahme einen gemeinschaftlichen Factor vom zweiten Grade in den Zähler und Nenner, welcher sich durch die zuletzt entwickelte Methode vermeiden lässt.

§. 4.

In dem Vorhergehenden lässt sich eine Art von Inductionsbeweis dafür finden, dass die Functionen S, C, Δ, N keinen niedrigeren Grad haben können, als den, welcher in den Normalformen festgesetzt wurde. Man bedient sich des Inductionsbeweises gewöhnlich nur, um das Gesetz, nach welchem die *Coefficienten* gewisser Entwickelungen aufzustellen sind, zu begründen; hier ist der Gegenstand des Beweises der *Grad* der Entwickelung.

In dem vorliegenden Falle kann man sich nämlich die Functionen S, C, Δ, N, wie es schon in (§. 3) geschehen, mittels der Relationen $x^2=1-x'^2$, $x''^2=\frac{1}{2}(1+x'^2)$ nach x' entwickelt vorstellen. Der Exponent der höchsten Potenz von x' muss natürlich ebenso, wie es die Coefficienten der Entwickelung sind, eine Function von $a+bi$, (dem Vielfachen des Arguments u), sein.

Es wurden in (§. 1) für den grössten Potenz-Exponenten solche Functio-

nen aufgestellt und in (§. 3) wurde gezeigt, dass die Functionen von grösserem $a+bi$ sich mittels der Functionen von kleinerem $a+bi$ stets so bilden lassen, dass die Potenz-Exponenten von S, C, Δ, N die in den Normalformen vorausgesetzten Functionen von $a+bi$ sind. Hierdurch ist der Beweis für die Richtigkeit unserer Annahme für ein grösseres $a+bi$ auf den Beweis derselben für ein kleineres $a+bi$ und schliesslich für $a+bi=1$ und $=i$ zurückgeführt. Für diese Werthe ist aber aus den in (§. 2) abgeleiteten Ausdrücken

$$\sin\mathrm{am}\,u = x.\frac{S_0}{N_0}\ , \quad \cos\mathrm{am}\,u = x'.\frac{C_0}{N_0}\ , \quad \Delta\mathrm{am}\,u = x''.\frac{\Delta_0}{N_0},$$

$$\sin\mathrm{am}\,iu = \frac{x}{x'}\cdot\frac{S_0}{N_0}\ , \quad \cos\mathrm{am}\,iu = \frac{1}{x'}\cdot\frac{C_0}{N_0}\ , \quad \Delta\mathrm{am}\,iu = \frac{x''}{x'}\cdot\frac{\Delta_0}{N_0}$$

zu sehen, dass im Zähler und Nenner kein von x' abhängiger gemeinschaftlicher Factor vorkommt, da S_0, C_0, Δ_0, N_0 Constanten sind.

Beispiel.

Bei der Bildung der Gleichung für die *Siebenzehntheilung der Lemniscate* findet sich eine Gelegenheit, das Vorhergehende anzuwenden. Die Methode der imaginairen Theilung von *Abel* verlangt die Bildung von $\cos\mathrm{am}(4+i)u$. Herr *Th. Claussen*, der dies in (*Schumacher's* A. N. XIX, pag. 243) gethan hat, schlägt den unvortheilhaftesten Weg ein, indem er $(4+i)u$ aus $4u$ und iu zusammensetzt. Bei ihm wird daher auch der Grad der Function C zu $2.4^2+2.1^2-2=32$, während er, wenn man $(4+i)u$ aus $2u$ und $(2+i)u$ bildet, dem Problem entsprechend, nur zu $2.2^2+2(2^2+1^2)-2=16$ wird.

Ebenso wird man das Argument $(2+i)u$ aus u und $(1+i)u$ zusammensetzen müssen und nicht, wie es *Abel* (*Cr.* Journ. III, pag. 162) that, aus den Argumenten $2u$ und iu, damit man nicht auf einen gemeinschaftlichen Factor vom vierten Grade im Zähler und Nenner der zu bildenden Function stosse.

Man hat also die Formeln in (§. 2) nemlich

$$\sin\mathrm{am}(1+i)u = \frac{2xx''}{1-ix'^2}\ , \quad \cos\mathrm{am}(1+i)u = \frac{x'^2-i}{1-ix'^2}\ , \quad \Delta\mathrm{am}(1+i)u = \frac{(1-i)x'}{1-ix'^2}$$

und

$$\sin\mathrm{am}\,u = x \quad , \quad \cos\mathrm{am}\,u = x' \quad , \quad \Delta\mathrm{am}\,u = x''$$

zu benutzen, um die Ausdrücke:

$$\sin\mathrm{am}(2+i)u = \frac{\frac{x}{x'}[(1+x'^2)(1-ix'^2)+(1-i)(x'^2-i)]}{\frac{1}{x'^2}[(1-ix'^2)^2-(1-x'^2)^2(1+x'^2)]} = -i\frac{x}{x'}\frac{1+2(1+i)x'^2+x'^4}{(1-2i)-x'^4},$$

$$\cos\mathrm{am}(2+i)u = \frac{\frac{1}{x'}[(x'^2-i)(1-ix'^2)-(1-i)(1-x'^2)(1+x'^2)]}{\frac{1}{x'^2}[(1-ix'^2)^2-(1-x'^2)^2(1+x'^2)]} = \frac{1}{x'}\frac{(1-2i)x'^4-1}{(1-2i)-x'^4},$$

$$\Delta\mathrm{am}(2+i)u = \frac{\frac{x''}{x'}[(1-i)(1-ix'^2)-(1-x'^2)(x'^2-i)]}{\frac{1}{x'^2}[(1-ix'^2)^2-(1-x'^2)^2(1+x'^2)]} = \frac{x''}{x'}\frac{1-2(1+i)x'^2+x'^4}{(1-2i)-x'^4}$$

aufzustellen. Nimmt man hiezu die Formeln der Verdoppelung aus (§. 2):

$$\sin\mathrm{am}2u = \frac{4xx'x''}{1+2x'^2-x'^4}, \quad \cos\mathrm{am}u = \frac{x'^4+2x'^2-1}{1+2x'^2-x'^4}, \quad \Delta\mathrm{am}2u = \frac{1+x'^4}{1+2x'^2-x'^4},$$

so findet sich der Werth von $\cos\mathrm{am}(4+i)u$ durch x' ausgedrückt.

Der Zähler:

$$\begin{aligned}&((1-2i)x'^4-1)(1-2i-x'^4)(x'^4+2x'^2-1)(1+2x'^2-x'^4)\\&+2i(1-x'^4)(1+x'^4)(1+2(1+i)x'^2+x'^4)(1-2(1+i)x'^2+x'^4)\end{aligned}$$

dieses Ausdrucks giebt entwickelt:

$$\begin{aligned}&1-2i-(4-16i)x'^4-(10+28i)x'^8-(4-16i)x'^{12}+(1-2i)x'^{16}\\&+2i+(16+4i)x'^4-(16+4i)x'^{12}-2ix'^{16}\\=\;&1+(12+20i)x'^4-(10+28i)x'^8-(20-12i)x'^{12}+(1-4i)x'^{16}.\end{aligned}$$

Der Nenner ist:

$$x'(1-2i-x'^4)^2(1+2x'^2-x'^4)^2+4x'(1-x'^2)^2(1+x'^2)^2(1+2(1+i)x'^2+x'^4)^2$$

und wird, wenn man nach x' ordnet:

$$\begin{aligned}x'\Big\{&-(3+4i)-4(3+4i)x'^2-4(2+i)x'^4+4(1+8i)x'^6-2(3-2i)x'^8+4(3-4i)x'^{10}\\&+4x'^{12}-4x'^{14}+x'^{16}+4+4(3+4i)x'^2-4(3-4i)x'^4-4(1+8i)x'^6-4(1+8i)x'^8\\&-4(3-4i)x'^{10}+4(3+4i)x'^{12}+4x'^{14}\Big\}\\=\;&x'(1-4i-(20-12i)x'^4-(10+28i)x'^8+(12+20i)x'^{12}+x'^{16}),\end{aligned}$$

sodass also:

$$\cos\mathrm{am}(4+i)u = \frac{1}{x'}\cdot\frac{1+(12+20i)x'^4-(10+28i)x'^8-(20-12i)x'^{12}+(1-4i)x'^{16}}{(1-4i)-(20-12i)x'^4-(10+28i)x'^8+(12+20i)x'^{12}+x'^{16}}$$ ist.

Die Gleichung für die *Siebenzehntheilung* wird noch angemessener, wenn man $\cos(1+4i)u$ entwickelt. Man erhält dann zunächst aus:

$$\sin\mathrm{am}\,iu = i\frac{x}{x'}\ ,\quad \cos\mathrm{am}\,iu = \frac{1}{x'}\ ,\quad \Delta\mathrm{am}\,2iu = \frac{x''}{x'}$$

und aus den Formeln für die Functionen von $(1+i)u$ folgende Ausdrücke:

$$\sin\mathrm{am}(1+2i)u = x\,\frac{1+2(1-i)x'^2+x'^4}{1-(1+2i)x'^4}\ ,$$

$$\cos\mathrm{am}(1+2i)u = x'\frac{x'^4-(1+2i)}{1-(1+2i)x'^4}\ ,$$

$$\Delta\mathrm{am}(1+2i)u = x''\frac{-1+2(1-i)x'^2-x'^4}{1-(1+2i)x'^4}\ ,$$

und in Verbindung mit

$$\sin\mathrm{am}\,2iu = \frac{4ixx'x''}{-1+2x'^2+x'^4}\ ,\quad \cos\mathrm{am}\,2iu = \frac{-x'^4+2x'^2+1}{-1+2x'^2+x'^4}\ ,\quad \Delta\mathrm{am}\,2iu = \frac{x'^4+1}{-1+2x'^2+x'^4}$$

schliesslich:

$$\cos\mathrm{am}(1+4i)u = x'\,\frac{x'^{16}+(12-20i)x'^{12}-(10-28i)x'^8-(20+12i)x'^4+(1+4i)}{1+(12-20i)x'^4-(10-28i)x'^8-(20+12i)x'^{12}+(1+4i)x'^{16}}\ .$$

Es hätte dieser Ausdruck aus dem Werthe von $\cos\mathrm{am}(4+i)u$ abgeleitet werden können, denn es ist

$$\cos\mathrm{am}(1+4i)u = \cos\mathrm{am}(4-i)iu = \frac{1}{\cos\mathrm{am}(4-i)u}\ .$$

Es ist also $\cos\mathrm{am}(1+4i)u$ der inverse Werth von $\cos\mathrm{am}(4+i)u$, nachdem darin $-i$ statt $+i$ gesetzt worden.

Die Gleichung:

$$x'^{16}+(12-20i)x'^{12}-(10-28i)x'^8-(20+12i)x'^4+(1+4i)=0$$

hat diejenige Form, mit welcher sich *Eisenstein* in seinem Eingangs citirten Aufsatze beschäftigt und von welcher er beweist, dass sie $\equiv x'^{16}(\mathrm{mod}\,(1+4i))$ ist. In der That kann man sie wie folgt schreiben:

$$x'^{16}-(1+4i)(4(1+i)x'^{12}-2(3+2i)x'^8+4(1-i)x'^4-1)=0\ .$$

Danzig, im Juni 1853.

22.

Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen.

(Von Herrn *G. Kirchhoff*, Professor an der Universität zu Breslau.)

Die Gleichungen, auf welche die von *Poisson* aufgestellte mathematische Theorie des in weichem Eisen inducirten Magnetismus geführt hat, sind für den Fall, dass der Eisenkörper ein Rotations-Ellipsoïd ist, von *Neumann* in (*Crelle's* Journal Bd. 37.) allgemein aufgelöset. Ein unbegrenzter Cylinder kann als ein Rotations-Ellipsoïd mit unendlich grosser Excentricität betrachtet werden; die Reihen-Entwickelungen von *Neumann* verlieren aber ihre Anwendbarkeit, wenn man in denselben die Excentricität unendlich gross setzt, ausser in dem Falle, dass der Mittelpunct der magnetisirenden Kräfte in unendlicher Entfernung liegt. Es soll hier die Lösung jener Gleichungen für einen unbegrenzten Cylinder unter der Annahme, dass die Mittelpuncte der inducirenden Kräfte im Endlichen liegen, auf einem andern Wege entwickelt werden.

§. 1.

Nach der Theorie von *Poisson* finden für jeden Punct eines Eisenkörpers, der durch Vertheilung magnetisirt ist, die beiden Gleichungen:

1) $$0 = V + \varphi + U$$

2) $$U = -k \int \frac{ds}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varphi}{dNi}$$

Statt. In demselben bedeutet V das *Potential* der magnetisirenden Kräfte, k eine von der Natur des Eisens abhängige Constante, φ eine Function welche den magnetischen Zustand des Körpers dadurch bestimmt, dass $k\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $k\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $k\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ die magnetischen Momente, bezogen auf die Volumen-Einheit, in dem Puncte

sind, welcher x, y, z zu rechtwinkligen Coordinaten hat; ds ist ein Element der Oberfläche des Eisenkörpers, N_i ein unbestimmtes Stück der nach Innen gerichteten Normale von ds, $\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}$ der Werth des nach N_i genommenen Differentialquotienten von φ für $N_i = 0$, ε die Entfernung des Elements ds von dem Puncte, auf welchen sich U bezieht; die Integration endlich ist über die ganze Oberfläche des Körpers auszudehnen. Hat man diesen beiden Gleichungen gemäss φ bestimmt, so stellt der Ausdruck für U in der Gleichung (2), sobald man in ihm unter ε die Entfernung des Elements ds von einem äusseren Puncte versteht, das Potential des magnetisirten Eisenkörpers in Beziehung auf diesen Punct dar.

Ich werde die Gleichungen (1 und 2) zunächst auf eine andere Form bringen, die ihre Lösung in dem gegenwärtigen Falle erleichtert.

Nach einem von *Gauss* bewiesenen Satze kann jedes Potential von Massen, die ausserhalb eines begrenzten Raumes liegen, bezogen auf einen Punct in diesem Raume, als herrührend von Massen auf der Oberfläche desselben betrachtet werden. V und φ sind Potentiale von Massen, die ausserhalb des Eisenkörpers liegen; sie sollen als von Massenvertheilungen auf der Oberfläche des Körpers angesehen werden. Bezogen auf einen äusseren Punct sollen V und φ die Potentiale von denselben Massenvertheilungen auf der Oberfläche bedeuten. Bezeichnet N_a ein unbestimmtes Stück der nach Aussen gerichteten Normale von ds, und $\frac{\partial \varphi}{\partial N_a}$ den Werth des nach N_a genommenen Differentialquotienten von φ für $N_a = 0$, so ist die Dichtigkeit der Masse, von welcher φ herrührt, in dem Elemente ds:

$$-\frac{1}{4\pi}\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{dN_i}+\frac{\partial \varphi}{\partial N_a}\right).$$

Die Dichtigkeit der Masse, von welcher V herrührt, ist mit entsprechender Bezeichnung:

$$-\frac{1}{4\pi}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial N_i}+\frac{\partial V}{\partial N_a}\right).$$

Ferner ist U ein Potential von Massen, die auf der Oberfläche liegen, und deren Dichtigkeit in dem Elemente ds,

$$-k\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}$$

ist; die Dichtigkeit der Massenvertheilung auf der Oberfläche, deren Potential $V+\varphi+U$ ist, ist daher:

$$-\frac{1}{4\pi}\cdot\left\{\frac{\partial V}{\partial N_i}+\frac{\partial V}{\partial N_a}+(1+4\pi k)\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}+\frac{\partial \varphi}{\partial N_a}\right\}.$$

Da das genannte Potential für alle Puncte des Eisenkörpers $=0$ ist, so muss diese Dichtigkeit für alle Puncte der Oberfläche verschwinden; d. h. es muss für alle diese Puncte die Gleichung:

$$(3.)\qquad \frac{\partial V}{\partial N_i}+\frac{\partial V}{\partial N_a}+(1+4\pi k)\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}+\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}+\frac{\partial \varphi}{\partial N_a}=0$$

Statt finden. Diese Gleichung gilt zunächst nur für den Fall, dass der Eisenkörper ein endlicher ist; doch lässt sie sich auch auf einen unbegrenzten Cylinder anwenden, sobald die Kräfte, durch welche derselbe magnetisirt wird, von Polen ausgehen, die in der Endlichkeit liegen.

§. 2.

Um für den bezeichneten Fall aus der Gleichung (3) φ ermitteln zu können, sollen zuerst Entwickelungen für ein Potential von Massen abgeleitet werden, die auf der Cylinderfläche liegen, dessen Werth in dieser Fläche gegeben ist; in Beziehung auf einen inneren und auf einen äusseren Punct.

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Puncts in Beziehung auf ein Coordinatensystem, dessen x Axe die Axe des Cylinders ist, und es sei V das Potential in Beziehung auf diesen Punct. Soll angedeutet werden, dass das Potential sich auf einen Punct innerhalb oder ausserhalb des Cylinders bezieht, so soll dem V der Index i oder a beigefügt werden.

Es ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

oder, wenn man

$$y=r\cos\vartheta \quad , \quad z=r\sin\vartheta$$

setzt:

$$(4.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}=0.$$

Es handelt sich darum V_i so zu bestimmen, dass es innerhalb des Cylinders dieser partiellen Differentialgleichung genügt, und für die Oberfläche in eine gegebene Function von x und ϑ übergeht; desgleichen V_a so zu bestimmen, dass es

ausserhalb des Cylinders derselben Gleichung Genüge thut, und für die Oberfläche derselben Function von x und ϑ gleich wird.

Eine particuläre Lösung der Gleichung (4) ist folgende:

$$V = W_m \cos m\vartheta + W'_m \sin m\vartheta,$$

wo m eine ganze Zahl sein soll, W_m und W'_m Functionen von x und r bedeuten, die der Gleichung

$$\frac{\partial^2 W_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W_m}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\cdot W_m = 0$$

genügen.

Man kann setzen:

$$W_m = T_{nm}(G_{nm}.\cos nx + H_{nm}.\sin nx)$$
$$W'_m = T_{nm}(G'_{nm}.\cos nx + H'_{nm}.\sin nx),$$

wo n, G_{nm}, H_{nm}, G'_{nm}, H'_{nm} willkührliche Constanten sind und T_{nm} eine Function von r ist, die der Gleichung:

$$\frac{d^2 T_{nm}}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dT_{nm}}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + n^2\right) T_{nm} = 0 \qquad (5.)$$

Genüge thut.

Ist $S_m(\varrho)$ eine Function von ϱ, welche die Gleichung:

$$\varrho\frac{d^2 S_m}{d\varrho^2} + (m+1)\frac{dS_m}{d\varrho} - S_m = 0 \qquad (6.)$$

erfüllt, so genügt man der Gleichung (5) durch:

$$T_{nm} = r^m.S_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right).$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (6) ist von *Kummer* in diesem Journal, (Bd. 17, S. 229), in folgender Gestalt angegeben:

$$S_m = a.\psi(1 + m_1\varrho) + b\,\varrho^{-m}.\psi(1 - m_1\varrho);$$

hier sind a und b die willkührlichen Constanten, und die Function ψ wird durch die Gleichung:

$$\psi(\alpha,\varrho) = 1 + \frac{\varrho}{\alpha.1} + \frac{\varrho^2}{\alpha.\alpha+1.1.2} + \frac{\varrho^3}{\alpha.\alpha+1.\alpha+1.2.3} + \text{etc.}$$

definirt. Ich setze

$$\psi(1+m,\varrho) = P_m(\varrho);$$

dann ist

$$T_{nm} = r^m P_m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)$$

ein particuläres Integral der Gleichung (5), und zwar ein solches, welches für $\varrho = \infty$ unendlich gross wird, und für $\varrho = 0$ endlich bleibt, oder verschwindet.

Kummer zeigt a. a. O., dass die Gleichung (6) auch durch:

$$S_m = \int_0^\infty u^{-m-1}.e^{-u}.e^{-\frac{\varrho}{u}}du,$$

erfüllt wird, und er findet für den Werth dieses Integrals:

$$(7.) \quad = \Pi(-m-1)\psi(1+m,\varrho) + \Pi(m-1)\varrho^{-m}\psi(1-m,\varrho),$$

wo $\Pi(z)$ die von *Gauss* in seiner Abhandlung „*circa seriem infinitam*" ..... in den Comment. Goetting. vom Jahre 1812, betrachtete Function bedeutet.

Der Ausdruck (7) soll durch

$$Q_m(\varrho)$$

bezeichnet werden; dann ist auch

$$T_{nm} = r^m Q_m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)$$

ein particuläres Integral der Gleichung (5) und zwar ein solches, welches für $r = 0$ unendlich gross wird, aber für $r = \infty$ verschwindet.

Der Ausdruck (7) stellt sich, wenn m eine ganze Zahl ist, welcher Fall hier gerade in Betracht kommt, in einer unbestimmten Form dar. Man findet seinen Werth, indem man in ihm $m+\varepsilon$ statt m schreibt, wo ε eine unendlich kleine Grösse ist.

Setzt man, mit *Gauss:*

$$\frac{d\log\Pi(z)}{dz} = \psi(z)$$

und benutzt die Gleichungen:

$$\Pi(z+1) = (z+1).\Pi(z) \quad , \quad \Pi(0) = 1;$$

so ergiebt sich:

$$\Pi(-m-\varepsilon-1) = \frac{(-1)^{m+1}}{1.2.....m}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}-\psi(0)\right),$$

und, wenn m nicht $= 0$ ist:

$$\Pi(m+\varepsilon-1) = 1.2\ ...\ m-1\ [1+\varepsilon.\psi(0)].$$

Dabei ist:

$$\psi(0) = -0{,}577\,2157.$$

Ferner findet man:

$$\psi(1+m+\varepsilon\,,\varrho)$$

$$= \psi(1+m,\varrho) - \varepsilon\left\{\varrho\frac{\frac{1}{m+1}}{m+1.1} + \varrho^2\frac{\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}}{m+1.m+2.1.2} + \varrho^3\frac{\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}}{m+1.m+2.m+3.1.2.3}+\cdots\right\},$$

$$\psi(1-m-\varepsilon,\varrho) = 1-\frac{\varrho}{m-1.1}+\frac{\varrho^2}{m-1.m-2.1.2}-\ldots+\frac{(-1)^{m-1}\varrho^{m-1}}{m-1.m-2\ldots2.1.1.2\ldots m-2.m-1}$$

$$+\frac{(-1)^m\varrho^m}{(1.2\ldots m-1)^2 m}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\psi(1+m,\varrho)+\varrho\frac{1}{m+1.1}+\varrho^2\frac{1+\frac{1}{2}}{m+1.m+2.1.2}\right.$$

$$\left.+\varrho^3\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{m+1.m+2.m+3.1.2.3}+\ldots..\right\}.$$

Endlich ist:

$$\varrho^{-m-\varepsilon} = \varrho^{-m}(1-\varepsilon\log\varrho).$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck (7), so findet sich:

$$Q_m(\varrho) = 1.2\ldots m-1.\varrho^{-m}\left\{1-\frac{\varrho}{m-1.1}+\frac{\varrho^2}{m-1.m-2.1.2}-\ldots..\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{m-1}\varrho^{m-1}}{m-1.m-2\ldots2.1.1.2\ldots m-2.m-1}\right\}$$

$$+\frac{(-1)^m}{1.2\ldots m}\left\{\varrho\frac{\frac{1}{m+1}+1}{m+1.1}+\varrho^2\frac{\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+1+\frac{1}{2}}{m+1.m+2.1.2}+\varrho^3\frac{\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{m+1.m+2.m+3.1.2.3}+..\right\}$$

$$+\frac{(-1)^m}{1.2\ldots m}[2\psi(0)-\log\varrho]\psi(1+m\,,\varrho).$$

Für den Fall $m = 0$, hat man:

$$Q_0(\varrho) = \Pi(-\varepsilon-1)\psi(1+\varepsilon\,,\varrho)+\Pi(\varepsilon-1)\varrho^{-\varepsilon}\psi(1-\varepsilon\,,\varrho),$$

$$\Pi(-\varepsilon-1) = -\frac{1}{\varepsilon}+\psi(0)\,,$$

$$\Pi(\varepsilon-1) = +\frac{1}{\varepsilon}+\psi(0)\,,$$

$$\psi(1+\varepsilon\,,\,\varrho)=\psi(1\,,\,\varrho)-\varepsilon\left\{\varrho\frac{1}{1^2}+\varrho^2\frac{1+\frac{1}{2}}{(1.2)^2}+\varrho^3\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{(1.2.3)^2}+\ldots\right\}$$

$$\psi(1-\varepsilon\,,\,\varrho)=\psi(1\,,\,\varrho)+\varepsilon\left\{\varrho\frac{1}{1^2}+\varrho^2\frac{1+\frac{1}{2}}{(1.2)^2}+\varrho^3\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{(1.2.3)^2}+\ldots\right\}$$

$$\varrho^{-\varepsilon}=1-\varepsilon\log\varrho\,;$$

daraus folgt:

$$Q_0(\varrho)=2\left\{\varrho\frac{1}{1^2}+\varrho^2\frac{1+\frac{1}{2}}{(1.2)^2}+\varrho^3\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{(1.2.3)^2}+\ldots\right\}+(2\psi(0)-\log\varrho)\psi(1\,,\,\varrho)\,.$$

Es giebt für $Q_m(\varrho)$ eine einfache *semiconvergente* Reihe, die nach fallenden Potenzen von ϱ fortschreitet, und die hier beiläufig angeführt werden mag. *Kummer* hat in der angeführten Abhandlung gezeigt, dass

$$Q_m(\varrho)=\frac{\sqrt{\pi}\,\varrho^{-m}e^{-2\sqrt{\varrho}}}{2^{2m-1}\Pi(-m-\frac{1}{2})}\int_0^\infty(u+u^2)^{-m-\frac{1}{2}}e^{-4u\sqrt{\varrho}}\,du\,,$$

und dass

$$\int_0^\infty\frac{u^{\alpha-1}e^{-ux}\,du}{(1+u)^\beta}=\Pi(\alpha-1)\,x^{-\alpha}\left\{1-\frac{\alpha.\beta}{1.x}+\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.x^2}-\text{etc.}\right\}$$

ist. Setzt man in der zweiten Gleichung:

$$\alpha=\tfrac{1}{2}-m\quad,\quad\beta=\tfrac{1}{2}+m\quad,\quad x=\sqrt{\varrho}\,,$$

und verbindet sie mit der ersten, so erhält man:

$$Q_m(\varrho)=\sqrt{\pi}.\varrho^{-\frac{2m+1}{4}}.e^{-2\sqrt{\varrho}}\left\{1-\frac{(1-4m^2)}{1.16\sqrt{\varrho}}+\frac{(1-4m^2)(9-4m^2)}{1.2.(16\sqrt{\varrho})^2}-\frac{(1-4m^2)(9-4m^2)(25-4m^2)}{1.2.3.(16\sqrt{\varrho})^3}+.\right\}.$$

Es wurden die beiden folgenden particulären Integrale der Gleichung (4) gefunden:

$$V=\cos m\vartheta\, r^m P_m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)(G_{nm}\cos nx+H_{nm}\sin nx)$$

$$+\sin m\vartheta\, r^m P^m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)(G'_{nm}\cos nx+H'_{nm}\sin nx)$$

und

$$V=\cos m\vartheta\, r^m Q_m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)(I_{nm}\cos nx+K_{nm}\sin nx)$$

$$+\sin m\vartheta\, r^m Q_m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)(I'_{nm}\cos nx+K'_{nm}\sin nx)\,,$$

wo die neu eingeführten Grössen I_{nm}, K_{nm}, I'_{nm}, K'_{nm} willkührliche Constanten bezeichnen; das erste Integral wird $= \infty$ für $r = \infty$, und nicht $= \infty$ für $r = 0$; das zweite wird $= \infty$ für $r = 0$ und verschwindet für $r = \infty$. Von jeder dieser Lösungen kann in Beziehung auf n das Integral, in Beziehung auf m die Summe genommen werden; man kann setzen:

$$V_i = \sum_0^\infty m \cos m\vartheta \int_0^\infty r^m P_m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)(G_m(n)\cos nx + H_m(n)\sin nx)\,dn$$

$$+ \sum_1^\infty m \sin m\vartheta \int_0^\infty r^m P_m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)(G'_m(n)\cos nx + H'_m(n)\sin nx)\,dn$$

$$V_a = \sum_0^\infty m \cos m\vartheta \int_0^\infty r^m Q_m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)(I_m(n)\cos nx + K_m(n)\sin nx)\,dn$$

$$+ \sum_1^\infty m \sin m\vartheta \int_0^\infty r^m Q_m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)(I'_m(n)\cos nx + K'_m(n)\sin nx)\,dn\,,$$

falls sich zeigen lässt, dass die Functionen von n: G_m, H_m, G'_m, H'_m, I_m, K_m, I'_m, K'_m sich so bestimmen lassen, dass die Ausdrücke von V_i und V_a einer gegebenen Function von x und ϑ gleich werden, wenn man in ihnen für r den Radius des Cylinders setzt.

Es sei R der Radius des Cylinders, $\overline{V}$ die Function von x und ϑ, in welche V_i und V_a für $r = R$ übergehen sollen. Mit Hülfe des *Fourier*'schen Satzes lässt sich $\overline{V}$ auf folgende Form bringen:

$$(8.)\quad \begin{cases} \overline{V} = \sum_0^\infty m \cos m\vartheta \int_0^\infty (A_m(n)\cos nx + B_m(n)\sin nx)\,dn \\ \qquad + \sum_1^\infty m \sin m\vartheta \int_0^\infty (A'_m(n)\cos nx + B'_m(n)\sin nx)\,dn\,. \end{cases}$$

Ist dieses geschehen, und nimmt man die Werthe von $G_m(n)$, $H_m(n)$ u. s. w. aus den Gleichungen:

$$\frac{G_m(n)}{A_m(n)} = \frac{H_m(n)}{B_m(n)} = \frac{G'_m(n)}{A'_m(n)} = \frac{H'_m(n)}{B'_m(n)} = \frac{1}{R^m P_m\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)}$$

$$\frac{I_m(n)}{A_m(n)} = \frac{K_m(n)}{B_m(n)} = \frac{I'_m(n)}{A'_m(n)} = \frac{K'_m(n)}{B'_m(n)} = \frac{1}{R^m Q_m\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)},$$

so wird der gestellten Forderung genügt.

Hat man daher die Functionen $A_m(n)$, $B_m(n)$, $A'_m(n)$, $B'_m(n)$ der Gleichung (8) gemäss bestimmt, so ist:

$$(9.)\quad \begin{cases} V_i = \sum_0^\infty m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m P_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)}{R^m P_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)} (A_m(n)\cos nx + B_m(n)\sin nx)\,dn \\ \quad + \sum_1^\infty m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m P_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)}{R^m P_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)} (A'_m(n)\cos nx + B'_m(n)\sin nx)\,dn, \\ \text{und:} \\ V_a = \sum_0^\infty m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m Q_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)}{R^m Q_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)} (A_m(n)\cos nx + B_m(n)\sin nx)\,dn \\ \quad + \sum_1^\infty m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m Q_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)}{R^m Q_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)} (A'_m(n)\cos nx + B'_m(n)\sin nx)\,dn. \end{cases}$$

§. 3.

Es sollen jetzt die gefundenen Entwickelungen benutzt werden, um aus der Gleichung (3) φ zu bestimmen. Bei dieser Gleichung ist vorausgesetzt, dass sowohl V als φ als Potentiale von Massen dargestellt sind, die auf der Oberfläche des Cylinders liegen. In Beziehung auf V wird diese Bedingung durch die in (9) aufgestellten Ausdrücke erfüllt; sie wird auch in Beziehung auf φ erfüllt, wenn man, entsprechend

$$(10.)\quad \begin{cases} \varphi_i = \sum_0^\infty m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m P_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)}{R^m P_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)} (C_m(n)\cos nx + D_m(n)\sin nx)\,dn \\ \quad + \sum_1^\infty m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m P_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)}{R^m P_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)} (C'_m(n)\cos nx + D'_m(n)\sin nx)\,dn \\ \varphi_a = \sum_0^\infty m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m Q_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)}{R^m Q_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)} (C_m(n)\cos nx + D_m(n)\sin nx)\,dn \\ \quad + \sum_1^\infty m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m Q_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)}{R^m Q_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)} (C'_m(n)\cos nx + D'_m(n)\sin nx)\,dn, \end{cases}$$

setzt, wo $C_m(n)$, $D_m(n)$, $C'_m(n)$, $D'_m(n)$ Functionen bedeuten, die eben durch die Gleichung (3) ihre Bestimmung erhalten sollen.

Man hat:

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = -\frac{\partial V_i}{\partial r}\ ,\ \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}$$

$$\frac{\partial V}{\partial N_a} = \frac{\partial V_a}{\partial r}\ ,\ \frac{\partial \varphi}{\partial N_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\ ,$$

wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichungen $r = R$ setzt; es ist daher:

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = -\sum_0^\infty{}^m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{\partial \log\left(R^m P_m\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)\right)}{\partial R}\left(A_m(n)\cos nx + B_m(n)\sin nx\right) dn$$

$$-\sum_1^\infty{}^m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{\partial \log\left(R^m P_m\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)\right)}{\partial R}\left(A'_m(n)\cos x + B'_m(n)\sin nx\right) dn$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial N_a} = \sum_0^\infty{}^m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{\partial \log\left(R^m Q_m\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)\right)}{\partial R}\left(A_m(n)\cos nx + B_m(n)\sin nx\right) dn$$

$$+\sum_1^\infty{}^m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{\partial \log\left(R^m Q_m\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)\right)}{\partial R}\left(A'_m(n)\cos nx + B'_m(n)\sin nx\right) dn.$$

Aus diesen Ausdrücken erhält man die Ausdrücke für $\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial N_a}$, wenn man statt der Buchstaben A, B die Buchstaben C, D setzt. Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (3), so zeigt sich, dass dieselbe identisch erfüllt wird, wenn man:

$$\frac{C_m(n)}{A_m(n)} = \frac{D_m(n)}{B_m(n)} = \frac{C'_m(n)}{A'_m(n)} = \frac{D'_m(n)}{B'_m(n)}$$

$$= -\frac{\dfrac{\partial \log\left(R^m Q_m\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)\right)}{\partial R} - \dfrac{\partial \log\left(R^m P_m\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)\right)}{\partial R}}{\dfrac{\partial \log\left(R^m Q_m\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)\right)}{\partial R} - (1+4\pi k)\dfrac{\partial \log\left(R^m P_m\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)\right)}{\partial R}}$$

macht. Führt man in diesen Ausdruck

(11.) $$\varrho = \frac{n^2R^2}{4}$$

ein, so wird derselbe

$$= - \frac{1}{1 - 4\pi k \dfrac{Q_m(\varrho)\left(m P_m(\varrho) + 2\varrho \dfrac{dP_m(\varrho)}{d\varrho}\right)}{2\varrho\left(P_m(\varrho)\dfrac{dQ_m(\varrho)}{d\varrho} - Q_m(\varrho)\dfrac{dP_m(\varrho)}{d\varrho}\right)}} .$$

Nun genügen $P_m(\varrho)$ und $Q_m(\varrho)$ der Differentialgleichung **(6)**; hieraus ergiebt sich leicht:

$$P_m(\varrho)\frac{dQ_m(\varrho)}{d\varrho} - Q_m(\varrho)\frac{dP_m(\varrho)}{d\varrho} = \frac{c}{\varrho^{m+1}} ,$$

wo c eine von ϱ unabhängige Grösse bedeutet. Man findet den Werth derselben, wenn man ϱ als unendlich klein voraussetzt. Unter dieser Annahme ist, nach den im vorigen Paragraph über $P_m(\varrho)$ und $Q_m(\varrho)$ gemachten Angaben:

$$P_m(\varrho) = 1 \quad , \quad \frac{dP_m(\varrho)}{d\varrho} = \frac{1}{m+1} ,$$

$$Q_m(\varrho) = \frac{1.2\ldots m-1}{\varrho^m} , \quad \frac{dQ_m(\varrho)}{d\varrho} = -\frac{1.2\ldots m}{\varrho^{m+1}} .$$

Für $m = 0$ ist aber:

$$Q_0(\varrho) = -\log\varrho \quad , \quad \frac{dQ_0(\varrho)}{d\varrho} = -\frac{1}{\varrho} ;$$

hieraus ergiebt sich:

$$P_m(\varrho)\frac{dQ_m(\varrho)}{d\varrho} - Q_m(\varrho)\frac{dP_m(\varrho)}{d\varrho} = -\frac{1.2\ldots m}{\varrho^{m+1}}$$

$$P_0(\varrho)\frac{dQ_0(\varrho)}{d\varrho} - Q_0(\varrho)\frac{dP_0(\varrho)}{d\varrho} = -\frac{1}{\varrho} ,$$

also

$$\text{(12.)} \quad \begin{cases} \dfrac{C_m(n)}{A_m(n)} = \dfrac{D_m(n)}{B_m(n)} = \dfrac{C'_m(n)}{A'_m(n)} = \dfrac{D'_m(n)}{B'_m(n)} \\ = - \dfrac{1}{1 + 2\pi k \dfrac{\varrho^m Q_m(\varrho)\left(m P_m(\varrho) + 2\varrho \dfrac{dP_m(\varrho)}{d\varrho}\right)}{1.2\ldots m}} \\ \text{und} \\ \dfrac{C_0(n)}{A_0(n)} = \dfrac{D_0(n)}{B_0(n)} = \dfrac{C'_0(n)}{A'_0(n)} = \dfrac{D'_0(n)}{B'_0(n)} \\ = - \dfrac{1}{1 + 4\pi k \varrho Q_0(\varrho)\dfrac{dP_0(\varrho)}{d\varrho}} . \end{cases}$$

Durch die Gleichungen (12, 11) und die erste der Gleichungen (10) ist die Function φ für alle Puncte im Innern des Eisenkörpers, und dadurch der magnetische Zustand desselben bestimmt.

Es ist von Interesse, auch das Potential des magnetisirten Eisenkörpers in Beziehung auf einen äusseren Punct, d. h. die Grösse U_a, zu ermitteln. Wenn V und φ als Potentiale von Massen dargestellt sind, die auf der Oberfläche des Körpers liegen (wie es im Früheren geschehen ist), so findet die Gleichung:

$$V_a + \varphi_a + U_a = 0\,;$$

Statt. Daraus ergiebt sich leicht:

$$(13.)\quad \left\{\begin{aligned}
U_a &= \sum_0^\infty{}^m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m Q_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)}{R^m Q_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)} \left(E_m(n)\cos nx + F_m(n)\sin nx\right) dn \\
&\quad + \sum_1^\infty{}^m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m Q_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)}{R^m Q_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)} \left(E'_m(n)\cos nx + F'_m(n)\sin nx\right) dn, \\
\frac{E_m(n)}{A_m(n)} &= \frac{F_m(n)}{B_m(n)} = \frac{E'_m(n)}{A'_m(n)} = \frac{F'_m(n)}{B'_m(n)} \\
&= -\frac{2\pi k \dfrac{\varrho^m Q_m(\varrho)\left(m P_m(\varrho) + 2\varrho \frac{dP_m(\varrho)}{d\varrho}\right)}{1.2\ldots m}}{1 + 2\pi k \dfrac{\varrho^m Q_m(\varrho)\left(m P_m(\varrho) + 2\varrho \frac{dP_m(\varrho)}{d\varrho}\right)}{1.2\ldots m}}\,, \\
\frac{E_0(n)}{A_0(n)} &= \frac{F_0(n)}{B_0(n)} = \frac{E'_0(n)}{A'_0(n)} = \frac{F'_0(n)}{B'_0(u)} = -\frac{4\pi k \varrho Q_0(\varrho).\frac{dP_0(\varrho)}{d\varrho}}{1 + 4\pi k \varrho Q_0(\varrho).\frac{dP_0(\varrho)}{d\varrho}},
\end{aligned}\right.$$

wo ϱ wiederum den in der Gleichung (11) angegebenen Werth hat.

§. 4.

Die aufgestellten Formeln sind nicht gültig, wenn die Kräfte, welche den Eisencylinder magnetisiren, ganz oder zum Theil von einem elektrischen Strome herrühren, der den Cylinder umkreiset. In diesem Falle haben die Integrale, welche nach dem *Fourier*'schen Satze den mit A, B, A', B' bezeichneten Grössen

gleich sind, keine angebbaren Werthe, weil das Potential V nicht für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ verschwindet. Das Potential eines geschlossenen electrischen Stromes, dessen Intensität nach electro-magnetischem Maasse $= 1$ ist, ist gleich der Fläche, welche der Kegel, der zur Spitze den Punct hat, auf den das Potential sich bezieht, und der durch die Stromcurve geht, von der Kugelfläche ausschneidet, die um denselben Punct mit dem Radius 1 beschrieben ist. Man kann nach Willkür den einen oder den andern der beiden Theile, in welche die Kugel durch den Kegel zerlegt wird, als das Potential ansehen; nur muss man beachten, dass das Potential sich stetig ändert, wenn der Punct auf welchen es sich bezieht, seine Lage stetig ändert. (Vergl. *Neumann's* Allgemeine Gesetze der inducirten electrischen Ströme; Abh. der Berl. Ak. 1845. p. 73). Es folgt daraus, dass, wenn ein Strom von der Intensität 1, der den Cylinder einmal umfliesst, beim Magnetisiren mitwirkt, das Potential V' so angenommen werden kann, dass es für $x = -\infty$ verschwindet, dass es dann aber für $x = +\infty$ den Werth 4π erhält.

Es soll jetzt gezeigt werden, wie in einem solchen Falle der magnetische Zustand des Cylinders und seine Wirkung nach Aussen sich ermitteln lässt.

Es möge das System von Körpern, von welchen die magnetisirenden Kräfte ausgehen, als verschiebbar in der Richtung der x Axe betrachtet werden, und es sei ξ die x Ordinate eines mit diesem Systeme fest verbundenen Puncts. Alsdann werden V, φ und U Functionen, nicht bloss von x, r und ϑ, sondern auch von ξ sein. Differentiirt man die Gleichungen (1 und 2) nach ξ, so erhält man Gleichungen, die sich von diesen nur dadurch unterscheiden, dass V, φ und U durch $\frac{\partial V}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial U}{\partial \xi}$ ersetzt sind. Daraus folgt, dass, wenn $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ das Potential der magnetisirenden Kräfte ist, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}$ diejenige Function ist, deren Differentialquotienten die magnetischen Momente im Innern des Cylinders bestimmen, und $\frac{\partial U_a}{\partial \xi}$ das Potential des magnetisirten Cylinders in Beziehung auf einen äusseren Punct. Es verschwindet aber $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ sowohl für $x = -\infty$ als für $x = +\infty$, auch wenn die Kräfte, deren Potential V ist, von electrischen Strömen herrühren; daher können die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln benutzt werden, um $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}$ und $\frac{dU_a}{d\xi}$ aus $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ zu finden. Bestimmt man die Functionen A, B, A', B' so, dass die Gleichung erfüllt wird, in welche (8) übergeht, wenn man $\overline{V}$ durch $\frac{\partial \overline{V}}{\partial \xi}$ ersetzt, so sind die in (10 u. 13) für φ_i und U_a aufgestellten Ausdrücke $= \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}$ und $= \frac{\partial U_a}{\partial \xi}$.

Die Grössen V, φ, U sind aber Functionen von $x - \xi$; est ist daher:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = -\frac{\partial V}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\frac{\partial V}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial U}{\partial \xi} = -\frac{\partial U}{\partial x}\,.$$

Ersetzt man also in (8) $\overline{V}$ durch $\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}$, so geben die in (10 und 13) für φ_i und U_a aufgestellten Ausdrücke die Werthe von $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$ und $\frac{\partial U_a}{\partial x}$. Aus diesen erhält man durch Integration φ_i und U_a selbst. Die hierbei eintretenden Constanten der Integration können Functionen von r und ϑ sein. Um den magnetischen Zustand des Cylinders und seine Wirkung nach Aussen zu ermitteln, ist es nur nöthig die Differentialquotienten derselben nach r und ϑ zu kennen; diese werden dadurch bestimmt, dass $\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial U_a}{\partial r}$, $\frac{\partial U_a}{\partial \vartheta}$ für $x = \pm \infty$ verschwinden müssen.

§. 5.

Es soll der Fall näher untersucht werden, wo die magnetisirenden Kräfte von einem Kreisstrome herrühren, dessen Mittelpunct in der Axe des Cylinders liegt, und dessen Ebene senkrecht auf dieser Axe steht. Der Strom habe die Intensität 1 und den Radius s; der Mittelpunct desselben sei der Anfangspunct der Coordinaten; dann ist für $r = 0$:

$$V = 2\pi\left(1 + \frac{x}{\sqrt{(s^2 + x^2)}}\right),$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\pi s^2}{(s^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bedeutet $f(x)$ eine Function, für welche $f(-x) = f(+x)$ ist, so hat man nach dem *Fourier*'schen Satze:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dn\,.\cos nx \int_0^\infty d\alpha\,.\cos n\alpha\,.f(\alpha);$$

die Function $\frac{\partial V}{dx}$ genügt der für $f(x)$ ausgesprochenen Bedingung, daher ist für $r = 0$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4\int_0^\infty dn\,.\cos nx \int_0^\infty \frac{s^2 d\alpha\,.\cos n\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder, wenn man $s\alpha$ vor α schreibt:

$$\frac{dV}{dx} = 4\int_0^\infty dn.\cos nx \int_0^\infty \frac{d\alpha.\cos ns\alpha}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das nach α zu nehmende Integral kann man auf das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\cos p\alpha.d\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2)}},$$

zurückführen, und dieses lässt sich auf folgende Weise finden:

Es ist:

$$\int_0^\infty e^{-a^2y^2}dy = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{a},$$

also, wenn $a^2 = 1+a^2$ gemacht wird:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-y^2}.e^{-a^2y^2}dy,$$

mithin:

$$\int_0^\infty \frac{\cos p\alpha.d\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}dy\int_0^\infty \cos p\alpha.e^{-a^2y^2}da$$

$$= \int_0^\infty e^{-y^2}dy\cdot\frac{1}{y}\cdot e^{-\frac{p^2}{4y^2}},$$

oder, wenn man $y^2 = u$ setzt:

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-u}.e^{-\frac{p^2}{4u}}du,$$

oder endlich bei der in (§. 2.) gebrauchten Bezeichnung:

$$\int_0^\infty \frac{\cos p\alpha.d\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} = \tfrac{1}{2}Q_0\left(\frac{p^2}{4}\right).$$

Statt dieser Gleichung kann man auch

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{(p^2+\alpha^2)}} = \tfrac{1}{2}Q_0\left(\frac{p_2}{4}\right)$$

schreiben. Differentiirt man nun nach p, so erhält man:

$$-\int_0^\infty \frac{p\cos\alpha\,.\,d\alpha}{(p^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dp}\cdot Q_0\left(\frac{p^2}{4}\right),$$

oder, wenn man

$$\frac{d\,Q_0(\varrho)}{d\varrho} = Q'_0(\varrho) \tag{15.}$$

setzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos p\alpha\,.\,d\alpha}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{p^2}{4}Q'_0\left(\frac{p^2}{4}\right).$$

Der Gleichung (14) zufolge ist daher für $r = 0$:

$$\frac{\partial V}{dx} = -4\int_0^\infty dn\cos nx\cdot\frac{n^2s^2}{4}\,Q_0'\left(\frac{n^2s^2}{4}\right).$$

Für ein unbestimmtes r hat man aber nach der ersten der Gleichungen (9):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_0^\infty dn\cos nx\,\frac{P_0\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)}{P_0\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)}A_0(n);$$

die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke zeigt, dass:

$$A_0(n) = -4\,P_0\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)\cdot\frac{n^2s^2}{4}\,Q'_0\left(\frac{n^2s^2}{4}\right).$$

Setzt man, entsprechend der Gleichung (15):

$$\frac{dP_0(\varrho)}{d\varrho} = P_0'(\varrho),$$

so erhält man aus den Gleichungen (10, 11, 12 und 13):

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = 4\int_0^\infty \frac{dn\,.\cos nx\,P_0\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)\cdot\frac{n^2s^2}{4}\right)Q_0'\left(\frac{n^2s^2}{4}\right)}{1+4\pi k\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)P_0'\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)Q_0\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)}$$

$$\frac{\partial U_a}{\partial x} = 16\pi k\cdot\int_0^\infty \frac{dn\,.\cos nx\,.\,Q_0\left(\frac{n^2r^2}{4}\right).P_0\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)\cdot\frac{n^2R^2}{4}\cdot P_0'\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)\cdot\frac{n^2s^2}{4}\cdot Q_0'\left(\frac{n^2s^2}{4}\right)}{1+4\pi k\,\frac{n^2R^2}{4}\cdot P_0'\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)\cdot Q_0\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)}. \tag{16.}$$

Ich füge noch folgende Bemerkung hinzu.

Aus dem für $A_0(n)$ gefundenen Werthe folgt, dass $-\frac{1}{4}\frac{\partial V_i}{\partial x}$ dem bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty dn\cos nx\,.\,P_0\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)\cdot\frac{n^2s^2}{4}\,Q_0'\left(\frac{n^2s^2}{4}\right)$$

gleich ist; dieselbe Grösse lässt sich aber auch durch elliptische Integrale ausdrükken. Thut man dies, so erhält man den Werth dieses bestimmten Integrals durch elliptische Integrale ausgedrückt. Betrachtet man statt des Potentials eines Kreisstromes das Potential einer Kreislinie, die auf der anziehenden Masse gleichmässig vertheilt ist, so gelangt man auf ähnliche Weise zu der Gleichung

$$\int_0^\infty dn \cos nx\, P_0\left(\frac{n^2r^2}{4}\right).Q_0\left(\frac{n^2s^2}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{[x^2+(s+r)^2]}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{4sr}{x^2+(s+r)^2}\sin^2\varphi\right)}}.$$

Bei der Ableitung dieser Gleichung ist vorausgesetzt, dass $s > r$ ist; sie gilt auch nur unter dieser Voraussetzung, da das Integral auf ihrer linken Seite keinen angebbaren Werth mehr hat, wenn $s < r$ ist. Es geht dies aus der folgenden Betrachtung hervor.

Für ein unendlich grosses ϱ ist:

$$Q_0(\varrho) = \sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt[4]{\varrho}}e^{-2\sqrt{\varrho}}$$

$$P_0(\varrho) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\varrho}}e^{2\sqrt{\varrho}},$$

und daher für ein unendlich grosses n:

$$P_0 = \left(\frac{n^2r^2}{4}\right).Q_0\left(\frac{n^2s^2}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{(rs)}}\cdot\frac{1}{n}e^{-n(s-r)};$$

dieser Ausdruck verschwindet, wenn $s > r$, er wird aber unendlich gross, wenn $s < r$ ist.

§. 6.

Liegen die Mittelpuncte der magnetisirenden Kräfte in unendlicher Entfernung, so sind die hier angegebenen Entwickelungen nicht anwendbar. Aber in diesem Falle lässt sich der magnetische Zustand des Cylinders finden, indem man ihn als ein Rotations-Ellipsoïd mit unendlich grosser Excentricität betrachtet.

Ein Ellipsoïd wird durch Kräfte, die für alle seine Puncte gleich sind, gleichmässig magnetisirt, d. h. so, dass die magnetischen Momente, bezogen auf die Volumen-Einheit, constant sind. Bedeuten α, β, γ diese magnetischen Momente, sind ferner die Haupt-Axen des Ellipsoïds die Coordinaten-Axen und

a, b, c die Componenten der magnetisirenden Kraft, so ist, wie *Neumann* gezeigt hat:

$$(17.)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{ka}{1 + kA^0}, \\ \beta = \dfrac{kb}{1 + kB^0}, \\ \gamma = \dfrac{kc}{1 + kC^0}; \end{cases}$$

wo A^0, B^0, C^0 gewisse, von den Verhältnissen der Haupt-Axen abhängige, Grössen bezeichnen. Für ein Rotations-Ellipsoïd hat *Neumann* die Werthe dieser Grössen aufgestellt; führt man in diese Werthe die Bedingung ein, dass das Ellipsoïd ein unbegrenzter Cylinder sei, dessen Axe die x Axe ist, so erhält man:

$$A^0 = 0 \quad , \quad B^0 = C^0 = 2\pi;$$

für den Cylinder ist daher:

$$\alpha = ka$$

$$\beta = \frac{kb}{1 + 2\pi k}$$

$$\gamma = \frac{kb}{1 + 2\pi k}.$$

Kennt man den magnetischen Zustand, in welchen eine Eisenmasse durch Kräfte versetzt wird, deren Mittelpunct in unendlicher Entfernung sich befindet, so ist man im Stande, die magnetischen Momente derselben Eisenmasse anzugeben für den Fall, dass sie durch irgend welche Kräfte magnetisirt ist. Man gelangt hierzu durch Anwendung folgenden Satzes:

Das Potential einer Eisenmasse, die magnetisirt ist durch ein System I, in Beziehung auf ein System II, ist gleich dem Potential derselben Eisenmasse, wenn sie magnetisirt ist durch das System II, in Beziehung auf das System I.

Dieser Satz lässt sich wie folgt beweisen.

Es sollen V_1, φ_1, U_1, die drei Grössen V, φ, U für den Fall bezeichnen, dass die Eisenmasse durch das System I magnetisirt ist, V_2, φ_2, U_2 dieselben Grössen für den Fall, dass das System II den Magnetismus hervorruft. Das Potential der durch I magnetisirten Eisenmasse in Beziehung auf einen äusseren Punct ist dann:

$$U = -k \int \frac{ds}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_i},$$

wo r die Entfernung des in Rede stehenden Puncts von dem Elemente der Oberfläche, ds, bedeutet; das Potential der Eisenmasse in Beziehung auf das System II, welches durch $U_{1,2}$ bezeichnet werden mag, ist daher:

$$U_{1,2} = -k\int ds \,.\, V_2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i},$$

wo V_2 auf den Ort des Elements ds zu beziehen ist.

Für alle Puncte der Eisenmasse, also auch für ihre Oberfläche ist aber:

$$V_2 + \varphi_2 + U_2 = 0;$$

daraus folgt:

$$U_{1,2} = k\int ds \,.\, \varphi_2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} + k\int ds \,.\, U_2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i}.$$

Substituirt man in diese Gleichung:

$$U_2 = -k\int \frac{ds'}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial N_i},$$

wo ds' ein zweites Element der Oberfläche, N_i' die Normale desselben und ε die Entfernung der beiden Elemente ds und ds' bedeutet, so erhält man:

$$U_{1,2} = k\int ds \,.\, \varphi_2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} - k^2 \iint \frac{ds\,ds'}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial N_i};$$

der Ausdruck rechts in dieser Gleichung ändert seinen Werth nicht, wenn man die Indices 1 und 2 vertauscht, denn es ist

$$\int ds\, \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} = \int ds\, \varphi_i \frac{\partial \varphi_2}{\partial N_i}$$

weil φ_1 und φ_2 Potentiale von Massen ausserhalb des Eisenkörpers sind; hieraus geht die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes hervor.

Dieser Satz soll nun auf den Fall angewendet werden, dass das System II ein Magnetpol ist, der unendlich entfernt liegt. In diesem Falle ist

$$V_2 = -(ax + by + cz)$$

zu setzen, wo a, b, c die Componenten der Kraft bedeuten, die der Pol ausübt; es wird also:

$$\begin{aligned} U_{1,2} &= k\int ds(ax + by + cz)\frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} \\ &= ak\int ds \,.\, x \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} + bk\int ds \,.\, y \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} + ck\int ds \,.\, z \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i}; \end{aligned}$$

Die Coefficienten von a, b, c rechts in dieser Gleichung sind die negativ genommenen magnetischen Momente des Eisenkörpers, wenn er durch die Kräfte, deren Potential V_1 ist, magnetisirt ist; bezeichnet man diese Momente durch L_1, M_1, N_1, und beachtet, dass sie unabhängig von a, b, c sind, so erhält man:

$$L_1 = -\frac{\partial U_{1,2}}{\partial a}$$

$$M_1 = -\frac{\partial U_{1,2}}{\partial b}$$

$$N_1 = -\frac{\partial U_{1,2}}{\partial c}.$$

Nach dem vorausgeschickten Satze ist aber:

$$U_{1,2} = -k\int ds.V_1 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial N_i}.$$

oder auch, wenn man durch dv ein Element des Volumens des Eisenkörpers bezeichnet:

$$U_{1,2} = k\int dv\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial V_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right).$$

Substituirt man einen dieser beiden Werthe von $U_{1,2}$ in die Gleichungen für L_1, M_1, N_1, so erhält man diese durch φ_1 ausgedrückt; welches als bekannt vorausgesetzt ist. Bei der Ausführung der Differentiationen nach a, b, c verschwinden diese Grössen aus der Rechnung, da V_1 unabhängig und φ_2 eine lineare Function von ihnen ist.

Für ein Ellipsoïd, dessen Haupt-Axen die Coordinaten-Axen sind, ist:

$$\varphi_2 = \frac{ax}{1+kA_0}+\frac{by}{1+kB_0}+\frac{cz}{1+kC_0};$$

daraus ergiebt sich — wenn der Index 1 jetzt weggelassen wird:

$$L = -\frac{k}{1+kA_0}\int dv\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$M = -\frac{k}{1+kB_0}\int dv\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$N = -\frac{k}{1+kC_0}\int dv\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Diese Ausdrücke sind identisch mit denen, welche *Neumann* auf eine andere Weise hergeleitet hat.

Für den unbegrenzten Cylinder werden die Ausdrücke für die magnetischen Momente folgende:

$$(18.)\qquad \begin{cases} L = -k\int dv\frac{dV}{\partial x}, \\ M = -\frac{k}{1+2\pi k}\int dv\frac{dV}{dy}, \\ N = -\frac{k}{1+2\pi k}\int dv\frac{dV}{dz}. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen lässt sich folgendermassen schreiben:

$$L = -k\int dy\,.\,dz(V_\infty - V_{-\infty}),$$

wenn man durch V_∞ und $V_{-\infty}$ die Werthe von V für $x = \infty$ und $x = -\infty$ bezeichnet. Rührt V nur von Magnetpolen her, die im Endlichen liegen, so ist $V_\infty = V_{-\infty} = 0$, also auch $L = 0$; ist der Cylinder durch electrische Ströme, die ihn umkreisen, magnetisirt, so ist, welches auch die Gestalt der Stromcurven sei:

$$V_\infty - V_{-\infty} = 4\pi\,.\,I\eta,$$

wo I die Intensität der Ströme und η die Zahl der Windungen bedeutet, in welchen dieselben um den Cylinder geführt sind. Es wird dann also:

$$L = -4\pi^2 k\,.\,R^2 I\eta,$$

wo R wieder den Radius des Cylinders bezeichnet.

§. 7.

Der durch die Gleichungen (10, 11 und 12) bestimmte Ausdruck von φ_i vereinfacht sich sehr, wenn man den Radius des Cylinders, R, unendlich klein setzt. In diesem Falle wird ϱ, d. h. $\frac{n^2R^2}{4}$, unendlich klein; die Gleichungen (12) geben dann für jedes m, ausser für $m = 0$:

$$\frac{C_m(n)}{A_m(n)} = \frac{D_m(n)}{B_m(n)} = \frac{C'_m(n)}{A'_m(n)} = \frac{D'_m(n)}{B'_m(n)} = -\frac{1}{1+2\pi k}$$

und

$$\frac{C_0(n)}{A_0(n)} = \frac{D_0(n)}{B_0(n)} = \frac{C'_0(n)}{A'_0(n)} = \frac{D'_0(n)}{B'_0(n)} = -1.$$

Bezeichnet man das dem $m = 0$ entsprechende Glied der in (9) gegebenen Entwickelung von V_i mit $V_i^{(0)}$, d. h. setzt man

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_i \, d\vartheta = V_i^{(0)},$$

so giebt der in (10) aufgestellte Ausdruck für φ_i:

$$\varphi_i = -V_i^{(0)} - \frac{V_i - V_i^{(0)}}{1 + 2\pi k}. \tag{19.}$$

Diese Gleichung ist zunächst nur für den Fall bewiesen, in welchem die Gleichungen (9 und 10) gelten, d. h. für den Fall, dass der Cylinder durch Magnetpole, die in der Endlichkeit liegen, magnetisirt ist. Aber auch wenn ein elektrischer Strom, der den Cylinder umfliesst, bei seiner Magnetisirung mitwirkt, kann man sich der Gleichung (19) bedienen, um seinen Zustand kennen zu lernen. In diesem Falle ist nämlich:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = -\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x} - \frac{1}{1 + 2\pi k}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x} - \frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x}\right).$$

Durch Integration nach x erhält man hieraus:

$$\varphi_i = C - V_i^{(0)} - \frac{V_i - V_i^{(0)}}{1 + 2\pi k};$$

die Grösse C muss hier von r und ϑ unabhängig sein, da $\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial r}$, $\frac{\partial V_i}{\partial r}$ und $\frac{\partial V_i}{\partial \vartheta}$ für $x = \pm\infty$ verschwinden, und für dieselben Werthe von x auch $\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}$ und $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta}$ verschwinden sollen; daher wenn die Grösse C auch nicht $= 0$ ist, hat ihr Werth doch keinen Einfluss auf die Differentialquotienten von φ_i, die allein den magnetischen Zustand bestimmen.

Mit Hülfe der Gleichung (19) lassen sich leicht die magnetischen Momente des ganzen Cylinders berechnen; man gelangt dann für den hier betrachteten Fall zu den halben Ausdrücken, die in (18) angegeben sind.

Rühren die magnetisirenden Kräfte von einem kreisförmigen elektrischen Strome her, wie er in (§. 5) betrachtet worden ist, so wird die Wirkung des Cylinders nach Aussen durch die Gleichung (16) bestimmt. Durch die Annahme, dass R unendlich klein ist, geht diese Gleichung in

$$\frac{\partial U_a}{\partial x} = 4\pi k R^2 \int_0^\infty dn \,.\cos nx \,.n^2 Q_0\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)\frac{n^2 s^2}{4} Q'_0\left(\frac{n^2 s^2}{4}\right)$$

über. Hieraus lässt sich leicht der Ausdruck für das Potential des magnetisirten Cylinders in Beziehung auf einen zweiten Kreisstrom bilden, dessen Mittelpunct in der Axe des Cylinders liegt, und dessen Ebene senkrecht auf dieser Axe steht. Es sei W dieses Potential, der Radius des zweiten Kreisstromes sei $= r$, seine Intensität $= 1$, und x der Abstand der Mittelpuncte der beiden Ströme; dann hat man, mit Rücksicht darauf, dass die Summe der Massen, deren Potential U_a ist, verschwindet:

$$W = 2\pi \int_r^\infty \frac{\partial U_a}{\partial x} r\, dr\ .$$

Da $Q_0(\varrho)$ der Differentialgleichung genügt, die man aus (6) erhält, wenn man $m = 0$ setzt, so ist:

$$Q_0(\varrho) = \frac{d}{d\varrho}\varrho Q'_0(\varrho)\,,$$

und daher

$$\frac{n^2 r}{2} Q_0\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right) = \frac{d}{dr}\cdot\frac{n^2 r^2}{4} Q'_0\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right),$$

also

$$\int_r^\infty dr\, n^2 Q_0\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right) = -2\frac{n^2 r^2}{4} Q'_0\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right).$$

Hieraus folgt:

$$W = -16\pi^2 k R^2 \int_0^\infty dn \cos nx\, \frac{n^2 r^2}{4} Q'_0\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)\frac{n^2 s^2}{4} Q'_0\left(\frac{n^2 s^2}{4}\right).$$

Anhang.

Die Grundgleichungen der *Poisson*'schen Theorie des inducirten Magnetismus, nämlich die Gleichungen (1 und 2), können aus der Annahme hergeleitet werden, dass das magnetische Moment einer Kugel von weichem Eisen, bezogen auf die Volumen-Einheit, wenn die Kugel unter dem Einfluss einer für alle ihre Puncte constanten Kraft sich befindet, gleich der Intensität dieser Kraft, multiplicirt mit einer constanten Grösse ist. Die Versuche von *Müller* und *Weber* haben aber gezeigt, dass diese Annahme nicht zulässig ist, wenn die magnetisirende Kraft sehr stark ist, und haben zu dem Schlusse geführt, dass die Grösse, die nach der *Poisson*'schen Theorie constant sein soll, von der Intensität der magnetisirenden Kraft abhängt, in der Weise, dass sie um so kleiner wird, je mehr die Kraft wächst. Ich will die Gleichungen ableiten, die bei *dieser* Annahme an die Stelle der Gleichungen (1 und 2) gesetzt werden müssen.

Es seien α, β, γ die magnetischen Momente, reducirt auf die Einheit des Volumens, einer Kugel, auf die eine constante magnetisirende Kraft wirkt, deren

Componenten X, Y, Z sind. Wenn die Coëncitivkraft des Eisens $= 0$ ist, d. h. wenn der magnetische Zustand desselben allein von den Kräften abhangt, die in dem betrachteten Augenblicke auf dasselbe wirken, so muss die magnetische Axe der Kugel mit der Richtung der Kraft zusammenfallen; es muss daher

$$\alpha : \beta : \gamma = X : Y : Z$$

sein, und folglich nach der gemachten Annahme:

$$(20.) \qquad \begin{cases} \alpha = Xf(\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}) \\ \beta = Yf(\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}) \\ \gamma = Zf(\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}) , \end{cases}$$

wo f eine Function ist, die abnimmt, wenn ihr Argument wächst.

Nun stelle man sich in einer beliebig gestalteten Eisenmasse, die magnetisirenden Kräften ausgesetzt ist, zwei concentrische Kugelflächen, S und S' vor: beide unendlich klein, die zweite aber gegen die erste unendlich gross. In beiden Kugeln können die magnetischen Momente, reducirt auf die Volumen-Einheit, als constant betrachtet werden; die Kräfte, die auf die Puncte der kleineren Kugel von den magnetischen Molecülen, die zwischen den beiden Kugelflächen liegen, ausgeübt werden, heben daher einander auf. Die kleinere Kugel wird demnach in ihrem magnetischen Zustande durch die Kräfte, welche von Aussen her auf die Eisenmasse wirken erhalten, so wie von den Kräften, die von den magnetischen Molecülen dieser, mit Ausschluss der Kugel S', ausgeübt werden. Alle diese Kräfte können innerhalb der Kugel S als constant angesehen werden; man darf daher die Gleichungen (20) auf diese Kugel anwenden, wenn man unter X, Y, Z die Componenten der Resultante des genannten Kräfte versteht. Es seien x, y, z die Coordinaten eines Puncts im Innern der Kugel S, V sei das Potential der äusseren Kräfte in Beziehung auf diesen Punkt, und (X), (Y), (Z) seien die Kräfte, die von der magnetisirten Eisenmasse, mit Ausschluss der Kugel S', auf denselben Punct ausgeübt werden; dann erhält man:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} + (X)$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} + (Y)$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z} + (Z).$$

Setzt man

$$(21.)\quad U = \int dx'dy'dz'\left(\alpha'\frac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial x'}+\beta'\frac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial y'}+\gamma'\frac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial z}\right),$$

wo x', y', z' die Coordinaten eines beliebigen Puncts der Eisenmasse, α', β', γ' die entsprechenden magnetischen Momente bedeuten, ε die Entfernung dieses Puncts von dem Puncte (x, y, z) bezeichnet, und die Integration über die ganze Eisenmasse auszudehnen ist, so ist, wie *Poisson* gezeigt hat:

$$(X) = -\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{4\pi}{3}\alpha$$

$$(Y) = -\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{4\pi}{3}\beta$$

$$(Z) = -\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{4\pi}{3}\gamma$$

Es wird daher:

$$X = -\frac{\partial(V+U)}{\partial x}+\frac{4\pi}{3}\alpha$$

$$Y = -\frac{\partial(V+U)}{\partial y}+\frac{4\pi}{3}\beta$$

$$Z = -\frac{\partial(V+U)}{\partial z}+\frac{4\pi}{3}\gamma,$$

oder, wenn man φ durch die Gleichung

$$(22.)\qquad V+U+\varphi = 0$$

definirt:

$$X = \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{4\pi}{3}\alpha$$

$$Y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{4\pi}{3}\beta$$

$$Z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{4\pi}{3}\gamma.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen **(20)**, nachdem man dieselben auf die Form:

$$X = \alpha f_1[V(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)]$$

$$Y = \beta f_1[V(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

$$Z = \gamma f_1[V(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)]$$

gebracht hat, so erhält man:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \alpha\left[f_1(V(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)) - \frac{4\pi}{3}\right]$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \beta\left[f_1(V(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)) - \frac{4\pi}{3}\right]$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \gamma\left[f_1(V(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)) - \frac{4\pi}{3}\right],$$

und hieraus:

$$(23.)\quad \begin{cases} \alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x} F\left[V\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right] \\ \beta = \frac{\partial\varphi}{\partial y} F\left[V\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right] \\ \gamma = \frac{\partial\varphi}{\partial z} F\left[V\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right]. \end{cases}$$

Bezeichnet man den dem Puncte (x', y', z') entsprechenden Werth von φ mit φ', und setzt

$$F\left[V\left(\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\right)^2\right)\right] = F',$$

so erhält man aus (21):

$$(24.)\quad U = \int\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial x'} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial y'} + \frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\cdot\frac{\partial\frac{1}{\varepsilon}}{\partial z'}\right)F'dx'dy'dz'.$$

Die Gleichungen (22 und 24) sind es, durch welche die Gleichungen (1 und 2) bei der jetzigen Annahme ersetzt werden müssen; sie werden mit denselben *identisch*, wenn man F als constant betrachtet und $= k$ macht. Ist die Function F bekannt, und hat man aus (22 und 24) φ bestimmt, so geben die Gleichungen (23) die magnetischen Momente im Innern des Körpers, und der Ausdruck für U in (24) giebt, wenn der Punct (x, y, z) ausserhalb der Eisenmasse angenommen wird, das Potential derselben in Beziehung auf diesen Punct an.

Ist der Eisenkörper ein Ellipsoïd, und ist die Kraft, die auf denselben wirkt, eine constante, so genügt man den Gleichungen (22 und 24) welches auch die Function F sei, wenn man φ einer linearen Function von x, y, z gleich macht; d. h. das Ellipsoïd wird auch bei der jetzt zu Grunde gelegten Annahme *gleichmässig* magnetisirt. Ist

$$V = -(ax+by+cz),$$

und sind die Haupt-Axen des Ellipsoïds die Coordinaten-Axen, so hat man

$$\varphi = \frac{a}{1 + kA^0}x + \frac{b}{1 + kB^0}y + \frac{c}{1 + kC^0}z$$

zu setzen, wo A^0, B^0, C^0 dieselbe Bedingung haben wie in den Gleichungen (17) und wo k aus der Gleichung

$$F\left(\sqrt{\left(\frac{a^2}{(1 + kA^0)^2} + \frac{b^2}{(1 + kB^0)^2} + \frac{c^2}{(1 + kC^0)^2}\right)}\right) = k$$

zu bestimmen ist.

Weber hat in seinen electrodynamischen Maassbestimmungen S. 569 Messungen mitgetheilt, die er über das magnetische Moment eines Eisenstäbchens angestellt hat, welches einer, in der Richtung der Axe wirkenden, für alle seine Puncte constanten Kraft unterworfen war. Substituirt man mit *Weber* für die cylindrische Form des Eisens eine ihr möglichst nahe kommende ellipsoïdische, so kann man aus diesen Messungen, und den eben angegebenen Gleichungen die Werthe der Function F für gewisse Werthe ihres Arguments berechnen. In der folgenden Tafel sind die Ergebnisse dieser Rechnung zusammengestellt; das Argument der Function F ist mit u bezeichnet; die mit No. überschriebenen Columnen enthalten die Nummern der *Weber*'schen Versuche, aus denen die nebenstehenden Zahlen hergeleitet sind.

№	u	$F(u)$	№	u	$F(u)$
1	301	23,5	8	2484	5,6
2	823	13,5	9	1975	6,7
3	1184	10,2	10	1583	8,1
4	1512	8,4	11	1297	9,5
5	1773	7,4	12	967	12,0
6	2080	6,4	13	612	16,9
7	2397	5,7	14	296	25,0

$F(u)$ ist eine reine *Zahl*; u aber ist eine *Kraft*. Als Einheit derselben ist diejenige Kraft vorausgesetzt, die auf die Masse eines Milligramms wirkend, in einer Secunde eine Geschwindigkeit von einem Millimeter hervorbringt; es ist dies dieselbe Einheit, bei deren Zugrundelegung *Gauss* in seiner Abhandlung: „*Intensitas vis magneticae etc.*" die horizontale Componente des Erdmagnetismus zu *Göttingen* = 1,78 findet.

Weber und *Müller* sind durch ihre Versuche auf den Schluss geführt, dass das magnetische Moment eines Eisenkörpers sich einer endlichen Grenze nähert, wenn die Intensität der magnetisirenden Kraft ins Unendliche wächst; hieraus folgt in Bezug auf die Function F, dass für ein unendlich grosses u,

$$F(u) = \frac{K}{u} \tag{25.}$$

ist, wo k eine Constante bedeutet. Man sieht dieses leicht, wenn man sich den Eisenkörper als ein Ellipsoïd vorstellt, welches durch eine in der Richtung einer Axe wirkende Kraft magnetisirt wird.

Ist der Eisenkörper ein unbegrenzter und unendlich dünner Cylinder, und sind überdies die Mittelpuncte der magnetisirenden Kräfte symmetrich um die Axe vertheilt, so dass, nach der Bezeichnung in (19) $V = V^{(0)}$ ist, so genügt man den Gleichungen (22 u. 24) durch die Annahme:

$$\varphi = -V \quad , \quad U = 0. \tag{26.}$$

Dass die Gleichung (24) durch dieselbe erfüllt wird, geht aus folgender Betrachtung hervor: Wenn der Radius des Cylinders unendlich klein ist, so werden zu dem Werthe des Integrals U, in welchem φ durch $-V$, oder φ' durch $-V'$, ersetzt angenommen werden soll, diejenigen Theile des Cylinders, welche in endlicher Entfernung von dem Puncte (x, y, z) liegen, nur etwas verschwindend Kleines beitragen. Man wird daher bei der Integration $\frac{\partial V'}{\partial x'}$, $\frac{\partial V'}{\partial y'}$, $\frac{\partial V'}{\partial z'}$, und folglich F' als constant betrachten dürfen; die zu beweisende Gleichung geht hiernach in

$$0 = \int dx'dy'dz' \left(\frac{\partial V'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{\varepsilon}}{\partial x'} + \frac{\partial V'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{\varepsilon}}{\partial y'} + \frac{\partial V'}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{\varepsilon}}{\partial z'} \right)$$

über. Die Richtigkeit hiervon folgt aber daraus, dass bei der *Poisson*'schen Theorie in dem hier betrachteten Falle durch die Annahme (26) den Bedingungen der Aufgabe genügt wird; wie in (§. 7) gezeigt worden ist.

Die magnetischen Momente α, β, γ in dem unendlich dünnen Cylinder haben folgende Werthe:

$$(27.)\quad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{\partial V}{\partial x}\cdot F\left(\sqrt{\left[\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]}\right) \\ \beta = -\dfrac{\partial V}{\partial y}\cdot F\left(\sqrt{\left[\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]}\right) \\ \gamma = -\dfrac{\partial V}{\partial z}\cdot F\left(\sqrt{\left[\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]}\right). \end{cases}$$

Ich bemerke noch, dass diese Ausdrücke für α, β, γ auch gelten, wenn die Gestalt der Eisenmasse eine ganz beliebige ist, sobald die magnetisirenden Kräfte von unendlich grosser Intensität sind; es ist dann nämlich V unendlich gross, U bleibt endlich in Folge der durch die Gleichung (25) ausgesprochenen Eigenschaft der Function F. Aus der Gleichung (22) folgt also, wenn man eine endliche Grösse gegen unendlich grosse vernachlässigt:

$$\varphi = -V$$

und hieraus ergeben sich unmittelbar die Gleichungen (27). Durch Benutzung von (25) kann man diese hier auf die Form bringen:

$$\alpha = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x}}{\sqrt{\left[\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]}}K\ ,\quad \beta = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial y}}{\sqrt{\left[\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]}}K$$

$$\gamma = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial z}}{\sqrt{\left[\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]}}K.$$

Diese Form zeigt, dass die magnetische Intensität in allen Puncten der Eisenmasse dieselbe ist, nämlich $= K$; die magnetische Axe fällt überall mit der Richtung der magnetisirenden Kraft zusammen.

Breslau, im Juni 1853.

23.

Sur la construction des normales qu'on peut abaisser d'un point donné sur une section conique complètement décrite.

(Par *M. F. Joachimsthal*, prof. de math. à l'Université de Halle.)

On sait que chaque problème qui dépend d'une équation du quatrième degré, se résout par la règle et le compas, en supposant une seule section conique complètement décrite. C'est sur ce principe que repose la solution du problème en question due à *De la Hire*. Tandis que le Géomètre grec qui a traité, le premier, cette question, *Appollonius de Perge*, se sert, outre la conique donnée, d'une hyperbole équilatère, *de la Hire* ne fait usage que d'une circonférence de cercle, dont les intersections avec la courbe, ont, à un facteur près, les mêmes abscisses que les pieds des normales. Mais cette méthode offre plusieurs inconvénients qu'il est bon de signaler. En premier lieu, telle, que *de la Hire* l'a représentée, sa méthode n'est qu'un résultat de calcul et ne se rattache à aucune proposition de Géométrie; ensuite, le choix de l'inconnue comporte nécessairement une ambiguité et en dernier lieu, les formules qui déterminent la position et le rayon de la circonférence son trop compliquées pour se prêter aisément aux constructions graphiques. On adressera peut-être, et à juste titre, ce dernier reproche également à la nouvelle solution qu'on va lire; et néanmoins je n'hésite pas à la publier; car quoiqu'elle ne soit pas encore une solution définitive, les propositions si simples sur lesquelles elle repose, pourront servir de point de départ pour arriver à une solusion purement géométrique du problème dont il s'agit.

1.

Théorème I. Si l'on abaisse d'un sommet s d'une conique des perpendiculaires sur quatre normales à la courbe, issues d'un même point f, les

quatre points l, l', l'', l''', où ces perpendiculaires rencontrent la courbe de nouveau, seront sur une circonférence de cercle (C).

Démonstration. Soit

$$(1.) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'équation de la courbe rapportée aux axes principaux, et déterminons la position d'un point quelconque λ de la courbe par un angle φ, de manière qu'on ait $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$; soit en outre s le sommet qui correspond à $\varphi = 0$; je dis que la perpendiculaire abaissée de s sur la normale au point λ rencontrera la courbe en un point l, pour lequel on aura $\varphi' = 2\varphi$, φ' étant la valeur de l'angle φ qui appartient à l. En effet, la perpendiculaire abaissée sur la normale étant parallèle à la tangente, les arcs elliptiques $s\lambda$ et sl seront les projections de deux arcs de cercle, dont l'un est la moitié de l'autre; mais les angles φ et φ' étant la mesure de ces arcs, l'équation $\varphi' = 2\varphi$ aura évidemment lieu.

Désignant par ξ et η les coordonnées du point f, l'équation

$$(2.) \qquad a\xi\sin\varphi - b\eta\cos\varphi = (a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi$$

donnera les valeurs de φ qui correspondent aux pieds des normales, issues de f. Pour obtenir les intersections l, l', l'', l''' de la courbe et des perpendiculaires abaissées du sommet s à ces normales, il faut établir l'équation en 2φ. En élevant (2) au carré, on obtient

$$(a^2-b^2)^2\sin 2\varphi^2 = 2(a^2\xi^2+b^2\eta^2) - 2\cos 2\varphi\,(a^2\xi^2-b^2\eta^2) - 4ab\xi\eta\sin 2\varphi\,.$$

Si l'on pose $b\sin 2\varphi = y$, $a\cos 2\varphi = x$, l'équation précédente se transforme en

$$(3.) \quad \frac{(a^2-b^2)}{b^2}y^2 = 2(a^2\xi^2+b^2\eta^2) - \frac{2x}{a}(a^2\xi^2-b^2\eta^2) - 4a\xi\eta y.$$

Retranchons cette équation de

$$(a^2-b^2)\left\{x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2-a^2\right\} = 0,$$

nous aurons

$$(4.) \quad (a^2-b^2)(x^2+y^2-a^2) = 2\left\{\frac{x}{a}(a^2\xi^2-b^2\eta^2) + 2a\xi\eta y - (a^2\xi^2+b^2\eta^2)\right\},$$

ce qui est l'équation du cercle C.

2.

Théorème II. Si l'on abaisse du sommet s au diamètre mené par f une perpendiculaire qui rencontre la conique en f', je dis que la tangente de la courbe en f' sera la corde commune de C, et de la circonférence décrite sur l'axe qui passe par le sommet s, comme diamètre.

Démonstration. En posant

$$a\frac{a^2\xi^2 - b^2\eta^2}{a^2\xi^2 + b^2\eta^2} = \xi' \quad , \quad b\frac{2ab\xi\eta}{a^2\xi^2 + b^2\eta^2} = \eta',$$

l'équation (4) se transforme en

$$(5.) \quad x^2 + y^2 - a^2 = 2\frac{a^2\xi^2 + b^2\eta^2}{a^2 - b^2}\left(\frac{x\xi'}{a^2} + \frac{y\eta'}{b^2} - 1\right).$$

Mais cette équation démontre notre théorème, en remarquant que ξ' et η' sont les coordonnées du point f', parcequ'on a

$$\frac{\xi'^2}{a^2} + \frac{\eta'^2}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{a - \xi'}{\eta'} = \frac{\eta}{\xi}.$$

3.

En se servant, outre les deux points, fournit par la proposition précédente, de l'ordonnée du centre de C, on obtient la solution suivante, où j'ai gardé, pour abréger le discours, les désignations des n° 1 et 2.

Problème. Abaisser d'un point donné f des normales sur une conique complètement décrite.

Solution. Abaissons du sommet s qui se trouve sur l'axe des abscisses, une perpendiculaire au diamètre qui passe par f; soit f' le point d'intersection de cette perpendiculaire avec la courbe. Déterminons les intersections i et i' de la tangente f' et de la circonférence décrite sur l'axe qui passe par s comme diamètre. Décrivons ensuite une circonférence qui passe par i et i' et dont l'ordonnée du centre soit $\frac{2a\xi\eta}{a^2 - b^2}$.

Cela fait, si cette circonférence coupe la courbe en l, l', l'', l''', les perpendiculaires abaissées de f sur les cordes sl, sl', sl'', sl''' seront les quatre normales que l'on peut abaisser de f sur la conique.

Chacune de ces perpendiculaires, p. ex. celle abaissée sur sl — rencontre

la courbe en deux points; mais elle n'est normale à la courbe que dans le point, où la tangente est parallèle à la corde sl, ce qui se détermine sans ambiguité en menant le diamètre qui divise sl en deux parties égales.

4.

Au lieu d'établir quelques généralisations dont les théorèmes (I et II) sont susceptibles, je vais indiquer une proposition, qui est fondamentale dans cette théorie. C'est le théorème que voici:

Théorème III. Soient p, q, r trois points d'une conique, tels que les normales à la courbe menées par p, a et r concourent en un seul point. Si l'on tire par le sommet s trois parallèles à qr, rp, pq, qui vont rencontrer la conique en p', q', r', le centre de gravité de ces trois points sera sur l'axe principal qui passe par s.

C'est à peine besoin d'ajouter que les théorèmes précédents s'appliquent indifféremment à l'ellipse et à l'hyperbole.

Berlin, le 10 Septembre 1853.

24.

Bemerkung zur Theorie des Grössten und Kleinsten.

(Von Herrn *Simon Spitzer*, Assistent und Privatdozent der Mathematik am K. K. polytechnischen Institute zu Wien.)

Man suche die höchsten und tiefsten Puncte der Fläche, deren Gleichung

$$z = \varphi(x, y) \tag{1.}$$

ist. Um sie zu finden, hat man bekanntlich von den beiden Gleichungen

$$\frac{dz}{\partial x} = 0, \quad \frac{dz}{\partial y} = 0. \tag{2.}$$

Die reellen Wurzeln x und y zu suchen, ihre Werthe in

$$\varphi(x+h\ ,\ y+k) - \varphi(x\ ,\ y)$$

zu substituiren, und zu sehen, ob der so erhaltene Ausdruck für alle sehr kleinen und reellen Werthe von h und k stets *dasselbe Zeichen* beibehält, oder nicht. Im ersten Falle hat man, je nachdem das Zeichen *positiv* oder *negativ* ist, ein *Minimum* oder *Maximum*, im zweiten Falle weder ein Minimum noch ein Maximum.

Es kann nun sein, dass $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ einen *gemeinschaftlichen* x und y *enthaltenden Factor* haben. Wäre etwa

$$\frac{dz}{\partial x} = \psi(x, y).P \quad ; \quad \frac{dz}{\partial y} = \psi(x, y).Q$$

so werden offenbar beide Gleichungen (2) durch

$$\psi(x, y) = 0$$

befriedigt, also für *unendlich viele* Werthe von x und y. Ich behaupte, in diesem Falle erhält man im Allgemeinen statt höchste und tiefste *Puncte*, höchste und tiefste *Linien*, deren Gleichungen

$$(3.) \qquad \begin{cases} z = \varphi(x, y) \\ \psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

sind. *Ich nenne nämlich höchste und tiefste Linien auf krummen Flächen solche Linien, deren sämmtliche Puncte dieselbe Höhe haben, deren nächste, aber ausser ihnen auf der Fläche befindlichen Puncte entweder alle tiefer, oder alle höher liegen.*

Dass sämmtliche Puncte der Curve (3) *dieselbe* Höhe haben, ist leicht zu sehen, denn $\psi(x, y) = 0$ bringt identisch $\frac{dz}{\partial x}$ und $\frac{dz}{\partial y}$ auf Null, und diess hat zur unmittelbaren Folge, dass sämmtliche an die Curve gezogenen Tangenten *horizontal* laufen; also ist die Curve selbst horizontal. Ihre Gleichungen müssen sich demnach auf die Form

$$(4.) \qquad \begin{cases} z = h \\ \psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

bringen lassen; unter h eine *constante* Zahl verstanden. Man wird um diese Form-Aenderung ihrer Gleichungen hervorzubringen $\varphi(x, y)$ durch $\psi(x, y)$ dividiren. Ist der Quotient $f(x, y)$ und der Rest h, so hat man:

$$z = \varphi(x, y) = \psi(x, y) \cdot f(x, y) + h,$$

was sich, für $\psi(x, y) = 0$, auf $z = h$ zurückzieht

Um zu untersuchen, in welchen Fällen die Curve, deren Gleichungen

$$(3.) \qquad \begin{cases} z = \varphi(x, y) \\ \psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

sind, und die man sich in der Form

$$(4.) \qquad \begin{cases} z = h \\ y = f(x) \end{cases}$$

vorstellen kann, wirklich eine höchste oder tiefste Linie der Fläche $z = \varphi(x, y)$ sei, gehe man von ihr zu andern, auf derselben Fläche in unmittelbarer Nähe liegenden über; etwa dadurch, dass man y um δy wachsen lässt, unter δy eine

beliebige Function von x verstanden, die stets einen sehr kleinen numerischen Werth hat.

Man erhält dadurch, als Gleichungen einer in der Nähe der Curve (3) auf der Fläche $z = \varphi(x,y)$ liegenden Curve, folgende:

$$(5.) \qquad \begin{cases} z = \varphi(x,y) \\ y = f(x) + \delta y. \end{cases}$$

Die Substitution $y = f(x) + \delta y$ in $z = \varphi(x,y)$ und darauf folgende Entwicklung nach der *Taylor*'schen Reihe giebt:

$$z = h + \delta y \cdot \frac{dz}{\partial y} + \frac{\delta y^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \ldots\ldots$$

oder, da $\frac{dz}{\partial y}$ wegen des innehabenden Factors $\psi(x,y)$ gleich Null wird:

$$z = h + \frac{\delta y^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \ldots\ldots$$

Behält $\frac{d^2 z}{\partial y^2}$ für alle Puncte der Curve $\psi(x,y) = 0$ einerlei Zeichen, so ist offenbar die Linie (3) eine höchste oder tiefste. Sollte $\frac{d^2 z}{\partial y^2}$ Null werden, so müsste man, nach der ähnlichen Theorie des Maximum und Minimums das nächste Glied der Reihe zu Rathe ziehen; ist dieses positiv oder negativ, so giebt es weder eine höchste, noch eine tiefste Linie; ist es ebenfalls Null, so entscheidet das Zeichen des 4ten Differentialquotienten, u. s. f.

Um daher die höchsten und tiefsten Linien einer Fläche

$$z = \varphi(x,y)$$

zu finden, berechne man die Ausdrücke

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dx}, \quad \frac{d\varphi(x,y)}{dy}$$

und sehe, ob sie einen *gemeinschaftlichen variablen Factor* haben. Es sei ein solcher vorhanden, und heisse

$$\psi(x,y).$$

Dann untersuche man, ob $\frac{d^2\varphi(x,y)}{\partial y^2}$ für alle Werthe, die der Gleichung $\psi(x,y)=0$ genügen, *positiv* oder *negativ* ist. Im ersten Falle ist die Curve, deren Gleichungen

$$\begin{cases} z = \varphi(x, y) \\ \psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

sind eine *tiefste*, im zweiten Falle eine *höchste*. Ist aber $\frac{d^2\varphi}{\partial y^2}$ (für $\psi(x,y)=0$) gleich Null, so bleibe man bei dem ersten hiefür nicht verschwindenden Gliede der Reihe

$$\frac{d^3\varphi(x,y)}{dy^3}, \quad \frac{d^4\varphi(x,y)}{\partial y^4}, \quad \frac{\partial^5\varphi(x,y)}{\partial y^5}, \ldots\ldots$$

stehen. Ist $\frac{d^n\varphi(x,y)}{\partial y^n}$ dieses erste Glied; so hat man eine höchste oder tiefste Linie, wenn *n gerade* ist, und wenn es dasselbe Zeichen beibehält für alle, der Gleichung $\psi(x,y)=0$ genügenden Werthe; aber weder eine höchste noch eine tiefste Linie wenn auch nur eine der beiden Bedingungen nicht erfüllt wird.

Sollte der *n*te Differentialquotient stets dasselbe Zeichen beibehalten, mit Ausnahme einiger specieller Werthe, für welche er Null wird, so muss man für diese speciellen Werthe die Untersuchung auf dieselbe Weise fortsetzen. Man bilde nämlich die nächsten Differentialquotienten:

$$\frac{d^{n+1}\varphi(x,y)}{\partial y^{n+1}}, \quad \frac{\partial^{n+2}\varphi(x,y)}{\partial y^{n+2}}, \quad \frac{\partial^{n+3}\varphi(x,y)}{\partial y^{n+3}}, \ldots\ldots$$

substituire in denselben die speciellen Werthe, welche $\frac{d^n\varphi}{\partial y^n}$ zu Null machen, und bleibe bei dem ersten, für diesen speciellen Werth nicht verschwindenden Differentialquotienten stehen; ist dieser von *gerader* Ordnungszahl, und stimmt das Zeichen desselben mit dem Zeichen des *n*ten Differentialquotienten überein, so hat man auch in diesem Falle eine höchste oder tiefste Linie.

Beispiel. Es sei

$$z = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 10(x^2 - y^2 + 1) + 9$$

$$\frac{dz}{\partial x} = 4x(x^2 - y^2 - 4) \quad ; \quad \frac{dz}{\partial y} = -4y(x^2 - y^2 - 4)$$

Diese beiden Ausdrücke haben den gemeinschaftlichen Factor $x^2 - y^2 - 4$; ferner ist $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^2 + 12y^2 + 16$; und setzt man hierin $x^2 = y^2 + 4$, so ist $\frac{d^2 z}{\partial y^2} = 8y^2$. Da dieses stets *positiv* ist (mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn $y = 0$, $x = \pm 2$ ist), so ist die Curve, deren Gleichungen

$$\begin{cases} z = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 10(x^2 - y^2 + 1) + 9 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$$

oder reducirt

$$\begin{cases} z = -16 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$$

sind, eine *tiefste* auf der Fläche $z = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 10(x^2 - y^2 + 1) + 9$ liegende Curve; falls nur noch die Substitution von $y = 0$, $x = \pm 2$ den dritten Differentialquotienten zu Null, den vierten aber positiv macht, oder falls der vierte Differentialquotient auch Null ist, den fünften zu Null, u. s. f.

Nun ist:

$$\frac{d^3 z}{\partial y^3} = 24y \quad , \quad \frac{d^4 z}{\partial y^4} = 24$$

also ist bestimmt die Curve eine tiefste, weil der dritte Differentialquotient gleich Null, der vierte gleich 24 ist.

Es ist leicht, diese Analyse auf Functionen von beliebiger Zahl von Variablen auszudehnen

Wien, im September 1853.

25.

Bemerkungen über den *Sturm*'schen Satz.

(Von Herrn Prof. *F. Joachimsthal* zu Halle a. d. S.)

§. 1.

Der merkwürdige von *Sturm* gefundene Satz, vermittelst dessen man die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung bestimmen kann, die zwischen beliebigen Gränzen liegen, lautet bekanntlich folgendermaassen:

Es sei $f(x) = 0$ eine Gleichung $n$ten Grades, ohne zwei- und mehrfache Wurzeln, $f'(x)$ der erste Differentialquotient von $f(x)$; wir wollen beide Ausdrücke auch zuweilen mit V und V_1 bezeichnen. — Man dividire mit V_1 in V, bis man zu einem Reste gelangt, dessen Grad niedriger ist, als der von V_1, verwandle die Zeichen aller Glieder dieses Restes (die + in — und umgekehrt), und nenne V_2 den so veränderten Rest. Man dividire mit demselben in V_1, bis man zu einem Reste gelangt, dessen Grad niedriger ist, als der von V_2, verwandle alle Zeichen desselben in die entgegengesetzten, nenne diesen neuen Ausdruck V_3 u. s. w. Bei Fortsetzung dieser Rechnung kommt man zuletzt zu einem von x freien Reste, den wir nachdem sein Zeichen verändert ist, V_m nennen wollen.

Setzt man in die Reihe der Grössen

$$(1.) \qquad V,\ V_1,\ V_2,\ldots V_m$$

für x den Werth a, und bestimmt die Anzahl ω der Zeichenwechsel, welche dadurch in ihr entstehen; substituirt man ferner in (1) b statt x, und nennt ω' die Anzahl der durch diese Substitution entstehenden Zeichenwechsel, dann ist $\omega - \omega'$ die Anzahl der zwischen a und b liegenden Wurzeln von $f(x) = 0$.

Im Allgemeinen enthält die Reihe (1), wenn V vom $n$ten Grade ist, $n+1$ Grössen; die Quotienten, welche die Division ergiebt, sind dann sämmtlich

vom ersten Grade. Bezeichnet man sie mit $q_1, q_2, \ldots . q_{n-1}$, so lässt sich der Zusammenhang zwischen den Grössen (1) folgendermaassen darstellen:

$$(2.)\quad V = V_1 q_1 - V_2 \quad ; \quad V_1 = V_2 q_2 - V_3 \; ; \ldots . V_{n-2} = V_{n-1} q_{n-1} - V_n .$$

Führt man noch überdiess die durch

$$(2.)^* \qquad V_{n-1} = V_n q_n$$

erklärte Grösse q_n ein, so ergeben die vorhergehenden Relationen die Kettenbruch-Entwickelung:

$$(3.)\qquad \frac{V}{V_1} = q_1 - \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3} - \ldots . - \frac{1}{q_{n-1}} - \frac{1}{q_n} .$$

§. 2.

Der einfache und überaus klare von *Sturm* gegebene Beweis (s. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences Tom. VI, 1835) beruht auf folgenden Puncten.

1) In der Reihe (1) können nie zwei auf einander folgende Grössen V für einen Werth des x verschwinden.

2) Verschwindet für $x = c$ eine der Zwischenfunctionen $V_1, V_2, \ldots V_{m-1}$, etwa V_i, so haben für denselben Werth des x V_{i-1} und V_{i+1} entgegengesetztes Zeichen. Da aber nur ein Zeichenwechsel entstehen kann, welches Zeichen man auch zwischen + und − einschaltet, so bietet die Reihe (1) für $x = c - u$ und $x = c + u$ gleich viele Zeichenwechsel dar, unter u eine kleine positive Grösse verstanden.

3) Wenn $x = c$ eine Wurzel von $f(x) = 0$ ist, so verliert die Reihe (1), während x von $c - u$ bis $c + u$ wächst, im Anfange einen Zeichenwechsel, weil $\frac{f(c-u)}{f'(c-u)}$ negativ, $\frac{f(c+u)}{f'(c+u)}$ positiv ist, oder anders ausgedrückt, weil V und V_1 für $x = c - u$ einen Zeichenwechsel, für $x = c + u$ eine Zeichenfolge darbieten.

Die erste und zweite dieser Eigenschaften der Grössen V würde noch fortbestehen, wenn bei der Bildung von $V_2, V_3, \ldots$ statt V_1 oder $f'(x)$ eine beliebige Function $\psi(x)$ des $(n-1)$ten Grades angewendet würde, vorausgesetzt,

dass $\psi(x)$ und $f(x)$ ohne gemeinschaftlichen Factor wären. *Sturm* bemerkt nun (§. 26 seiner Abhandlung) dass eine solche Function $\psi(x)$ überhaupt statt $f'(x)$ in seinem Satze angewendet werden könne, wenn für die reellen Wurzeln von $f(x)=0$ $\psi(x)$ mit $f'(x)$ stets gleiches (oder stets entgegengesetztes) Zeichen habe. Da man aber eine solche Function a priori nicht kenne, so sei man genöthigt, zum Divisor V_1 den Differentialquotienten $f'(x)$ zu nehmen.

Ich werde in den folgenden Paragraphen zeigen, dass man in der That derartige Functionen $\psi(x)$ a priori bestimmen kann.

§. 3.

Es sei $\psi(x)$ ein Ausdruck der $(n-1)$ten Ordnung, der eben so wie $f'(x)$ mit $f(x)$ keinen Factor gemein habe; es sei ferner

$$(4.) \qquad f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\,.$$

Man dividire das Product $f'(x)\psi(x)$ durch $f(x)$, nenne den Quotienten R, und den Rest welcher den $(n-1)$ten Grad nicht übersteigen kann $\theta(x)$, so dass

$$(5.) \qquad f'(x)\psi(x) = Rf(x) + \theta(x).$$

Da nach der *Lagrange*'schen Interpolationsformel

$$\psi(x) = \Sigma\frac{\psi(x_1)}{f'(x_1)}(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n);$$

$$\theta(x) = \Sigma\frac{\theta(x_1)}{f'(x_1)}(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n),$$

und zufolge (5)

$$f'(x_1)\psi(x_1) = \theta(x_1)$$

ist, so hat man

$$(6.)\ \psi(x) = \Sigma\frac{\theta(x_1)}{\{f'(x_1)\}^2}(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n),$$

$$(7.)\ \ \theta(x) = \Sigma\psi(x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)\,;$$

vermittelst welcher Gleichungen man, wenn eine der Functionen $\psi(x)$ und $\theta(x)$ gegeben ist, die andre bestimmen kann.

Haben nun $f'(x)$ und $\psi(x)$ für alle reellen Wurzeln von $f(x)=0$ gleiches Zeichen, so muss zufolge (5) $\theta(x)$ für eben diese reellen Wurzeln positiv bleiben; und umgekehrt, bleibt $\theta(x)$ für alle reellen Wurzeln von $f(x)=0$ positiv,

so werden $f'(x)$ und $\psi(x)$ für dieselben Wurzeln gleiches Zeichen haben. Die Kenntniss einer solchen Function $\theta(x)$ ergäbe vermittelst (6) eine passende Function $\psi(x)$.

Der Umstand, dass die reellen Wurzeln von $f(x) = 0$ unbekannt sind, macht die Bestimmung von $\psi(x)$ auf die angegebene Weise nicht illusorisch. In der That darf man nur für $\theta(x)$ eine den $(n-1)$ten Grad nicht übersteigende Function von x annehmen, die für alle reellen Werthe der Variabeln positiv bleibt, so wird der Bedingung der Aufgabe Genüge geschehen. Aber noch mehr; es sei $\theta(x)$ eine rationale jedoch nicht nothwendig eine ganze Function, so kann man bekanntlich eine ganze Function vom $(n-1)$ten Grade $\theta_0(x)$ aufstellen, so dass

$$\theta_0(x_1) = \theta(x_1) \quad ; \quad \theta_0(x_2) = \theta(x_2) \; ; \; \ldots . \theta_0(x_n) = \theta(x_n) \; .$$

Ist $\theta(x)$ für alle reellen Werthe von x positiv, so wird es $\theta_0(x)$ für die Wurzeln von $f(x) = 0$ ebenfalls sein, man wird es also in (6) zur Bildung passender Functionen $\psi(x)$ gebrauchen können; da aber $\theta_0(x_1) = \theta(x_1)$ u. s. w. so bedarf es der Bildung der Function θ_0 gar nicht; man hat vielmehr unmittelbar folgenden Satz:

I. Bedeutet $\theta(x)$ eine rationale Function von x die für alle reellen Werthe der Variabeln positiv bleibt, so kann im *Sturm*'schen Satze statt $f'(x)$ oder V_1 die Function

$$\psi(x) = \Sigma \frac{\theta(x_1)}{\{f'(x_1)\}^2}(x - x_2)(x - x_3)\ldots.(x - x_n)$$

gebraucht werden.

Erfüllt eine Function $\theta(x)$ die vorgeschriebene Bedingung, so wird es $\theta(x)\{f'(x)\}^2$ auch thun, und umgekehrt; man hat demnach mit gleicher Allgemeinheit den Satz:

II. Bedeutet $\theta(x)$ eine rationale Function von x, die für alle reelle Werthe der Variabeln positiv bleibt, so kann im *Sturm*'schen Satze statt $f'(x)$ oder V_1 die Function

$$\psi(x) = \Sigma\theta(x_1)(x - x_2)(x - x_3).....(x - x_n)$$

gebraucht werden.

Bei allen Modificationen, die man in diesen Formeln anbringen kann, muss man darauf sehen, dass $\psi(x)$ und $f(x)$ keinen gemeinschaftlichen Factor bekommen. Für die Sätze (I und II) wird dies erreicht, wenn $\theta(x)$ für keinen Wurzelwerth von $f(x) = 0$ verschwindet.

Anm. Wir bemerken beiläufig, dass wenn $\theta(x)$ eine ganze Function von x bedeutet, oder noch allgemeiner eine rationale, die Summe

$$\Sigma\theta(x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_n)$$

eben so, wie $f'(x)$ benutzt werden kann, um die Existenz doppelter Wurzeln von $f(x)=0$ nachzuweisen. Ist

$$f(x) = x^n + h_1 x^{n-1} + h_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + h_{n-1}x + h_n,$$

und $\theta(x) = -x$, so wird jene Summe

$$h_1 x^{n-1} + 2h_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + (n-1)h_{n-1}x + nh_n,$$

ein Ausdruck, von dem man auch aus andern Gründen weiss, dass er eben so wie

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)h_1 x^{n-2} + \ldots\ldots + h_{n-1}$$

mit $f(x)$ einen gemeinschaftlichen Factor hat, wenn $f(x)=0$ eine doppelte Wurzel besitzt.

§. 4.

Ehe ich weitere Folgerungen aus diesen Sätzen ziehe, muss ich mehrere algebraische Relationen beweisen, zu deren Ableitung ich folgende Elementarsätze aus der Theorie der Determinanten gebrauchen werde:

1) Die Determinante eines Systems, dessen Verticalreihen Summen von gleich vielen Gliedern bilden, wie z. B. in dem Systeme dritter Ordnung

$$\begin{array}{lll} a+b+c+d+e & f+g & h+i+k \\ a'+b'+c'+d'+e' & f'+g' & h'+i'+k' \\ a''+b''+c''+d''+e'' & f''+g'' & h''+i''+k'' \end{array}$$

ist die Summe aller partiellen Determinanten, welche man durch die Combination von Verticalreihen erhält, die nicht zu einer Gruppe gehören.

In unserm Beispiele wird demnach die Determinante gleich

$$\begin{vmatrix} a & f & h \\ a' & f' & h' \\ a'' & f'' & h'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & f & i \\ a' & f' & i' \\ a'' & f'' & i'' \end{vmatrix} + \ldots\ldots + \begin{vmatrix} e & g & i \\ e' & g' & i' \\ e'' & g'' & i'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & g & k \\ e' & g' & k' \\ e'' & g'' & k'' \end{vmatrix}$$

die Zahl dieser kleinen Determinanten ist 30.

2) Die Determinante des Systems

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_a \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_a^2 \\ \vdots & & \vdots & & \\ x_1^{a-1} & x_2^{a-1} & x_3^{a-1} & \ldots & x_a^{a-1} \end{matrix}$$

ist der alternirenden Function

$$(x_a - x_{a-1})(x_a - x_{a-2}) \ldots (x_a - x_1)(x_{a-1} - x_{a-2})(x_{a-1} - x_{a-3}) \ldots (x_2 - x_1)$$

gleich.

3) Diese alternirende Function entsteht aus dem ersten Gliede des entwickelten Productes $x_a^{a-1} x_{a-1}^{a-2} \ldots x_3^2 x_2^1 x_1^0$, indem man statt der Reihenfolge der Indices $a, a-1, \ldots 3, 2, 1$ eine beliebige andre Permutation derselben setzt, und dem neu entstandenen Gliede das + oder — Zeichen giebt, je nachdem die neue Gruppe der Indices aus den ursprünglichen durch eine grade oder ungrade Anzahl von Vertauschungen zweier Indices gebildet werden kann.

In dem Satze (2) ist, wie man sieht, das aus den Termen derjenigen Diagonale gebildete Glied, welche von links oben nach rechts unten geht, positiv angenommen worden; dasselbe soll auch für alle übrigen Determinanten geschehen, welche weiter unten vorkommen.

§. 5.

Mit Hülfe dieser Sätze lässt sich ein Theorem beweisen, von dem ich leichterer Uebersicht wegen, zuerst einen speciellen Fall erörtern werde.

Man bezeichne die Potenzsummen $x_1^i + x_2^i + x_3^i$ mit s_i, und bilde die Determinante von

$$\begin{matrix} s_0 & s_1 & s_2 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & x^2 \\ s_3 & s_4 & s_5 & x^3 \end{matrix}$$

welche nach Satz 1 des vorigen §. aus $3.3.3.1 = 27$ kleineren Determinanten besteht. Man sieht leicht, dass von diesen alle bis auf 6 verschwinden. In der That ist z. B.

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_3^2 & 1 \\ x_1 & x_1^2 & x_3^3 & x \\ x_1^2 & x_1^3 & x_3^4 & x^2 \\ x_1^3 & x_1^4 & x_3^5 & x^3 \end{vmatrix} = x_1^0 x_1^1 x_3^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1 & x_3 & x \\ x_1^2 & x_1^2 & x_3^2 & x^2 \\ x_1^3 & x_1^3 & x_3^3 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Aehnlich zeigt man, dass alle partiellen Determinanten, in denen zwei oder mehr Verticalreihen die Potenzen derselben Grösse enthalten, verschwinden. Es bleiben demnach nur Determinanten wie die folgende

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^1 & x_3^2 & 1 \\ x_1 & x_2^2 & x_3^3 & x \\ x_1^2 & x_2^3 & x_3^4 & x^2 \\ x_1^3 & x_2^4 & x_3^5 & x^3 \end{vmatrix}$$

und alle diejenigen, welche aus denselben durch Vertauschung der Indices **1, 2, 3** entstehen. Die vorhergehende Determinante ist jedoch gleich

$$x_3^2 x_2^1 x_1^0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x^3 \end{vmatrix} = x_3^2 x_2^1 x_1^0 (x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1).$$

Permutirt man in diesem Resultate die Indices **1, 2, 3** so bleibt $(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$ ungeändert; die alternirende Function $(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$ nimmt bald das $+$, bald das $-$ Zeichen an, je nachdem die Permutation der Indices durch eine grade oder ungrade Anzahl von Vertauschungen aus der ursprünglichen entstehen kann. Addirt man demnach sämmtliche partiellen Determinanten, so erhält man

$$(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\{x_3^2 x_2^1 x_1^0 - x_3^2 x_2^0 x_1^1 + \ldots\ldots\}.$$

Nach Satz (**3**) des vorigen §. ist aber die eingeklammerte Grösse selbst wiederum $= (x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$, also hat man

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & x^2 \\ s_3 & s_4 & s_5 & x^3 \end{vmatrix} = \{(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\}^2 (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Bedeuten in der Determinante links die Grössen s Potenzsummen nicht von drei, sondern von n Quantitäten $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, so besteht sie, wie genau nach demselben Verfahren folgt, aus $n(n-1)(n-2)$ nicht verschwindenden partiellen Determinanten; diese lassen sich in Gruppen zu je sechs vereinigen, deren jede eine Summe hat, welche wie die rechte Seite der letzten Formel gebildet ist, man hat daher in diesem Falle

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & x^2 \\ s_3 & s_4 & s_5 & x^3 \end{vmatrix} = \Sigma\{(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\}^2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

§. 6.

Genau eben so beweist man folgenden allgemeinen Satz:

Bezeichnet man die Potenzsumme $x_1^i + x_2^i + \ldots\ldots + x_n^i$ durch s_i; ferner das Quadrat des Productes, welches aus den $\frac{i(i-1)}{2}$ Differenzen der i Grössen x_1, $x_2, \ldots\ldots x_i$ gebildet ist, durch $\delta(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_i)$, so ist

$$(8.)\quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots\ldots & s_{a-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots\ldots & s_a & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots\ldots & s_{a+1} & x^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_a & s_{a+1} & s_{a+2} & \ldots\ldots & s_{2a-1} & x^a \end{vmatrix} = \Sigma\,\delta(x_1,x_2\ldots\ldots x_a)(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_a),$$

wo die rechte Seite eine Summe von $\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-a+1)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots\ldots a}$ ähnlich gebildeten Gliedern enthält. Eine der Folgerungen, die sich aus (8) ergeben, muss noch erwähnt werden. Vergleicht man den Coefficienten von x^a auf beiden Seiten der Gleichung, so erhält man

$$(9.)\quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots\ldots & s_{a-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots\ldots & s_a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{a-1} & s_a & s_{a+1} & \ldots\ldots & s_{2a-2} \end{vmatrix} = \Sigma\,\delta(x_1, x_2, \ldots\ldots x_a).$$

eine Formel, die von *Cayley* und *Borchardt* in ihren weiter unten zu erwähnenden Untersuchungen über den *Sturm*'schen Satz, angewendet worden ist.

Man kann die Relationen (8 und 9) noch verallgemeinern. Setzt man nemlich

$$\varepsilon_1 x_1^i + \varepsilon_2 x_2^i + \ldots\ldots + \varepsilon_n x_n^i = S_i$$

so ist:

$$(10).\quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots\ldots & S_{a-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots\ldots & S_a & x \\ S_2 & S_3 & S_4 & \ldots\ldots & S_{a+1} & x^2 \\ \vdots & & \vdots & & & \\ S_a & S_{a+1} & S_{a+2} & \ldots\ldots & S_{2a-1} & x^a \end{vmatrix} = \Sigma \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \ldots \varepsilon_a \delta(x_1, x_2, \ldots x_a)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_a)$$

und

$$(11.)\quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots\ldots & S_{a-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots\ldots & S_a \\ \vdots & & \vdots & & \\ S_{a-1} & S_a & S_{a+1} & \ldots\ldots & S_{2a-2} \end{vmatrix} = \Sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_a \delta(x_1, x_2 \ldots x_a).$$

Der Beweis dieser Verallgemeinerung ist dem in §. 5 gegebenen fast wörtlich gleich.

§. 7.

Es sei die Determinante in (8) der Kürze halber Y_a, der Coëfficient, mit welchem in Y_a die höchste Potenz x^a multiplicirt ist, heisse λ_a. Bezeichnet man durch $Y_a', Y_a'', Y_a''', \ldots Y_a^{(n)}$ die Werthe von Y_a für $x = x_1$, $x = x_2$ u. s. w., so hat man:

$$(12.)\quad \begin{cases} x_1^i Y_a' + x_2^i Y_a'' + \ldots\ldots + x_n^i Y_a^{(n)} = 0, & \text{für } i < a \\ x_1^a Y_a' + x_2^a Y_a'' + \ldots\ldots + x_n^a Y_a^{(n)} = \lambda_{a+1}, \end{cases}$$

welche Relationen als Verallgemeinerung eines sehr bekannten Systems von Formeln angesehen werden können. Ich werde, der Einfachheit halber, die Richtigkeit dieser Formeln für $a = 2$ nachweisen, da für ein beliebiges, $n-1$ nicht überschreitendes a, dieselben Schlüsse gelten. Man hat zufolge (8 u. 9)

$$Y_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & 1 \\ s_1 & s_2 & x \\ s_2 & s_3 & x^2 \end{vmatrix} = \Sigma\delta(x_1, x_2)(x-x_1)(x-x_2);\ \lambda_3 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \Sigma\delta(x_1, x_2, x_3).$$

Setzt man in Y_2 $x = x_1$, so wird

$$Y_2' = (x_2-x_3)^2(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(x_2-x_4)^2(x_1-x_2)(x_1-x_4)+\ldots..$$
$$\ldots..+(x_{n-1}-x_n)^2(x_1-x_{n-1})(x_1-x_n);$$

oder, wenn man einen Ausdruck wie $(x_2-x_3)^2(x_1-x_2)(x_1-x_3)$ mit $(1;2,3)$ bezeichnet, wo also $(1;2,3)=(1;3,2)$ ist, so hat man

$$Y_2' = (1;2,3)+(1;2,4)+\ldots\ldots\ldots+(1;n-1,n).$$

Aehnlich werden die Ausdrücke für Y_2'', Y_2''', ... $Y_2^{(n)}$; jeder derselben enthält $\frac{(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2}$ Glieder; eine Summe wie die folgende

$$x_1^i Y_2' + x_2^i Y_2'' + \ldots.. + x_n^i Y_2^{(n)}$$

wird deren also $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}$ enthalten. Diese lassen sich in $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$ dreigliedrige Gruppen ordnen, deren eine z. B. aus den Termen besteht:

$$x_1^i(1;2,3)+x_2^i(2;1,3)+x_3^i(3;1,2)$$
$$=\left\{\frac{x_1^i}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2^i}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{x_3^i}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right\}\delta(x_1,x_2,x_3).$$

Die eingeklammerte Grösse verschwindet für $i=0$ und $i=1$; sie wird der Einheit gleich für $i=2$, also ist

$$\Sigma Y_2' = 0 \quad ; \quad \Sigma x_1 Y_2' = 0 \quad ; \quad \Sigma x_1^2 Y_2' = \delta(x_1,x_2,x_3) = \lambda_3.$$

§. 8.

Die Formeln (12) reichen aus, um eine Fundamental-Eigenschaft der Grössen Y_a nachzuweisen.

Setzt man $Y_a = \lambda_a x^a + \mu_a x^{a-1} + \ldots..$
$Y_{a-1} = \lambda_{a-1} x^{a-1} + \mu_{a-1} x^{a-2} + \ldots..$

und dividirt mit Y_{a-1} in Y_a, so erhält man einen Quotienten erster Ordnung

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}}x + \frac{\mu_a\lambda_{a-1}-\lambda_a\mu_{a-1}}{\lambda_{a-1}^2},$$

oder wie wir kürzer schreiben wollen

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}}x + M,$$

während der Rest, nachdem sein Vorzeichen geändert worden ist, gleich

$$(13.)\quad Z = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots + \alpha_{a-2} x^{a-2}$$

sein mag, so dass

$$(14.)\qquad Y_a = \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}} x + M\right) Y_{a-1} - Z.$$

Wir wollen die Function Z jetzt wirklich bestimmen. Setzen wir in (14) der Reihe nach $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ für x, so erhält man:

$$Y'_a = Y'_{a-1}\left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}} x_1 + M\right) - (\alpha + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \ldots\ldots + \alpha_{a-2} x_1^{a-2})$$

$$Y''_a = Y''_{a-1}\left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}} x_2 + M\right) - (\alpha + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots\ldots + \alpha_{a-2} x_2^{a-2})$$

$$\vdots$$

$$Y^{(n)}_a = Y^{(n)}_{a-1}\left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}} x_n + M\right) - (\alpha + \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_n^2 + \ldots\ldots + \alpha_{a-2} x_n^{a-2}).$$

Addirt man diese Gleichungen, erstens ohne eine Aenderung mit ihnen vorgenommen zu haben, dann aber, nachdem sie mit $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, ferner mit $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$ u. s. w. und schliesslich mit x_1^{a-2}, $x_2^{a-2} \ldots$, x_n^{a-2} multiplicirt worden sind, und nimmt dabei auf die Relationen (12) Rücksicht, so erhält man

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha s_0 + \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots\ldots + \alpha_{a-2} s_{a-2}\\
0 &= \alpha s_1 + \alpha_1 s_2 + \alpha_2 s_3 + \ldots\ldots + \alpha_{a-2} s_{a-1}\\
&\vdots\\
0 &= \alpha s_{a-3} + \alpha_1 s_{a-2} + \alpha_2 s_{a-1} + \ldots\ldots + \alpha_{a-2} s_{2a-5}, \text{ und schliesslich}\\
\lambda_a \frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}} &= \alpha s_{a-2} + \alpha_1 s_{a-1} + \alpha_2 s_a + \ldots\ldots + \alpha_{a-2} s_{2a-4}.
\end{aligned}$$

Fügt man hierzu noch

$$Z = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots + \alpha_{a-2} x^{a-2},$$

so kann man aus diesen a Gleichungen die Coefficienten α eliminiren, und erhält

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \frac{\lambda_a^2}{\lambda_{a-1}} & Z\\
s_0 & s_1 & \ldots\ldots & s_{a-3} & s_{a-2} & 1\\
s_1 & s_2 & \ldots\ldots & s_{a-2} & s_{a-1} & x\\
\vdots & & & & & \\
s_{a-2} & s_{a-1} & \ldots\ldots & s_{2a-5} & s_{2a-4} & x^{a-2}
\end{vmatrix} = 0$$

also nach der bekannten Bildungsweise der Determinanten:

$$\frac{\lambda_a^2}{\lambda_{a-1}}\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots\cdots & s_{-3} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots\cdots & s_{a-2} & x \\ \vdots & & & & \\ s_{a-2} & s_{a-1} & \cdots\cdots & s_{2a-5} & x^{a-2} \end{vmatrix} - Z \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots\cdots\cdots & s_{a-2} \\ s_1 & s_2 & \cdots\cdots\cdots & s_{a-1} \\ \vdots & & & \\ s_{a-2} & s_{a-1} & \cdots\cdots\cdots & s_{2a-4} \end{vmatrix} = 0$$

oder nach der §. 7 eingeführten Bezeichnung

$$\frac{\lambda_a^2}{\lambda_{a-1}} Y_{a-2} - Z\lambda_{a-1} = 0 \text{ ; woraus } Z = \frac{\lambda_a^2}{\lambda_{a-1}^2} \cdot Y_{a-2}.$$

Der Rest der Division von Y_{a-1} in Y_a ist also, bis auf einen constanten Factor $= Y_{a-2}$. Setzt man den Werth von Z in (14) ein, so erhält man

$$\text{(15.)} \quad Y_a = \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}} x + \frac{\mu_a\lambda_{a-1} - \lambda_a\mu_{a-1}}{\lambda_{a-1}^2}\right) Y_{a-1} - \frac{\lambda_a^2}{\lambda_{a-1}^2} Y_{a-2}.$$

§. 9.

Die Gleichung (15) gilt, so lange $a \leqq n$ und $\geqq 2$ ist, für Y_0 ist die Einheit zu setzen. Da aber die Anzahl der Elemente $x_1, x_2, \cdots x_n$ unbeschränkt ist, so werden, wenn $n > 2a-1$ angenommen wird, die Potenzsummen $s_0, s_1, s_2, \cdots s_{2a-1}$ von einander unabhängige Grössen. Wir haben also den Satz:

III. Sind $s_0, s_1, s_2, \cdots s_{2a-1}$ beliebige Grössen, und setzt man

$$Y_a = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots\cdots & s_{a-2} & s_{a-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots\cdots & s_{a-1} & s_a & x \\ s_2 & s_3 & \cdots\cdots & s_a & s_{a+1} & x^2 \\ & & \vdots & & & \\ s_a & s_{a+1} & \cdots\cdots & s_{2a-2} & s_{2a-1} & x^a \end{vmatrix}, Y_{a-1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots\cdots & s_{a-2} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots\cdots & s_{a-1} & x \\ & & \vdots & & \\ s_{a-1} & s_a & \cdots\cdots & s_{2a-3} & x^{a-1} \end{vmatrix}, Y_{-2} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{a-3} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{a-2} & x \\ & & \vdots & & \\ s_{a-2} & s_{a-1} & \cdots & s_{2a-5} & x^{a-2} \end{vmatrix},$$

bezeichnet man ferner die Coefficienten der beiden höchsten Potenzen in Y_a mit λ_a und μ_a in Y_{a-1} mit λ_{a-1}, μ_{a-1} so hat man

$$\text{(16.)} \quad Y_a = \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}} x + \frac{\mu_a\lambda_{a-1} - \lambda_a\mu_{a-1}}{\lambda_{a-1}^2}\right) Y_{a-1} - \frac{\lambda_a^2}{\lambda_{a-1}^2} Y_{a-2}$$

oder

$$\text{(17.)} \quad \lambda_{a-1}^2 Y_a - (\lambda_a\lambda_{a-1}x + \mu_a\lambda_{a-1} - \lambda_a\mu_{a-1}) Y_{a-1} + \lambda_a^2 Y_{a-2} = 0.$$

Anmerkung 1. Die Ableitung setzt voraus, dass s_0 einer ganzen Zahl $n > 2a-1$ gleich sei. Bekanntlich sind aber zwei rationale Functionen von s_0

überhaupt gleich, sobald sie es für alle ganzzahligen Werthe der Variabeln s_0 sind, die eine gegebene Gränze überschreiten; also ist (16) ohne alle Einschränkung richtig.

Anmerkung 2. Der in (16 und 17) ausgedrückte Satz ist zuerst von *Jacobi* in der Abhandlung „*De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis*" (Band 15 dieses Journals) aufgestellt worden; wo er das letzte Theorem im Schlussparagraphen der Abhandlung bildet. Die von mir gegebene Ableitung desselben ist von der *Jacobi*'schen durchaus verschieden. Ich wurde auf nothwendige Weise zu den obigen Gleichungen geführt, indem ich den scheinbar specielleren Fall zu behandeln hatte, in welchem die Grössen s Potenzsummen bedeuten. — Nachdem ich in den §§ 6, 7, 8, 9 den Apparat von Formeln aufgestellt habe, welcher zu weiteren Untersuchungen über den *Sturm*'schen Satz nothwendig war, kehre ich zu letzterem jetzt zurück.

§. 10.

Die einfachste stets positiv bleibende Function $\theta(x)$ ist offenbar eine positive Constante die man, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, gleich eins annehmen kann. Diese Hypothese macht die Function $\psi(x)$ des Satzes II (§. 3) dem Differentialquotienten $f'(x)$ gleich. Die Function $\psi(x)$ des Satzes I jedoch verwandelt sich bei dieser Annahme in

$$(18.) \qquad \Sigma \frac{1}{\{f'(x_n)\}^2}(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_{n-1}),$$

wo unmittelbar hinter das Summenzeichen ein Glied als Bildungstypus der übrigen geschrieben ist. Da die Functionenreihe der V's (§. 1) alle in §. 2 angegebenen Eigenschaften beibehält, wenn man, ehe V_2, V_3 ..... gebildet werden, V und V_1 mit demselben constanten Factor multiplicirt, so wollen wir um die Brüche in (18) fortzuschaffen $f(x)$ und jene Summe mit

$$\delta(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2\ldots\ldots(x_{n-1}-x_n)^2$$

multipliciren. Dadurch werden die beiden ersten Functionen

$$V = \delta(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)$$
$$V_1 = \Sigma\delta(x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n-1})(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_{n-1}).$$

oder mit Berücksichtigung der Formel (8.)

$$V = Y_n \quad ; \quad V_1 = Y_{n-1}.$$

Führt man die Division von V_1 in V aus, und berücksichtigt, dass nach (16)

$$Y_n = Y_{n-1}(l_n x + m_n) - l_n^2 Y_{n-2} \quad , \quad \text{wo } l_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \; ; \; m_n = \frac{\mu_n \lambda_{n-1} - \lambda_n \mu_{n-1}}{\lambda_{n-1}^2},$$

so sieht man, dass

$$V_2 = l_n^2 Y_{n-2}.$$

Aehnlich ist nun wiederum

$$Y_{n-1} = Y_{n-2}(l_{n-1} x + m_{n-1}) - l_{n-1}^2 Y_{n-3}, \text{ wo } l_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}} \; ; \; m_{n-1} = \frac{\mu_{n-1}\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1}\mu_{n-2}}{\lambda_{n-2}^2}$$

oder

$$V_1 = V_2 \frac{l_{n-1} x + m_{n-1}}{l_n^2} - l_{n-1}^2 Y_{n-3},$$

woraus

$$V_3 = l_{n-1}^2 Y_{n-3}.$$

Wir schliessen nun weiter, weil

$$Y_{n-2} = Y_{n-3}(l_{n-2} x + m_{n-2}) - l_{n-2}^2 Y_{n-4} \text{ oder } \frac{V_2}{l_n^2} = \frac{V_3}{l_{n-1}^2}(l_{n-2} x + m_{n-2}) - l_{n-2}^2 Y_{n-4},$$

woraus

$$V_2 = V_3 \frac{l_n^2}{l_{n-1}^2}(l_{n-2} x + m_{n-2}) - l_n^2 l_{n-2}^2 Y_{n-4},$$

dass

$$V_4 = l_n^2 l_{n-2}^2 Y_{n-4}.$$

Eben so findet sich

$$V_5 = l_{n-1}^2 l_{n-3}^2 Y_{n-5} \quad ; \quad V_6 = l_n^2 l_{n-2}^2 l_{n-4}^2 Y_{n-6} \text{ u. s. w. wo } l_a = \frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}} \text{ bedeutet.}$$

Da die Factoren, mit welchen die Y's multiplicirt werden müssen, um die Grössen V zu geben, als Quadrate von gewissen symmetrischen Functionen der Wurzeln wesentlich positiv sind, so können sie bei allen Zeichenbestimmungen ausgelassen, oder die Y's statt der V's als Functionenreihe des *Sturm*'schen Satzes benutzt werden. Man kann ferner die Grössen Y entweder in Form von Summen ähnlich gebildeter Glieder schreiben, so dass

$$Y_a = \Sigma \delta (x_1, x_2, \ldots x_a)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_a),$$

und in dieser Form sind sie von *Sturm* selbst schon gebraucht worden, (vergl. weiter unten §. 13.), oder als Determinanten. Da diese letzteren nur die Potenzsummen der Wurzeln enthalten, also diejenigen symmetrischen Functionen, die nach den Combinationssummen als die einfachsten gelten, so wird auch die zweite Darstellung als die einfachere anzusehen sein. Wir haben demnach folgenden Satz:

IV. Es sei $f(x) = 0$ eine Gleichung $n$ten Grades ohne doppelte oder mehrfache Wurzeln; man bezeichne die Summe ihrer $i$ten Potenzen durch s_i, und bilde folgende Determinanten:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-2} & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & s_n & x \\ & & \vdots & & & \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-2} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & x \\ & & \vdots & & \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-3} & x^{n-1} \end{vmatrix} \quad \cdots \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & 1 \\ s_1 & s_2 & x \\ s_2 & s_3 & x^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} s_0 & 1 \\ s_1 & x \end{vmatrix} \quad 1$$

dann giebt der Unterschied der Zeichenwechsel, welche diese Reihe für $x = a$ mehr hat als für $x = b$, wo $b > a$, eben so wie im *Sturm*'schen Satze die Anzahl der zwischen a und b liegenden Wurzeln an.

Sturm hat in seiner Anfangs citirten Abhandlung bemerkt, dass man aus seinem Satze leicht eine Regel zur Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung ableiten könne. Da es sich nämlich in diesem Falle darum handelt, für x die Werthe $-\infty$ und $+\infty$ einzusetzen, so werden die Zeichenbestimmungen nur von den Coefficienten der höchsten Glieder abhängen. Bezeichnet man diese Coefficienten für V, V_1, V_2, ... V_n mit c, c_1, c_2, ... c_n (wo also $c = \frac{1}{n} c_1$ und $V_n = c_n$), so kommt man durch einfache Betrachtungen auf die von *Sturm* gegebene Regel, dass die Gleichung $f(x) = 0$ so viele Paare imaginärer Wurzeln besitzen muss, als Zeichenwechsel in der Reihe der Constanten vorkommen. Wendet man dieselben Betrachtungen auf die Determinantenreihe des vorhergehenden Lehrsatzes an, so erhält man, wenn man erwägt, dass $s_0 = n$ und 1 gleiches Zeichen haben, folgenden Satz:

V. Die Gleichung $f(x) = 0$ hat so viel Paare imaginärer Wurzeln, als die Determinantenreihe

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ & & \vdots & & \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-2} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ & & \vdots & \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \cdots & s_{2n-4} \end{vmatrix} \quad \cdots \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} \quad s_0$$

Abwechselungen hat.

Dieser specielle Satz ist nicht neu. *Cayley* hat im 11ten Bande des *Liouville*'schen Journals (Note sur les fonctions de Mr. *Sturm*) Formeln angegeben, aus welchen man ihn mit Hülfe der von *Sturm* gemachten Bemerkungen, ohne Weiteres hätte ableiten können. Zuerst ist er jedoch in obiger Form von *Borchardt* wirklich aufgestellt (*Liouville*, Tome XII, Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes), und auf die bekannte Gleichung $n$ten Grades angewendet worden, von welcher die quadratische und kubische zur Bestimmung der Axen einer Linie oder Fläche 2ten Grades specielle Fälle sind. Für jene Gleichung $n$ten Grades sind, wie *Borchardt* zuerst gezeigt hat, sämmtliche Determinanten in V Summen von Quadraten reeller Grössen, also wesentlich positiv. Der Beweis dieser Eigenschaft für die erste unsrer Determinanten war von demselben schon in einer früher erschienenen Abhandlung gegeben worden. (Band 30 dieses Journals, pg. 38.)

§. 11.

Wollen wir, wie es die Sätze I und II verlangen, eine stets positiv bleibende Function $\theta(x)$ einführen, so zeigt Formel (10), dass die im vorigen Paragraph durchgeführte Rechnung sich sofort verallgemeinern lässt, wenn man als ersten Divisor

$$(19.)\quad \Sigma' \frac{1}{\{f'(x_n)\}^2 \theta(x_n)} (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

anwendet. Multiplicirt man $f(x)$ und die Summe (19) mit

$$\delta(x_1, x_2, \ldots . x_n)\,\theta(x_1)\theta(x_2)\ldots .\theta(x_n),$$

wodurch sie in

$$\delta(x_1, x_2, \ldots .. x_n)\,\theta(x_1)\theta(x_2)\ldots .. \theta(x_n)(x-x_1)(x-x_2)\ldots .. (x-x_n)$$

$$\Sigma\delta(x_1, x_2, \ldots .. x_{n-1})\,\theta(x_1)\theta(x_2)\ldots .. \theta(x_{n-1})(x-x_1)(x-x_2)\ldots .. (x-x_{n-1})$$

übergehen, so sieht man, dass beide Ausdrücke zufolge (10) als Determinanten sich schreiben lassen, welche die Anwendung der Formel (16) gestatten; d. h. setzt man

$$(20.)\quad S_i = x_1^i\theta(x_1) + x_2^i\theta(x_2) + \ldots .. + x_n^i\theta(x_n)$$

$$(21.)\quad W_a = \Sigma\theta(x_1)\theta(x_2)\ldots .. \theta(x_a)\,\delta(x_1, x_2, \ldots .. x_a)(x-x_1)(x-x_2)\ldots .. (x-x_a)$$

$$= \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots\ldots & S_{a-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots\ldots & S_a & x \\ \vdots & & & & & \\ S_a & S_{a+1} & S_{a+2} & \ldots & S_{2a-1} & x^a \end{vmatrix}$$

und bezeichnet wiederum mit λ_a und μ_a die Coefficienten von x^a und x^{a-1} in W_a, so hat man

$$(22.) \quad W_a = \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}}x + \frac{\mu_a\lambda_{a-1} - \lambda_a\mu_{a-1}}{\lambda_{a-1}^2}\right)W_{a-1} - \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}}\right)^2 W_{a-2}\,.$$

Eine fast wörtliche Wiederholung der Betrachtungen des vorigen Paragraph führt zu folgendem Satze:

VI. Ist $\theta(x)$ eine für reelle Werthe des x positiv bleibende rationale Function, so giebt die Reihe der durch Formel (21) näher definirten Functionen W, nämlich

$$W_n\,,\ W_{n-1}\ldots\ldots W_2\,,\ W_1,\ 1\,,$$

auf dieselbe Weise wie die Functionenreihe des *Sturm*'schen Satzes die Anzahl der zwischen zwei Gränzen liegenden Wurzeln von $W_n = 0$, oder $V = 0$ an.

§. 12.

Eine einfache Bemerkung reicht hin, diese Rechnungen auf den Satz II auszudehnen, in welchem als Divisor von V

$$\Sigma\theta(x)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots(x - x_n)$$

genommen wird. Man hat offenbar

$$\delta(x_2, x_3, \ldots\ldots x_n) = \frac{\delta(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)}{\{f'(x_1)\}^2}\,,$$

$$\delta(x_3, x_4, \ldots\ldots x_n) = \frac{\delta(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\,\delta(x_1, x_2)}{\{f'(x_1)f'(x_2)\}^2}\,,$$

$$\vdots$$

$$\delta(x_{n-1}, x_n) = \frac{\delta(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\,\delta(x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n-2})}{\{f'(x_1)f'(x_2)\ldots\ldots f'(x_{n-2})\}^2}\,,$$

$$1 = \frac{\delta(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\,\delta(x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n-1})}{\{f'(x_1)f'(x_2)\ldots\ldots f'(x_{n-1})\}^2}\,,$$

$$1 = \frac{\delta(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\,\delta(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)}{\{f'(x_1)f'(x_2)\ldots\ldots f'(x_n)\}^2}\,.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Summenformeln für $W_n, W_{n-1}, \ldots W_1, 1$ ein, und schreibt der Kürze halber $\theta_1, \theta_2, \ldots$ für $\theta(x_1), \theta(x_2), \ldots$, so hat man

$$W_n = \theta_1\theta_2\ldots\theta_n\delta(x_1, x_2, \ldots x_n)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

$$W_{n-1} = \theta_1\theta_2\ldots\theta_n\delta(x_1, x_2, \ldots x_n)\Sigma\frac{1}{\theta_1(f'(x_1))^2}(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

$$W_{n-2} = \theta_1\theta_2\ldots\theta_n\delta(x_1, x_2, \ldots x_n)\Sigma\frac{\delta(x_1, x_2)}{\theta_1\theta_2(f'(x_1)f'(x_2))^2}(x-x_3)\ldots(x-x_n)$$

$$\vdots$$

$$W_2 = \theta_1\theta_2\ldots\theta_n\delta(x_1, x_2, \ldots x_n)\Sigma\frac{\delta(x_1, x_2, \ldots x_{n-2})}{\theta_1\theta_2\ldots\theta_{n-2}(f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_{n-2}))^2}(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

$$W_1 = \theta_1\theta_2\ldots\theta_n\delta(x_1, x_2, \ldots x_n)\Sigma\frac{\delta(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})}{\theta_1\theta_2\ldots\theta_{n-1}(f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_{n-1}))^2}(x-x_n)$$

$$W = \theta_1\theta_2\ldots\theta_n\delta(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{\delta(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\theta_1\theta_2\ldots\theta_n(f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_n))^2}.$$

Lässt man den gemeinschaftlichen Factor fort, und schreibt überall $\theta(x)$ statt $\frac{1}{\theta(x)\{f'(x)\}^2}$, so hat man eine neue Reihe Functionen, für welche offenbar eine der Relation (22) ähnliche Formel gilt. Diess führt zu folgendem Satze:

VII. Es sei

$$U_n = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

$$U_{n-1} = \Sigma\theta(x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

$$U_{n-2} = \Sigma\theta(x_1)\theta(x_2)\delta(x_1, x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$$

$$U_{n-3} = \Sigma\theta(x_1)\theta(x_2)\theta(x_3)\delta(x_1, x_2, x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)$$

$$\vdots$$

$$U_1 = \Sigma\theta(x_1)\theta(x_2)\ldots\theta(x_{n-1})\delta(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})(x-x_n)$$

$$U_0 = \theta(x_1)\theta(x_2)\ldots\theta(x_n)\delta(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Bezeichnet man die Coefficienten der beiden höchsten Potenzen von x in U_a durch λ_a und μ_a, so ist

$$(23.)\quad U_a = \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}}x + \frac{\mu_a\lambda_{a-1} - \lambda_a\mu_{a-1}}{\lambda_{a-1}^2}\right)U_{a-1} - \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}}\right)^2 U_{a-2};$$

und bedeutet θ eine stets positiv bleibende rationale Function von x, so können die Functionen U auf dieselbe Weise wie die Functionenreihe des *Sturm*'schen Satzes benutzt werden, um die Anzahl der zwischen zwei Gränzen liegenden Wurzeln von $f(x) = 0$ zu finden.

Man hat nur nöthig, die §. 10 gemachte Rechnung zu wiederholen, um zu sehen, dass wenn man $\frac{U_n}{U_{n-1}}$ in einen Kettenbruch von der Form

$$q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 \cdots\cdots}}$$

entwickelt, unter $q_1, q_2, \cdots\cdots$ lineare Factoren verstanden, die Reihe der Reste, auf welche man dabei kommt, folgende wird:

$$l_n^2 U_{n-2}\,,\ l_{n-1}^2 U_{n-3}\,,\ l_n^2 l_{n-2}^2 U_{n-4}\,,\ l_{n-1}^2 l_{n-3}^2 U_{n-5}\,,\ l_n^2 l_{n-2}^2 l_{n-4}^2 U_{n-6} \text{ u. s. w., wo } l_a = \frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}}\,.$$

Da aber jede Function $\varphi(x)$ vom $(n-1)$ten Grade sich unter der Form $\Sigma\theta_1(x-x_2)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_n)$ darstellen lässt, so enthält das Vorhergehende die Formeln zur Entwickelung eines Ausdrucks $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in einen Kettenbruch.

Nimmt man in VII $\theta(x) = 1$ an, so werden U_n und U_{n-1} geradezu $f(x)$ und $f'(x)$; die übrigen Grössen U sind demnach von gewissen stets positiven Factoren abgesehen, den Resten $V_2, V_3, \cdots\cdots V_n$ im *Sturm*'schen Satze gleich. Man hat also den Satz:

VIII. Es sei

$$\begin{aligned}
X_n &= (x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)\\
X_{n-1} &= \Sigma(x-x_2)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_n)\\
X_{n-2} &= \Sigma(x_1-x_2)^2(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_n)\\
X_{n-3} &= \Sigma(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2(x-x_4)\cdots\cdots(x-x_n)\\
&\vdots\\
X_0 &= (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2\cdots\cdots(x_{n-1}-x_n)^2\,.
\end{aligned}$$

Bezeichnet man den Coefficienten von x^a in X_a mit λ_a, wo also $\lambda_n = 1$, $\lambda_{n-1} = n$; $\lambda_{n-2} = \Sigma(x_1-x_2)^2$, so ist die Reihe der im *Sturm*'schen Satze vorkommenden Reste $V_2, V_3, \cdots\cdots V_n$, folgendermaassen ausdrückbar:

$$V = X_n;\ V_1 = X_{n-1};\ V_2 = \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)^2 X_{n-2}\ ;\ V_3 = \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}}\right)^2 X_{n-3}\,;$$

$$V_4 = \left(\frac{\lambda_n\ \lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}\lambda_{n-3}}\right)^2 X_{n-4}\ ;\ V_5 = \left(\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-3}}{\lambda_{n-2}\lambda_{n-4}}\right)^2 X_{n-5} \text{ u. s. w.;}$$

man kann demnach in jenem Theoreme, statt der Grössen V, der Ausdrücke X sich bedienen.

Die Modificationen, welche man an den Sätzen IV bis VIII anbringen muss, wenn einer der mit λ bezeichneten Coefficienten verschwindet, ergeben sich ohne Mühe; wir haben um die Theoreme nicht zu schwerfällig zu machen, in denselben dieses speciellen Falles keine Erwähnung gethan.

§. 13.

Indem ich durch Specialisirung von $\theta(x)$ in VII zu einem bekannten Satze gekommen bin, bleibt mir jetzt noch übrig von mehreren Arbeiten über den *Sturm*'schen Satz Rechenschaft zu geben, die mir bei meinen Untersuchungen von wesentlichem Nutzen gewesen sind. Ich genüge dieser Pflicht wissenschaftlicher Dankbarkeit um so lieber, als in gegenwärtigem Journale meines Wissens von jenen Arbeiten noch nicht die Rede gewesen, und das folgende dazu dienen dürfte, deutsche Leser auf jene in französischen oder englischen Journalen erschienenen Abhandlungen aufmerksam zu machen.

Herr *Sylvester* hat das für diese Theorie wesentliche Verdienst, die im *Sturm*'schen Satze vorkommenden Reste $V_2, V_3, \ldots$ zuerst durch die Wurzeln von $V = 0$ ausgedrückt zu haben. Im Decemberhefte des Philosophical Magazine von 1839 hat er den Satz aufgestellt, dass so wie

$$V = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \quad ; \quad V_1 = \Sigma(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n) \ ,$$

die Reste $V_2, V_3, \ldots V_n$ von gewissen wesentlich positiven Factoren abgesehen durch

$$\Sigma\delta(x_1,x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n) \ ; \ \Sigma\delta(x_1,x_2,x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n); \ldots\delta(x_1,x_2,\ldots x_n).$$

dargestellt werden, (man vergleiche §. 12, VIII). Den in der Mittheilung des englischen Mathematikers fehlenden Beweis hat *Sturm* selbst später gegeben (Liouville, Tome VII, Démonstration d'un théorème d'algèbre de Mr. *Sylvester*). Sind V und V_1 zwei Ausdrücke vom resp. $n$ten und $n-1$ten Grade, die keinen gemeinschaftlichen Factor haben, und verwandelt man den Bruch $\frac{V}{V_1}$ nach der in §. 1 angegebenen Weise in einen Kettenbruch, so zeigt *Sturm* zuerst, dass jeder dabei vorkommende Rest V_k einer Gleichung genügt

$$V_k = V_1 N_k - V P_k \ , \qquad (24.)$$

wo V_k, N_k, P_k Ausdrücke bezüglich vom $n-k$, $k-1$ und $k-2$ten Grade

sind; die Ausdrücke N_k und P_k sind ausserdem Zähler und Nenner des reducirten Kettenbruches

$$q_1 - \frac{1}{q_2 - \frac{1}{q_3 - \ldots - \frac{1}{q_{k-1}}}},$$

so dass $N_1 = 1 \quad N_2 = q_1 \quad N_3 = q_1 q_2 - 1$ u. s. w.

$P_1 = 0 \quad P_2 = 1 \quad P_3 = q_1$ u. s. w.

Sturm zeigt weiter, dass wenn V_1 der erste Differentialquotient von V ist, und

$$T = \Sigma\delta(x_1, x_2, \ldots x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) \ldots (x - x_n)$$

$$Y = \Sigma\delta(x_1, x_2, \ldots x_{k-1})(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{k-1})$$

gesetzt werden, eine Gleichung statt findet

$$(25.) \qquad T = V_1 Y - VZ,$$

wo Z eine Function des $(k-2)$ten Grades ist. Weil die Ausdrücke T, Y, Z bezüglich von demselben Grade sind als V_k, N_k, P_k, so können sie sich von diesen letzteren nur durch einen constanten Factor unterscheiden, der nachher durch eine einfache Rechnung weiter bestimmt wird. Die Formel (25) gestattet eine so einfache Verification, dass wir gleich den Beweis einer etwas allgemeineren Formel mittheilen wollen. Behalten wir die Bezeichnungen der vorhergehenden Nummern bei, und setzen demnach

$$V = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \; ; \quad W_1 = \Sigma\theta_1 (x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

$$U_{n-k+1} = \Sigma\theta_1\theta_2 \ldots \theta_{k-1}\delta(x_1, x_2, \ldots x_{k-1})(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{k-1})$$

$$W_k = \Sigma\theta_1\theta_2 \ldots \theta_k\delta(x_1, x_2, \ldots x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) \ldots (x - x_n)$$

so ist der Ausdruck des $(n + k - 2)$ten Grades $W_1 U_{n-k+1} - W_k$ durch V theilbar. In der That wird für $x = x_1$

$$W_1 = \theta_1(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n); U_{n-k+1} = \Sigma\theta_2\theta_3 \ldots \theta_k\delta(x_2, x_3, \ldots x_k)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_k)$$

$$W_k = \Sigma\theta_1\theta_2 \ldots \theta_k\delta(x_1, x_2, \ldots x_k)(x_1 - x_{k+1})(x_1 - x_{k+2}) \ldots (x_1 - x_n)$$

$$= \theta_1(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)\Sigma\theta_2\theta_3 \ldots \theta_k\delta(x_2, x_3, \ldots x_k)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_k),$$

also $$W_1 U_{n-k+1} - W_k = 0 .$$

Da die in Rede stehende Function des $n + k - 2$ten Grades für jeden

Wurzelwerth von $V = 0$ verschwindet, so enthält sie V zum Factor, d. h. man hat

$$W_k = W_1 U_{n-k+1} - VZ \; ; \tag{26.}$$

wo Z eine Function des $(k-2)$ten Grades bedeutet. Man schliesst hieraus, eben so wie *Sturm* es für die beiden speciellen Functionen T und Y gethan hat, dass wenn man den Bruch $\frac{V}{W_1}$ in einen Kettenbruch von der Form (3) entwickelt, die Zähler der verschiedenen Näherungsbrüche, von constanten leicht zu bestimmenden Factoren abgesehen, den Ausdrücken U (§. 12) gleich werden.

Sturm bemerkt in der oben citirten Abhandlung (Liouville, T. VII) dass die Zähler der Näherungsbrüche, eben so wie die Reihe der Reste V deren Bildung sein Satz verlangt, zur Bestimmung der reellen Wurzeln einer Gleichung gebraucht werden können. In der That, weil $N_3 = N_2 q_1 - N_1$; $N_4 = N_3 q_2 - N_2$; ... $N_{n+1} = N_n q_n - N_{n-1}$, und $N_1 = 1$, so können nie zwei auf einander folgende Grössen N, für denselben Werth des x verschwinden; und ist $N_i = 0$, für $x = c$, so haben N_{i+1} und N_{i-1} entgegengesetztes Zeichen. Ferner ist

$$V_n = V_1 N_n - V P_n \text{ und } \frac{V}{V_1} = \frac{N_{n+1}}{P_{n+1}},$$

woraus durch Elimination von V_1

$$V = \frac{N_{n+1} V_n}{P_{n+1} N_n - N_{n+1} P_n} .$$

Sind aber sämmtliche Theilzähler eines Kettenbruches $= -1$, so ist

$$P_{i+1} N_i - N_{i+1} P_i = +1 \, ,$$

also

$$V = N_{n+1} V_n$$

und da V_n eine Constante, so haben V und N_{n+1} dieselben Wurzeln. Da ferner

$$\frac{V}{V_1} = \frac{N_{n+1}}{P_{n+1}} = \frac{N_n N_{n+1}}{N_n P_{n+1}} = \frac{N_n N_{n+1}}{1 + N_{n+1} P_n},$$

so werden N_{n+1} und N_n für $c - u$ einen Zeichenwechsel, für $c + u$ eine Zeichenfolge bilden, unter c eine reelle Wurzel von $V = 0$ oder $N_{n+1} = 0$ verstanden; in der That wird der Nenner $1 + N_{n+1} P_n$ nur wenig von 1 unterschieden sein können, und daher das Product $N_n N_{n+1}$ dasselbe Zeichen haben, wie der Quotient $\frac{V}{V_1}$. Aus allem diesem folgt, dass die Grössen N, oder auch die nur durch positive Factoren von ihnen sich unterscheidenden Y's

$1;\ \Sigma(x-x_1);\ \Sigma\delta(x_1, x_2)(x-x_1)(x-x_2);\ \ldots\ldots\delta(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)$

statt der Functionen V des *Sturm*'schen Satzes gebraucht werden können.

Anm. Die schönen Untersuchungen *Hermite*'s, welche eine Ausdehnung des *Sturm*'schen Satzes auf Systeme von Gleichungen mit mehreren Variabeln enthalten und die derselbe in den Comptes rendus der pariser Academie im Auszuge bekannt gemacht hat, sind mit meinen vorhergehenden Untersuchungen in keinem Zusammenhange. Sollten in den durch eine neue Terminologie leider etwas schwer verständlichen Abhandlungen Herrn *Sylvesters* sich noch Resultate finden, welche mit denen gegenwärtiger Abhandlung übereinstimmen, so kann niemand bereitwilliger als ich selbst sein, die Prioritätsrechte des gewandten englischen Analysten anzuerkennen.

§. 14.

Sturm hat sowohl in seiner grösseren Abhandlung (Mémoires présentés etc., Tom VII, §. 20) als auch in einer kurzen Notiz (*Liouville* Tome VII, Note à l'occasion de l'article de Mr. *Gascheau* etc.) ein Princip erörtert, das bei der Untersuchung über die Realität der Wurzeln einer Gleichung häufig von Nutzen sein kann. Ich will in diesem §. nach *Sturms* Angabe dasselbe erläutern, und in den folgenden Nummern eine Anwendung auf die Gleichung machen, welche *Gauss* in seiner Abhandlung über mechanische Quadratur aufgestellt hat.

Es sei $V = 0$ eine Gleichung $n$ten Grades, welche auch gleiche Wurzeln haben kann; V_1 ein Ausdruck $(n-1)$ten Grades, der mit V keinen gemeinschaftlichen Factor habe. Man bilde wie im *Sturm*'schen Satze die Reihe der Functionen

$$V,\ V_1,\ V_2,\ \ldots\ldots V_m\ ; \tag{27.}$$

die Anzahl derselben ist höchstens $n+1$, die letzte V_m muss nach der Annahme über V und V_1 eine Constante sein. Lässt man x von a bis b wachsen, so haben wir schon früher gesehen, dass nie zwei auf einanderfolgende V's gleichzeitig verschwinden können, dass das Verschwinden einer Zwischenfunction auf die Zahl der Zeichenwechsel ohne Einfluss ist, und endlich, dass eine Veränderung in dieser letzteren nur durch das Verschwinden von V hervorgebracht werden kann. Geht x durch einen Wurzelwerth von $V = 0$, der nicht eine doppelte, vierfache, sechsfache u. s. w. Wurzel ist, so wird V dabei sein Zeichen ändern, der Anfang der Reihe V und V_1 und damit die ganze Reihe, kann bei diesem

Durchgange einen Zeichenwechsel gewinnen oder verlieren, oder auch in dem erwähnten Falle $2m$facher Wurzeln in Bezug auf die Zeichen keine Aenderung erfahren. Wächst demnach x von a bis b, so kann die Reihe so viele Zeichenwechsel gewinnen oder verlieren, als Wurzeln zwischen a und b sind — wobei jede vielfache nur einmal gezählt wird, — es kann auch der Gewinn und Verlust an Zeichenwechseln sich zum Theil compensiren; auf keinen Fall kann der Unterschied der Zeichenwechsel, die (27) für $x = a$ mehr hat als für $x = b$, die Zahl der zwischen a und b liegenden Wurzeln übersteigen.

Ein merkwürdiger, häufig vorkommender Fall ist folgender:

Enthält die Reihe (27) genau $n+1$ Functionen, wobei also V_i stets um einen Grad höher ist, als V_{i+1}, giebt ferner die Substitution $x = a$ lauter Zeichenwechsel, die Substitution $x = b$ nur Zeichenfolgen, so sind die Wurzeln von $V = 0$ sämmtlich reell und liegen zwischen a und b. Denn da bei dem Uebergange von $x = a$ bis $x = b$ n Zeichenwechsel verloren gegangen sind, so muss die Gleichung nach dem Vorigen in diesem Intervalle wenigstens n reelle Wurzeln haben, da sie aber überhaupt nur n Wurzeln hat, so sind alle ihre Wurzeln reell, liegen zwischen a und b, und die Reihe (27) hat bei jedem Durchgange des x durch eine Wurzel einen Zeichenwechsel verloren. Daraus folgt ferner, dass die Wurzeln sämmtlich einfache sind; im entgegengesetzten Falle würde die Anzahl der Zeichenwechsel kleiner als n sein müssen. Man sieht ausserdem, dass bei dem in Rede stehenden Falle die Zahl der reellen Wurzeln von $V = 0$, welche zwischen zwei beliebigen andern Gränzen α und β liegen, vermittelst der Reihe (27) eben so wie im *Sturm*'schen Satze sich ergiebt. Da dieselben Betrachtungen auf die Gleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ u. s. w. anwendbar sind, so haben alle diese Gleichungen nur reelle Wurzeln. Aber noch mehr, sind c und d zwei auf einander folgende Wurzeln von $V = 0$, so müssen die Vorzeichen von V und V_1 für $x = c - u$ bis $x = d + u$, wo u eine kleine positive Grösse ist, den in einem der beiden nachstehenden Tabellen bezeichneten Gang haben:

x	V	V_1
$c-u$	+	−
c	0	−
$c+u$	−	−
⋮		
$d-u$	−	+
d	0	+
$d+u$	+	+

V	V_1
−	+
0	+
+	+
⋮	
+	−
0	−
−	−

weil bei jedem Durchgange durch eine Wurzel zwischen V und V_1 ein Zeichenwechsel verloren gehen soll. Man sieht hieraus, dass zwischen $c+u$ und $d-u$ die Function V_1 das Zeichen wechselt, also zwischen c und d wenigstens eine Wurzel von V_1 liegen muss. Da diess für jedes der $n-1$ Intervalle gilt, die von den n Wurzeln der Gleichung $V=0$ gebildet werden, so liegt in jedem solchen Intervalle eine und nur eine der $n-1$ Wurzeln von $V_1=0$. Eben so liegt zwischen je zwei Wurzeln von $V_1=0$ eine Wurzel von $V_2=0$ u. s. w.

An beiden im Anfange des § citirten Stellen spricht *Sturm* von einer Abhandlung, in welcher er die eben auseinandergesetzte Methode auf eine besondere Klasse von Gleichungen anwenden wolle; so viel ich weiss, ist dieselbe aber nicht erschienen.

§. 15.

Zu den Gleichungen, auf welche die vorhergehenden Sätze anwendbar sind, gehört die Gleichung $Y_n=0$ oder (siehe §. 9)

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & x \\ & & \vdots & & \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} = 0$$

in welcher der Coefficient der höchsten Potenz x^n gleich

$$\lambda_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ & & \vdots & \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

ist. Nimmt man als ersten Divisor Y_{n-1} und erwägt, dass bei der Bildung der Reste $V_2, V_3, \ldots$ von wesentlich positiven Factoren derselben abgesehen werden kann, so wird in Folge der Gleichung (16)

$$Y_a = Y_{a-1}\left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}}x + \frac{\mu_a\lambda_{a-1}-\lambda_a\mu_{a-1}}{\lambda_{a-1}^2}\right) - \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a-1}}\right)^2 Y_{a-2}$$

die Functionenreihe (27) in folgende übergehen:

$$(28.) \qquad Y_n, \; Y_{n-1}, \; Y_{n-2}, \; \ldots\ldots Y_2, \; Y_1, \; 1,$$

vorausgesetzt, dass die Grössen $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \ldots\ldots \lambda_2, \lambda_1$ sämmtlich von 0 verschieden sind. Sind z. B. w die Anzahl Zeichenwechsel, welche die Reihe für $x=a$

darbietet, α' diejenige, welche der Substitution $x = b$ entspricht, so hat $Y_n = 0$ wenigstens $\pm(\alpha - \alpha')$ zwischen a und b liegende Wurzeln.

Sind die Coefficienten $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots\ldots \lambda_2, \lambda_1$ aber nicht allein von 0 verschieden, sondern auch sämmtlich positiv, so sind die Wurzeln der Gleichungen $Y_n=0$, $Y_{n-1} = 0, \ldots\ldots Y_1 = 0$, sämmtlich reell, ungleich, und zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln von $Y_i = 0$ liegt eine Wurzel von $Y_{i-1} = 0$. In der That, bei dieser Annahme hat (28) für $x=-\infty$ nur Abwechselungen, für $x=+\infty$ nur Zeichenfolgen, also sind die Betrachtungen in der zweiten Hälfte von §. 14 auf (28) anwendbar. Für specielle Formen des Systems Grössen s werden sich zuweilen engere Grenzen für die Wurzeln finden lassen, als $-\infty$ und $+\infty$; ich werde in dem nächsten § einen solchen Fall erörtern.

§. 16.

Die von *Gauss* in seiner Abhandlung *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* gelöste Aufgabe kann folgendermaassen gestellt werden:

Man soll $2n$ Grössen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$$

und

$$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$$

so bestimmen, dass, wenn unter $\varphi(x)$ eine beliebige Function des $(2n-1)$ten Grades verstanden wird, in aller Strenge die Gleichung stattfinde

$$(29.)\quad \alpha_1\varphi(x_1) + \alpha_2\varphi(x_2) + \ldots\ldots + \alpha_n\varphi(x_n) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx$$

Setzt man

$$\varphi(x) = l + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots\ldots + l_{2n-1} x^{2n-1},$$

und vergleicht in (29) die Coefficienten von l, l_1, l_2 u. s. w., so erhält man

$$(30.)\quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n = 1 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n = \frac{1}{2} \\ \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n^2 = \frac{1}{3} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_1 x_1^{2n-1} + \alpha_2 x_2^{2n-1} + \ldots\ldots + \alpha_n x_n^{2n-1} = \dfrac{1}{2n}. \end{cases}$$

Da die Grössen α nur lineär vorkommen, so ist die Bestimmung der Quantitäten $x_1, x_2, \ldots\ldots$ die einzige Schwierigkeit. Setzt man

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n &= p_1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots\ldots + x_{n-1}x_n &= p_2 \\ &\vdots \\ x_1x_2x_3 \ldots\ldots \quad x_n &= p_n \end{aligned}$$

so ist bekanntlich

$$x_1^n - x_1^{n-1}p_1 + x_1^{n-2}p_2 - \ldots\ldots \pm p_n = 0$$
$$x_2^n - x^{n-1}p_1 + x_2^{n-2}p_2 - \ldots\ldots \pm p_n = 0$$

u. s. w.

Multiplicirt man also die $(n+1)$te der Gleichungen (30) mit 1, die $n$te mit $-p_1$, die $(n-1)$te mit p_2, u. s. w. endlich die erste mit $\pm p_n$, und addirt dieselben, so fallen die Coefficienten a_1, a_2, ... a_n fort, und man erhält

$$(31.)\quad \frac{1}{n+1} - p_1\frac{1}{n} + p_2\frac{1}{n-1} - \ldots\ldots \mp p_{n-1}\cdot\tfrac{1}{2} \pm p_n = 0.$$

Verfährt man eben so mit der $(n+2)$ten bis 2ten Gleichung in (30), so giebt diess

$$(31^*.)\quad \frac{1}{n+2} - p_1\frac{1}{n+1} + p_2\frac{1}{n} - \ldots\ldots \mp p_{n-1}\cdot\tfrac{1}{3} \pm p_n\cdot\tfrac{1}{2} = 0;$$

auf dieselbe Weise erhält man ferner

$$(31^{**}.)\begin{cases} \dfrac{1}{n+3} - p_1\dfrac{1}{n+2} + p_2\dfrac{1}{n+1} - \ldots\ldots \mp p_{n-1}\cdot\tfrac{1}{4} \pm p_n\cdot\tfrac{1}{3} = 0 \\ \dfrac{1}{n+4} - p_1\dfrac{1}{n+3} + p_2\dfrac{1}{n+2} - \ldots\ldots \mp p_{n-1}\cdot\tfrac{1}{5} \pm p_n\cdot\tfrac{1}{4} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{1}{2n} - p_1\dfrac{1}{2n-1} + p_2\dfrac{1}{2n-2} - \ldots\ldots \mp p_{n-1}\cdot\dfrac{1}{n+1} \pm p_n\dfrac{1}{n} = 0. \end{cases}$$

Setzt man die aus den Gleichungen (31) sich ergebenden Werthe von $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ in

$$x^n - p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} - \ldots\ldots \mp p_{n-1}x \pm p_n = 0$$

ein, so erhält man die Gleichung, deren Wurzeln $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ sind. Die hieraus hervorgehende Gleichung ist natürlich

$$(32.)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots\cdots & \frac{1}{n+1} & x \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots\cdots & \frac{1}{n+2} & x^2 \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots\cdots & \frac{1}{2n} & x^n \end{vmatrix} = 0.$$

Gauss hat im 16ten § seiner Abhandlung für $n=2$, und $n=3$ die Gleichung (32) direct berechnet; weil aber für grössere Zahlen dieser Weg zu beschwerlich wird, leitet er aus der in der Abhandlung über die hypergeometrische Reihe gegebenen Kettenbruchsentwicklung von $\log\frac{1+t}{1-t}$ eine Recursionsformel ab, um die Gleichung (32) — oder genauer eine mit ihr sehr eng zusammenhängende — für die folgenden Werthe $n=4$, $n=5$ u. s. w. successive aufzustellen; schliesslich bestimmt *Gauss* die allgemeine Formel für ein beliebiges n durch Induction, und überlässt dem Leser die nach bekannten Methoden auszuführende Verification der Formel.

Die eleganten und einfachen Resultate der *Gauss*'schen Untersuchung sind von *Jacobi* in der ersten Abhandlung, welche er in diesem Journale publicirt hat, (Band I, pag. 301) auf eine überraschend leichte Weise hergeleitet worden. Er zeigt, dass von einem numerischen Factor abgesehen die Gleichung (32) mit

$$(33.)\qquad \frac{d^n(x^2-x)^n}{dx^n} = 0.$$

übereinstimmt, und folgert daraus, dass sämmtliche Wurzeln von (32) zwischen 0 und 1 liegen.

Die Entwicklung, welche die Theorie der Determinanten seit Veröffentlichung jener Arbeiten erfahren hat, gestattet es, ohne von dem schönen *Jacobi*'schen Resultate einen offenen oder versteckten Gebrauch zu machen, die Gleichung (32) direct aufzustellen. Da dieselbe ausserdem nur ein specieller Fall von $Y_n = 0$ ist, (vergl. §. 15) so wird man nach den von *Sturm* aufgestellten Principien die Realität und Lage der Wurzeln leicht bestimmen können.

§. 17.

Bekanntlich bleibt jede Determinante ungeändert, wenn man — um es kurz auszudrücken,— von einer spätern Horizontal- oder Verticalreihe eine frühere abzieht. Daraus erhellt, dass

$$N=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b_1} & \frac{1}{a+b_2} & \cdots & \frac{1}{a+b_n} \\ \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b_1} & \frac{b_1-b_2}{(a+b_1)(a+b_2)} & \cdots & \frac{b_1-b_n}{(a+b_1)(a+b_n)} \\ \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{b_1-b_2}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)} & \cdots & \frac{b_1-b_n}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{b_1-b_2}{(a_{n-1}+b_1)(a_{n-1}+b_2)} & \cdots & \frac{b_1-b_n}{(a_{n-1}+b_1)(a_{n-1}+b_n)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(b_1-b_2)(b_1-b_3)\ldots\ldots(b_1-b_n)}{(a+b_1)(a_1+b_1)\ldots\ldots\ldots(a_{n-1}+b_1)} N', \text{ wo}$$

$$N' = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a+b_2} & \cdots & \frac{1}{a+b_n} \\ 1 & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a+b_2} & \cdots & \frac{1}{a+b_n} \\ 0 & \frac{a-a_1}{(a+b_2)(a_1+b_2)} & \cdots & \frac{a-a_1}{(a+b_n)(a_1+b_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \frac{a-a_{n-1}}{(a+b_2)(a_{n-1}+b_2)} & \cdots & \frac{a-a_{n-1}}{(a+b_n)(a_{n-1}+b_n)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a-a_1)(a-a_2)\ldots\ldots(a-a_{n-1})}{(a+b_2)(a+b_3)\ldots\ldots(a+b_n)} N'',$$

wo N'' diejenige Determinante bedeutet, welche man aus N erhält, wenn man die $2n+1$ Glieder der ersten Horizontal und Verticalreihe weglässt. Man kann N'' durch das eben angewendete Verfahren wieder um eine Ordnung erniedrigen u. s.w. Das leicht zu übersehende Endresultat ist folgendes:

Setzt man $f(x) = (x+b_1)(x+b_2)\ldots\ldots(x+b_n)$, und bezeichnet mit $\Delta(a, a_1, \ldots\ldots a_{n-1})$ das Product aller $\frac{n(n-1)}{2}$ Differenzen von je zwei der Grössen a, jede Differenz so genommen dass der Index des Minuendus entweder stets der grössere, oder stets der kleinere ist, und behält die einmal festgestellte Annahme auch für $\Delta(b_1, b_2, \ldots\ldots b_n)$ bei, so ist

$$(34.) \qquad N = \frac{\Delta(a, a_1, \ldots\ldots a_{n-1})\,\Delta(b_1, b_2, \ldots\ldots b_n)}{f(a)f(a_1)\ldots\ldots f(a_{n-1})}.$$

Mit Hülfe dieser übrigens bekannten Formel (siehe z. B. *Rosenhayn* in *Crelle* Band 40, pg. 350) kann man folgenden Ausdruck $n$ter Ordnung leicht berechnen

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b_1} & \frac{1}{a+b_2} & \cdots & \frac{1}{a+b_n} & 1 \\ \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} & x \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} & x_{n-1} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} & x^n \end{vmatrix} = x^n \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b_1} & \frac{1}{a+b_2} & \cdots & \frac{1}{a+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-2}+b_1} & \frac{1}{a_{n-2}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}+b^n} \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \end{vmatrix}$$

$$- x^{n-1} \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b_1} & \frac{1}{a+b_2} & \cdots & \frac{1}{a+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-2}+b_1} & \frac{1}{a_{n-2}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} + \cdots$$

Zufolge (34) wird die rechte Seite

$$x^n \frac{\Delta(a, a_1 a_2, \ldots . a_{n-2} a_{n-1})\, \Delta(b_1, b_2, \ldots . b_n)}{f(a) f(a_1) \ldots . f(a_{n-2}) f(a_{n-1})} - x^{n-1} \frac{\Delta(a, a_1, a_2, \ldots a_{n-2}, a_n) \Delta(b_1, b_2, \ldots . b_n)}{f(a) f(a_1) \ldots . f(a_{n-2}) f(a_n)} + \ldots .$$

Setzt man $(x-a)(x-a_1)(x-a_2) \ldots .(x-a_n) = F(x)$,

und erwägt, dass wenn man in den Differenzen $a_i - a_k$, $b_i - b_k$, wie wir es von jetzt ab thun wollen, stets $i > k$ annimmt,

$\Delta(a, a_1, a_2, \ldots . a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = \Delta(a, a_1, a_2, \ldots . a_{n-2}, a_{n-1})\, F'(a_n)$

$\Delta(a, a_1, a_2, \ldots . a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = -\Delta(a, a_1, a_2, \ldots . a_{n-2}, a_n)\, F'(a_{n-1})$ u. s. w. ist,

so wird der vorhergehende Ausdruck

$$(35.)\quad \frac{\Delta(a, a_1, a_2, \ldots . a_{n-1}, a_n) \Delta(b_1, b_2, \ldots . b_n)}{f(a) f(a_1) f(a_2) \ldots . f(a_{n-1}) f(a_n)} \left\{ x^n \frac{f(a_n)}{F'(a_n)} + x^{n-1} \frac{f(a_{n-1})}{F'(a_{n-1})} + \ldots + x \frac{f(a_1)}{F'(a)} + \frac{f(a)}{F'(a)} \right\}.$$

Um die Gleichung (32) in entwickelter Form zu haben, braucht man nur

$$a = 0 \quad ; \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 2 \ldots . a_n = n$$
$$b_1 = 1 \quad , \quad b_2 = 2 \ldots . b_n = n,$$

zu setzen; dadurch wird

$$(36.)\quad \begin{cases} f(a_n) = (n+1)(n+2) \ldots . 2n & F'(a_n) = n.(n-1) \ldots . 2.1 \\ f(a_{n-1}) = n.(n+1) \ldots . (2n-1) & F'(a_{n-1}) = -(n-1)(n-2) \ldots . 1.1 \\ f(a_{n-2}) = (n-1)\, n \ldots . (2n-2) & F'(a_{n-2}) = (n-2)(n-3) \ldots . 1.1.2 \\ \vdots & \vdots \\ f(a) = 1.2 \ldots \ldots \ldots . n & F'(a) = \pm 1.2.3 \ldots \ldots \ldots . n, \end{cases}$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Bezeichnet man das Product der Zahlen $1.2.3.....a$ mit $a!$, so wird (35) folgender Ausdruck

$$(36.)\ \frac{\{(n-1)!(n-2)!(n-3)!...2!1!\}^3 n!}{2n!(2n-1)!(2n-2)!.....(n+1)!}\left\{x^n\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{x^{n-1}}{1}\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}+\frac{x^{n-2}}{1.2}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-2)!(n-2)!}-...\right\}$$

oder noch einfacher

$$(36.^*)\ \lambda_n\left\{x^n-\frac{n^2}{2n}\cdot\frac{x^{n-1}}{1}+\frac{n^2(n-1)^2}{(2n-1)(2n-2)}\cdot\frac{x^{n-2}}{1.2}-...\right\}\ \text{wo}\ \lambda_n=\frac{\{(n-1)!(n-2)!(n-3)!...2!1!\}^3}{(2n-1)!(2n-2)!.....n!}$$

Die Bemerkung, dass λ_n wesentlich positiv und von 0 verschieden ist, reicht hin, um die Realität der Wurzeln von (32) zu beweisen. Eben so einfach beweist man auch, dass sämmtliche Wurzeln zwischen 0 und 1 liegen. In der That, für $x=0$, wird die Klammergrösse in $(32)=\frac{f(a)}{F'(a)}$ oder zufolge (36) gleich $(-1)^n$; setzt man daher die Determinante in (32) gleich R_n, so wird die Reihe $R_n, R_{n-1}, R_{n-2}, ... R_2, R_1$ 1 für $x=0$ nur Abwechselungen haben. Für $x=1$ wird nach einem bekannten Satze die Klammergrösse $=1$; die Reihe der R's bietet also nur Zeichenfolgen dar; also sind die Wurzeln sämmtlicher Gleichungen $R_a=0$ reell, ungleich, und liegen zwischen 0 und 1; ferner ist zwischen je zwei Wurzeln von $R_a=0$ eine Wurzel von $R_{a-1}=0$ enthalten.

Bekanntlich ist nach (16)

$$R_n=R_{n-1}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}x+\frac{\mu_n\lambda_{n-1}-\lambda_n\mu_{n-1}}{\lambda^2{}_{n-1}}\right)-\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)^2R_{n-2}$$

wo der Werth von λ_n in (36*) angegeben ist, und $\mu_n=-\frac{n}{2}\lambda_n$. Setzt man

$$Z_n=x^n-\frac{n^2}{2n}\cdot\frac{x^{n-1}}{1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2n.(2n-1)}\cdot\frac{x^{n-2}}{1.2}-.....,$$

so dass $R_n=\lambda_n Z_n$ wird, so verwandelt sich die vorhergehende Formel in

$$(37.)\qquad Z_n=Z_{n-1}(x-\tfrac{1}{2})-\frac{(n-1)^2}{4(2n-1)(2n-3)}Z_{n-2}.$$

Diese Recursionsformel verbunden mit den Werthen

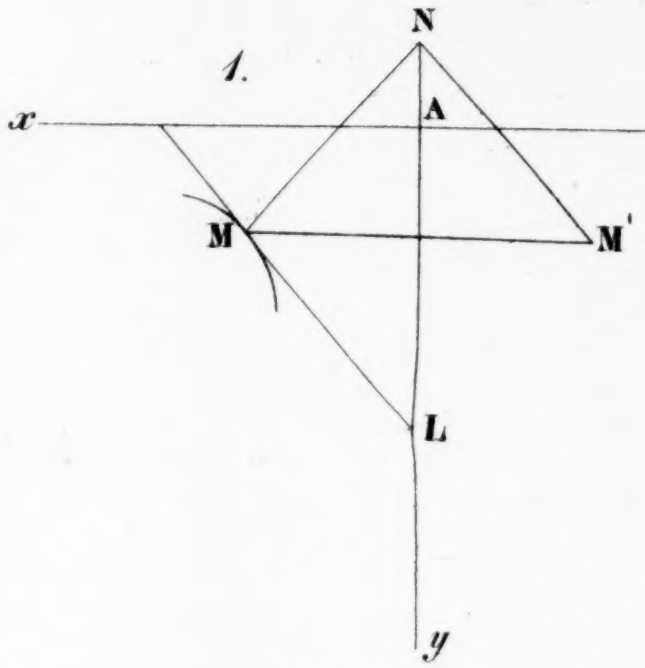
$$Z_0=1\quad Z_1=x-\tfrac{1}{2},$$

lehrt unter andern, dass Z_n nach Potenzen von $x-\frac{1}{2}$ entwickelt, nur die $n$te, n–2te u. s. w. enthalten wird; hieraus folgen andre bekannte Eigenschaften der Gleichung $Z_n=0$.

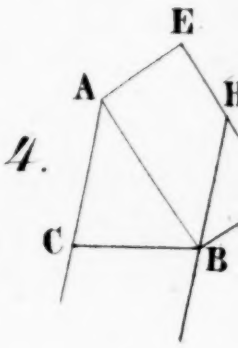
Halle, Mai 1854.

Druck der Petsch'schen Buchdruckerei in Berlin.

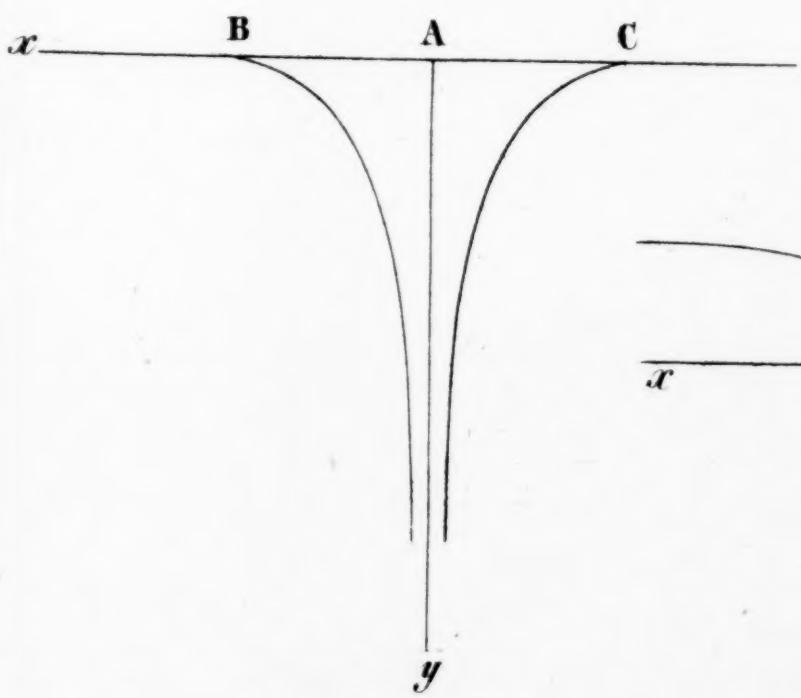
1.

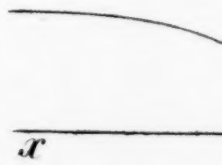


4.

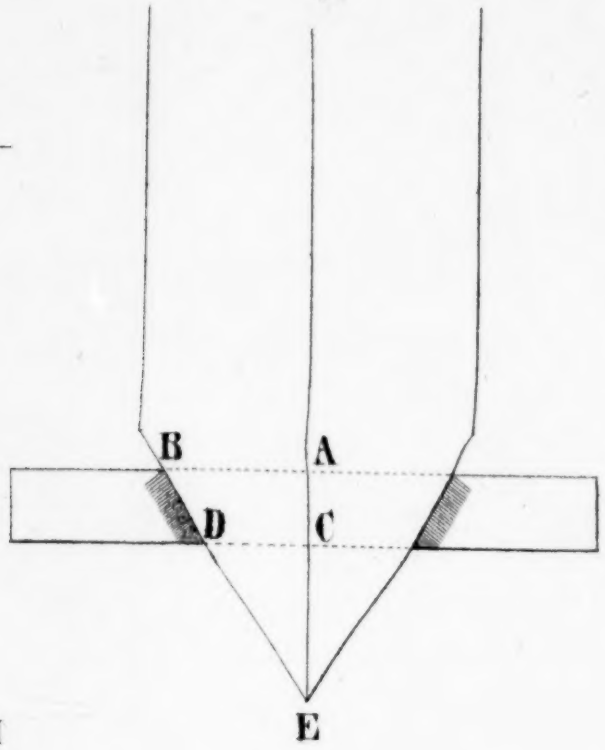


3.

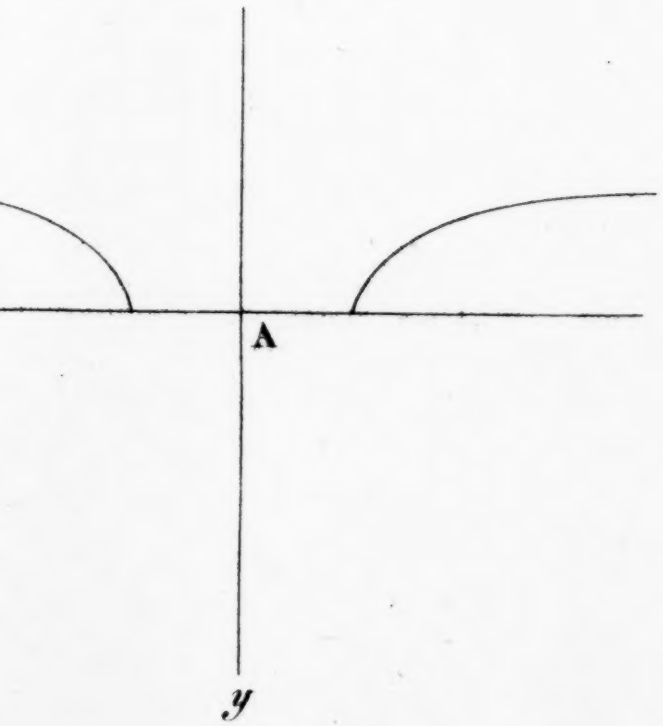


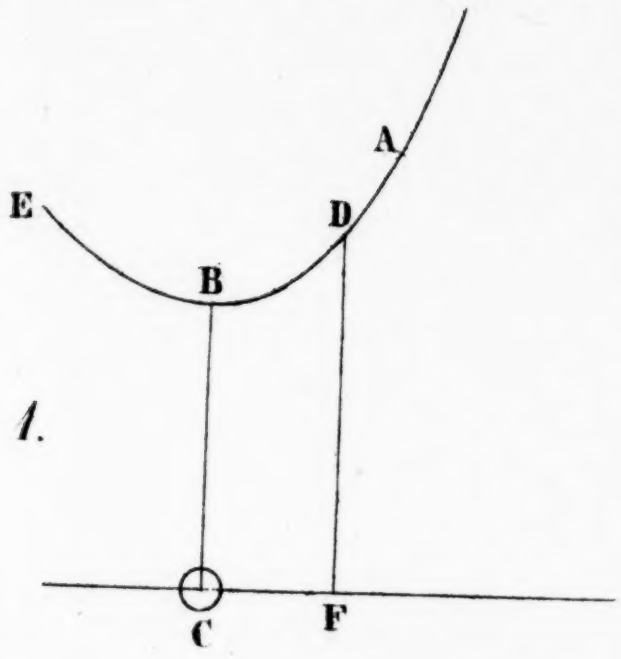


2.

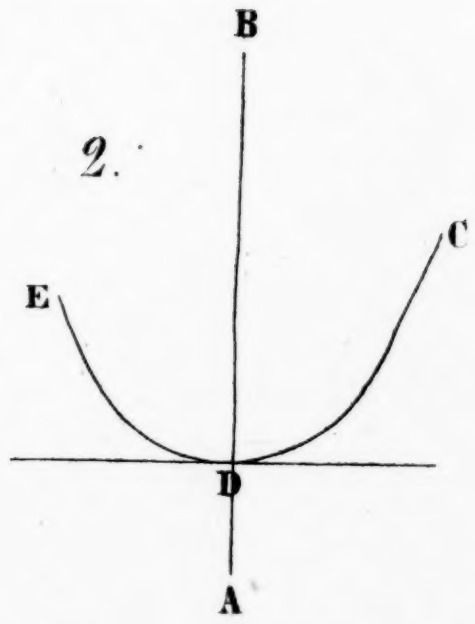


5.





1.



2.